



Title	Jordan-Hölder-Schreier ノ定理ノ lattice的 formulation ニツイテ
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 208, p. 7-13
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74831
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

901. Jordan-Hölder-Schreier / 定理 / lattice 的 formulation = ツイテ

中山 正 (阪大)

下ヲ又コトヲ駁辯ラセテ載キマス。J-H-S 定理 / lattice 的 formulation トシテハヨク modular lattice ナノ J-H-S 定理ヲマリマス。

然シコレデハ最モ原始的ナ (デアッタ) 場合、即チ次々ニ前者ノ不変部分群デハアルガ全体ノ群ノ不変部分群ナイ場合ニハ適用サレナイコト明カデアリマス。コノ事ハ誰デモ一す氣ニナルコトデアスガ、クトヘバ Ore モ *Trans. A.M.S.* 41 (1937) デソレヲ取上げテ、ソノ不満ヲ回避スルタメ

modular ⇒ +イ *lattice* を扱ヒ、ソコデアル種ノ
 $J-H-S$ 定理ヲ述ベラキマス。シカシソレハ群ノ場合ノ
analogy デアツテ包含シテキルトハ云ヘナイコトハ。ソ
 コニモ述ベラレテキル如クデアリマス。ソレハ群ノ方ニオイ
 テ *normal subgroup* = ナルトイフ関係ノ類似トシテ
 ノ概念ヲドコマデモ *lattice* ノ言葉 ダケ デ云ハウトスルカ
 ラ自然無理ニナルノダラウト思ヒマス。群ノ方デモ \geq 以外
 = *normal subgroup* = ナルトイフ所ノ、 \geq デハ言ヒ
 表ハセナイ関係ガアルノデスカラ、ソレヲ含ム定理ヲ述ベル
 ノナラ当然ソレニ相當シテ *lattice* ノ $\geq \cap, \cup$ デハ表
 セナイ関係ヲ導入シテスベキダト思ヒマス。ソノ意味ニオイ
 テ、ムシロ *M. et Mme. deubreil* ノ *C.R.* 205
 (1937) ノ方ガ核心ニフレテキルノデハナイカト思ヒ
 マス。

然レ、ソコデハ *lattice* トシテデナク部分集合トシ
 テマツテアル (*lattice* 或ハ *partially ordered set*
 ノ場合モソレヲ適當ニ表現シテトイフ風ニ持チ廻レバ、コレ
 デモ良イノデセウ)。更ニ *E. George*, *Crelle* 180
 (1939) ニコレヲ取リ上ゲテ 大体 *lattice* = オケル \geq
 カラ *transitivity* ヲ除イタマウナモ、*Halbverband*
 ヲ導入シテ、ソコデ $J-H-S$ - 定理ヲ証明シテキル。トモ
 カク群ノ場合ヲモ含ムマウナ適當ニ *formulation* ヲス
 ルノハ何レニシテモ容易デアアル。タゞ要スルニ *lattice* ノ
 言葉ダケデハ少シ無理デ他ニ補助ノ概念ガ (ソレハ主トシテ

intransitive +) 要ルヲケデアル。而シテ若シ非帯 =
 一般 + 定理 = シテ述バタケレバ容易 = George x Dubreil
 の formulation デハ飽キタラナクナリマス。タトヘバ
 George) デハ intransitive + 関係 \geq = オイテ,
 $A > B$ ナル A, B ノ間ノ Kette ヲ扱ッテキルガ、ソレハ不
 充分 = 思ヘル。次々 = \geq ナクテ何 $\in A$ ガ $\geq B$ デナイ Kette
 ヲ扱フベキデアウ。

即チ J-H-S 定理ハ純粹 = ハ次々 = ----- ヲ云マスベ
 キデ、ハナレタ所ノ関係ハナルベク云フベキデナイト思フ。
 ソノ点ハ Dubreil) デハ不徹底 + 所モアルヤウデアアル。

然シソレナラドウ キレイ = formulate シタラヨイ
 カト云ハレルト一寸困ル。余リ キレイ = ハ云ヘサウモナイ。
 コノデモ、ソウシタ一般 + 形ノモノヲ求メル積リデハナク、
 ヲカモ George) ノホド大ガナリ = ヤラナイデ、マア lattice
 ノ話ヲシテキテ、序デ = J-H-S - 定理ヲ群ノ場合モ含メ
 テマツテ置クトイフ様 + 場合 手頃 + モノトシテ次ノ様 = デモ
 シタラ如何カト思フノデス。

L ヲ lattice ($\geq, \cup, \cap = \text{ヨル}$) トスル。コレ
 = 更 = ニツノ元ノ間ノ (transitive デナイ) 関係 \Rightarrow
 及ビニツノ quotients ノ間ノ 同値的 関係 \cong ガア
 ヅテ

$$(0) a \rightarrow b \rightarrow a \geq b$$

$$(1) a \rightarrow \begin{Bmatrix} b \\ c \end{Bmatrix} \rightarrow a \rightarrow b \cup c \rightarrow \begin{Bmatrix} b \\ c \end{Bmatrix} \rightarrow b \cap c$$

(II) 上 / (I) / 假定 / モト = , 更 =

$$C = d_0 \rightarrow d_1 \rightarrow \dots \rightarrow d_q = b \wedge c$$

($q = 1, 2, \dots$)

ナラバ

$$b \cup d_0 \rightarrow b \cup d_1 \rightarrow \dots \rightarrow b \cup d_q \neq$$

且ツ $d_{i-1}/d_i \cong b \cup d_{i-1}/b \cup d_i.$

ソウスレバ Zassenhaus / Lemma / Analogy

トシテ (後述参照)

定理 $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow a_s$
 \parallel
 $b_0 \rightarrow b_1 \rightarrow \dots \rightarrow b_t$

ナラバ

$$\frac{(a_{i-1} \wedge b_{j-1}) \cup a_i}{(a_{i-1} \wedge b_j) \cup a_i} \cong \frac{a_{i-1} \wedge b_{j-1}}{(a_{i-1} \wedge b_j) \cup (a_i \wedge b_{j-1})}$$
$$\cong \frac{(a_{i-1} \wedge b_{j-1}) \cup b_j}{(a_i \wedge b_{j-1}) \cup b_j}$$

(証明) ハ勿論簡單デアル。 $iC_j = a_i \wedge b_j$ ト置ク。先ツ

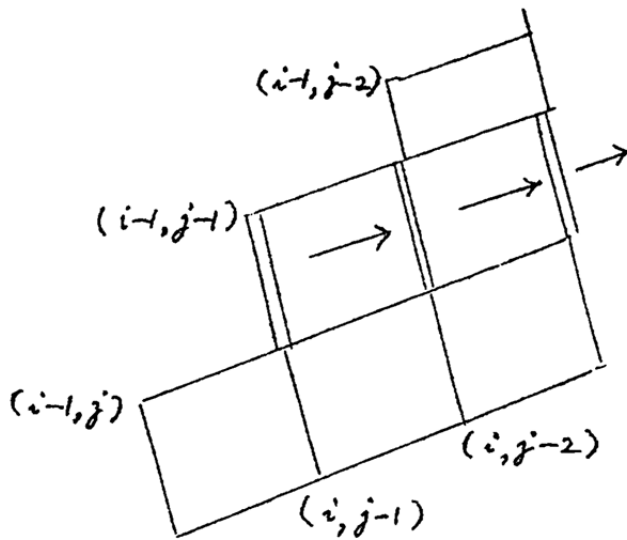
$$i-1C_j \rightarrow iC_j, \quad iC_{j-1} \rightarrow iC_j$$

が容易ニ云ハレル。定理ノ前半ハ

$$\frac{a_i \cup i-1C_{j-1}}{a_i \cup i-1C_j} \sim \frac{i-1C_{j-1}}{iC_{j-1} \cup i-1C_j}$$

デアル。

ソノ証明ハ次ノ圖カラ汲ミトツテイタガキタイ。



即ち、次々ニヤツテ行クノデアル。(群ノ場合ノ Zassenhaus ノハ一度ニ出来タガ、今ハソノ様ニ假定ガナイカラ、次々ニヤル。ナホ上ノハ Zassenhaus ヨリズツト弱イ形デアル。何故ナラ上ノ様ニ Kette = 出テ来ルモノノ間ノ関係ガケダカラデアル。)

トモカク J-H-S 定理ハ或ル意味デハ lattice ノ定理トイフベキデハナイカモ知レナイ。Modular lattice デハ Dedekind's Transposition principle ガ成立ツトイフノハ lattice ノ定理デ、ソレJ度第ニ同型定理ガ群ノ定理デアルトイフ如クデアル。ソレソレ以後ハ或ル意味デ lattice デモ群デモナイ何カ transitive デナイアル種ノ関係ノアル system ノ定理ト見ルベキカト思フ。

序デ = (Zassenhaus ノ Lemma 的ナコトハ問題ニセズ) タゴ J-H-S - 定理ガケテ問題ニシテ一般ニ formulate スレバ次ノ様ノ事ニデモナルノデハナイデセウカ。(Lattice モハナレテ)

$L \rightarrow$ 集合. $\forall \text{ノ元ノ間} \Rightarrow$ ナル関係ガアツ
テ

$$(I) a \rightarrow \begin{cases} b \\ c \end{cases} \text{ナラバ } L \text{ノ中} = b \cup_a c, b \wedge_a c \text{ナル}$$

元ガアツテ

$$a \rightarrow b \cup_a c \rightarrow \begin{cases} b \\ c \end{cases} \rightarrow b \wedge_a c$$

更 = quotient (a/b (クジシ $a \rightarrow b$)) ノ間ノ同値関係
 \cong ガアツテ

(II) 上ノ (I) ノ假定ノモトニ

$$\frac{b \cup_a c}{b} \cong \frac{c}{b \wedge_a c}, \quad \frac{b \cup_a c}{c} \cong \frac{b}{b \wedge_a c}$$

(III) $\frac{a}{b} \cong \frac{c}{d}$ ナラバ $a \rightarrow a_1 \rightarrow \dots \rightarrow b$ ナラバ $c \rightarrow d$ ノ間
= 同ジ長サノ $c \rightarrow c_1 \rightarrow \dots \rightarrow d$ ガアツテ對應スル
quotients $a/a_1, a_1/a_2, \dots$ ト $c/c_1, c_1/c_2, \dots$
ガ \cong .

(IV) $a \rightarrow c \rightarrow \dots \rightarrow d$ ガ長サ r ナリ且ツ

$a \rightarrow b \rightarrow \dots \rightarrow d$ ナラバ

$$c \wedge_a b \rightarrow \dots \rightarrow d$$

ナル長サガ高々 $r-1$ ナル Kette ガアル。

然シ、ドウモコンナコトヲシテモ面白クアリマセン。モット
一般ニモナルト思ヒマス。

最終ニ、J-H-ノ定理。スナハチ Kettensatz ノアル
場合、ハ Birkhoff, Covering condition,

片方 ケ ヲ ミ タ ス *lattice* ヲ キ レ イ = 行クコトハ明カデ
アリマス。

以上下ヲ又事ヲ長々耽擱ツテ申譯アリマセン。