



Title	單葉函数ノ係數問題ニ就イテ
Author(s)	城, 憲三
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 208, p. 13-40
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74832
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

902. 單葉函數ノ係數問題ニ就イテ

城 憲 三 (阪大工)

§1. 緒 論

單葉函數ニ於ケル主要ナ問題トシテ興味ノアルハ、所謂 係數問題

$$(1) \quad \Delta(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots$$

ガ $|z| < 1$ ノデ正則且ツ單葉ナルカタノハ係數ノ満足スル必要十分條件如何ノ問題デアル。コノデハ必要條件知ケヲ考ヘル。

周知ノ如ク 1916 年 Bierberbach ハ (1) ノル任意ノ函數ニ對シ $|a_2| \leq 2$ ナルコトヲ証明シ、 $|a_n| \leq n$ (3, 4, ...)ヲ証明出来ルチヤナイカト想像シタ。其ノ後 1923 年 Math. Annalen デ Löwner ガ實際 $|a_3| \leq 3$ ガ成立スルコトヲ、彼自身ノ slit domain ノ議論カラ出発シテ、証明シタノデアル。

現在未ダ $n \geq 4$ ニ對シ、Bierberbach ノ想像ガ

増ッテキルカドウカ 分ラナイ儘デアルが、筆者ハコゝニ、スベテノ (1) ノ函数ニ對シ $|a_n| \leq 4$ ノ成立スルコトヲ示サウ。以下ノ方法ニヨッテ $|a_n| \leq 5$ ノ証明モ亦與ヘラレルノデアリ、一般ニ $|a_n| \leq n$ ナルコトモ証明サレルデアラウト思ッテキルガ、コゝデハ $n=4$ ノミノ場合ニツイテ述べ、諸賢ノ御批判ヲ得ラレバ幸ト思フ。

§2. 近似定理

今、單位円 $|z| < 1$ ノ特種ナ領域ニ寫像スルコトヲ考ヘル。寫像函数ヲ

$$(2) \quad \zeta(z) = e^{-t} (z + \dots), \quad t > 0$$

ノ形ヲ考ヘ、之レニ依ッテ $|z| < 1$ ハ z 平面ノ單位円 $|\zeta| < 1$ ノ上ノ周上ノ点 $-\bar{\eta}$ カラ中心ニ向ッテ半径ニ沿ウテ線分ヲ切断シタ領域ニ寫像サレルトスル。斯様ナ領域ヲ *elementary slit domain* ト呼ビ、(2) ノ函数ヲ *elementary bounded slit representation* ト呼ブコトニスル。但シ (2) ノ函数ハ常ニ *normalize* シテ考ヘルトスル。即チ $\zeta(0) = 0, \zeta'(0) > 0$ トスル。

$\zeta(z)$ ノ斯様ニシテオクト、之レハ常ニ ニツノ独立ナ real parameter t, ϑ が含マレテ、ソレハ

$$\zeta'(0) = e^{-t}, \quad \eta = e^{i\vartheta} \quad (0 \leq t, 0 \leq \vartheta < 2\pi)$$

デ與ヘラレ、以下ニ於テ 重要ナ役割 ヲナス。

サテ今、全リ任意ノ *real parameter* t, ϑ ($0 \leq t, 0 \leq \vartheta < 2\pi$) ヲ持ッ (2) ノ形ノ函数 $\zeta(\vartheta, t)(z)$ ノスベテ

ノ集リヲ $\mathcal{F}_1$ トシヨウ。

$\vartheta=0$ ナルトキノ函数 $w = \zeta_{(0,t)}(z)$ ハ方程式

$$\frac{w}{(1-w)^2} = \alpha \frac{z}{(1-z)^2}, \quad \alpha = e^{-t}$$

カラ得ラレ、一般ニ、 $\zeta_{(\vartheta,t)}(z) = \eta \zeta_{(0,t)}(\eta z)$ デアルカラ、 $w = \zeta_{(\vartheta,t)}(z)$ ハ、次ノ方程式ヲ満足スルコトカ分ル。

$$(3) \quad \frac{w}{(1-\eta w)^2} = \alpha \frac{z}{(1-\eta z)^2}, \quad \alpha = e^{-t}, \quad \eta = e^{i\vartheta}$$

吾々ハ、之等ノ函数ノ iteration ヲ考ヘル。即チ $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n$ ヲ $\mathcal{F}_1$ = 属スル全ク勝手ノ函数トシテ、 $\zeta_1(\zeta_2(\dots(\zeta_n(z))\dots))$ ナル函数ヲ作ル。斯様ノ n 個ノ elementary bounded slit representation ノ iteration デ與ヘラレル函数ノスベテノ集リヲ $\mathcal{F}_n$ デ表ハスコトスル。

ソコデ、証明セントスル近似定理デハ、モシ

$$(4) \quad f(z) = e^{-t_0} (z + \dots), \quad t_0 > 0$$

ヲ $|z| < 1$ = 於ケル 任意ノ bounded slit representation トシタトキニ、即チ $f(z)$ ハ $|z| < 1$ ナル単位円ヲ全ク任意ノ形ヲシタ cut デ切断サレタ単位円領域ニ寫像スルモノデアルトキニ、何時デモ $f(z)$ ハ $\mathcal{F}_n$ ノ函数デ近似出来ルト云フコトヲ示シタイノデアル。即チ次ノ定理ヲ証明スル。

近似定理 I $|z| < 1$ = 於ケル任意ノ normalize シタ bounded slit representation ヲナス函数 $f(z)$

= 對シ, 帶 = $\mathcal{F}_n$ = 属スル函数 / series $\mathcal{F}_n$ が存在シ,
 $n \rightarrow \infty$ + ルトキ $\mathcal{F}_n$ ハ $|z| < 1$ ノ内部 $|z| \leq \rho$ ($0 < \rho < 1$) =
 於テ, $\text{uniformly} = f(z) =$ 收斂スル。

証明 考ヘルスベテノ函数ハ normalize シテオ
 ク。函数 $g_n(z) = f(\rho_n z)$, $\rho_n = 1 - \frac{1}{n}$, $n = 2, 3, \dots$
 ハ, $|z| < 1$ ヲ, 單位円内 = 於テ analytic curve デ開
 マレタ領域 = 寫像スル。而シテ $g_n(z)$ ハ $n \rightarrow \infty$ = 對シ,
 $|z| < 1$ ノ内部デ $\text{uniformly} = f(z) =$ 收斂スルカラ,
 コノ近似定理 = 於テハ, 最初カラ $f(z)$ ノ領域 $G, \bar{G}$ ハ單
 位円内 = 横ハルトシ, 且ツ $f(z)$ ハ $|z| \leq 1$ デ regular
 ト假定スル。

トコロガ, 斯様ニ寫像函数 $w = f(z)$ ハ, Löwner モ
 示シタ様 =, $\text{bounded slit representation}$ デ近似
 スルコトが出来ル。即チ, ソノ方法ハ $|w| < 1$ 内 = 單位円周
 上ノ或ル一点 P カラ出発シテ $f(z)$ - 領域ノ周上ノ或ル一点
 P^* = 到ル slit ヲ作り, コノ slit ヲ $f(z)$ - 領域ノ周 =
 沿ッテ P^* ノ近クマデ歸リ来ルマデ延長スル。今モシ P_n ヲ
 $f(z)$ - 領域ノ周上ヲ P^* = 近ツク点列トシタトキ, 單位円
 $|w| < 1$ = 周上ノ点 P カラ P_n マデ $\text{slits } \mathcal{F}_n$ ヲ施シタ
 slit domain が得ラレルガ, 之レ等ノ slit domain
 G_n ハ核トシテ $f(z)$ - domain ヲ有スルカラ, G_n ヲ
 $|z| < 1$ = 寫像スル函数ヲ $\psi_n(z)$ トスレバ, $\psi_n(z)$ ハ
 $n \rightarrow \infty$ = 對シ, Carathéodory ノ定理 = ヲリ $|z| \leq \rho$,
 $0 < \rho < 1$ = 於テ $\text{uniformly} = f(z) =$ 收斂スル。尚

slits J_n は analytic curve ト考ヘテ 近似的 = 差支ヘテ 1。

扱, 近似定理ハ Löwner / 定理 = ヨツテ 次ノ様 = 証明スルコトが出来ル。Löwner = ヨレバ 如何ナル

normalized bounded slit representation:

$$f(z) = e^{-t_0} \{ z + b_2(t_0) z^2 + b_3(t_0) z^3 + \dots \},$$

$$t_0 > 0$$

= 對シテモ, 恒 = $0 \leq t \leq t_0$ = 於テ $|K(t)| = 1$ + ル

continuous + 函数 $K(t)$ が 對應シ, $f(z) = f(z, t)$

ハ initial condition $f(z, 0) = z$ ノ下 = 微分方程式

$$(5) \quad \frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = -f(z, t) \frac{1 + K(t)f(z, t)}{1 - K(t)f(z, t)}$$

ノ 解ガ アル。

コノコトカラ 係數 $b_2(t_0)$, $b_3(t_0)$ 等, parametric function $K(t)$ = ヨル 積分表示式

$$(6) \quad \begin{cases} b_2(t_0) = -2 \int_0^{t_0} e^{-t} K(t) dt, \\ b_3(t_0) = 4 \left[\int_0^{t_0} e^{-t} K(t) dt \right]^2 - 2 \int_0^{t_0} e^{-2t} K^2(t) dt, \\ \dots \end{cases}$$

ガ 得ラレル。

單位円 $|z| < 1$ 内ノ 任意ノ bounded slit representation = 對シテ 常 = $0 \leq t \leq t_0$ = 於テ continuous + parametric function $K(t)$ が 對應スルガ, 我々

ハコノ $K(t)$ ヲ stepwise constant function:

$$K^{(n)}(t) = K^{(n)} = \text{constant}, \quad t^{(i-1)} \leq t \leq t^{(i)}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

ヲ近似スル。但シコノ $\lambda =$, $t^{(0)} = 0$, $t^{(n)} = t_0$ ヲ $t^{(1)}$, $t^{(2)}$, ..., $t^{(n-1)}$ ノ変域 $(0, t_0)$ ヲ n 個ノ小変域ニ分ツ分点ヲアル。斯ノ如クシテ n ヲ適當ニトリ $0 \leq t \leq t_0$ ノ $t =$ 對シ

$$|K(t) - K^{(n)}(t)| < \varepsilon_n$$

ナラシメルコトが出来ル。コノ $\lambda = n \rightarrow \infty$, $t_i = t^{(i)} - t^{(i-1)} \rightarrow 0$ ノトキハ $\varepsilon_n \rightarrow 0$ トナル。

簡單ニ $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t^* \text{トスルト, } t^* = \frac{t_0}{n}$ トナルガ, コノトキニハ

$$K^{(n)}(t) = K_{\lambda}^{(n)}, \quad \frac{(\lambda-1)t_0}{n} \leq t \leq \frac{\lambda t_0}{n}$$

$$(\lambda = 1, 2, \dots, n)$$

ト取ルガヨイ。

シカシ, parametric function トシテ $K^{(n)}(t)$ ヲ有シ, Löwner ノ微分方程式ヲ満足スル函数ヲ $f^{(n)}(z, t_0) = e^{-t_0} \{z + b_2^{(n)}(t_0)z^2 + \dots\}$ トスレバ ($f^{(n)}(z, 0) = z$) 之レハ $\mathcal{F}_n$ ノ函数トナル。何トナレバ $0 \leq t \leq t_0$ ナ $K(t)$ ガ常數ナラバ容易ニ Löwner ノ微分方程式ノ解ハ $\mathcal{F}_1$ ノ函数ナルコトが知ラレ, $K(t) = K^{(n)}(t)$ ナレトキハ t ノ小変域ナ $K^{(n)}(t)$ ハ常數ナルカラ, 上ノ場合 ~~組合~~ ハセテ $K(t) = K^{(n)} =$ 對シテハ $\mathcal{F}_n$ ノ函数トナル。

だから, (b) = 依ッテ, 任意, $\varepsilon^* > 0$, 正整数 m と與へタルトキ, 之レニ對シテ $n_0 = n_0(m, \varepsilon^*)$ を選ブコトが出来る,

$n \geq n_0, \mu \leq m$ = 對シ $|b_\mu - b_\mu^{(n)}| < \varepsilon^*$ が成立スル。

トコロが $f^{(n)}(z, t_0) = e^{-t_0} \{ z + b_2^{(n)}(t_0) z^2 + \dots \}$ ハ $|z| < 1$ デ *normal family* を作ルカラ, *subsequence* $f^{(n_\nu)}(z, t_0)$ が存在シ, $n_\nu \rightarrow \infty$ / トキ之ノ *sequence* ハ $|z| < 1$ / 内部デ *uniformly* $= f(z, t_0)$ = 収斂スル。

依ッテ近似定理 I ハ証明サレタ。

叔テ次ニ, 我々ハ *bounded* デナイ單葉函數:

$\Delta(z) = z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, |z| < 1$
= 對スル近似定理ヲ考ヘル。コノトキニハ $t_0 \rightarrow \infty$ = ナルトキデ $K(t)$ ノ定義領域ハ $0 \leq t < \infty$ デアリ, *Löwner* / 積分表示公式ハ無限積分トナル。

近似定理 II 任意ノ單葉函數 $\Delta(z)$ ハ 常ニ單位円ノ内部 $|z| \leq \rho < 1, 0 < \rho < 1$ = 於テ次ノ様ナ函數重 $\Phi_n(z)$ = 依ッテ近似サレル, 但シ

$$\Phi_n(z) = \frac{\Phi_0(\zeta_1(\zeta_2(\dots(\zeta_n(z))\dots)))}{\zeta_1'(0)\zeta_2'(0)\dots\zeta_n'(0)} = z + a_2^{(n)} z^2 + \dots$$

= シテ, $\Phi_0(z), \zeta_i(z)$ ハ

$$\Phi_0(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = z + 2z^2 + \dots,$$

$$(7) \quad \frac{z_i}{(1-\eta_i z_i)^2} = e^{-t_i} \frac{z}{(1-\eta_i z)^2}, \quad \alpha_i = e^{-t_i}, \quad t_i > 0$$

ヲ與ヘラレ, $t_i = t^{(i)} - t^{(i-1)}$ ($t^{(0)} = 0, t^{(n)} = t_0; i = 1, 2, \dots, n$) デアリ, t_0 ハ相當大キク選ビ, n ヲ大ニシテ $1 - \alpha_i$ ハ相當小ニスルモノトス。

(注意) $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t^*$ トスルコトヲ得。コノトキハ $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha^*$ トオキ, $t^* = \frac{t_0}{n}$ デアルカラ, $n \rightarrow \infty$ ノトキ $1 - \alpha^* = 1 - e^{-\frac{t_0}{n}} \rightarrow 0$ トナル。

証明 我々ハ変域 $0 \leq t < \infty$ = テ定義サレタル parametric function $K(t)$ = 對シ, = 種類ノ Approximation ヲ考ヘル。

近似(1):— 函数 $K(t)$ ハ與ヘラレタル函数 $\Delta(z)$ = 依ツテ單一 $0 \leq t < \infty$ デ定メラレル。トコロガ Löwnerノ係数ノ積分表示式デノ無限積分ハ $0 \leq t < \infty$ ヲ考ヘラレ, 然カモ $K(t)$ ナル函数ガ $|K(t)| = 1$ ナル條件ノ下ニ, 如何ナル函数デアツテモ uniformly = 收斂スル。オカラ, 係数 a_n ($n = 2, 3, \dots$) ノ値ハ t_0 ヲ十分大ニスレバ, 如何程ニモ近似サレル。即チ, 區間 $0 \leq t \leq t_0$ デハ $\Delta(z)$ = 依ツテ定マル $K(t)$ ヲ考ヘ, $t_0 \leq t < \infty$ = 對シテハ $K(t) \equiv K^*(t)$ ヲ考ヘル, 但シコノ $K(t)$ ハ $|K^*(t)| = 1$ ナル全ク任意ノ函数デヨイ。斯様ナ $K(t)$ = 對シテ計算サレル係数 a_n ノ近似値ヲ a_n^* トスレバ, 我々ハ任意ノ $\varepsilon_n > 0$ = 對シ, $T(\varepsilon_n)$ ヲ選ガコトが出来テ

$$t_0 \geq T(\varepsilon_n) \text{ かつ } |a_n - a_n^*| < \varepsilon_n$$

トスルコトが出来ル。

以下ニ於テ、我々ハ $t_0 \leq t < \infty$ ニ於テハ $K(t) \equiv -1$ トスルコトが出来ルコトが分ルカラウ。

近似(2):— $K(t)$ ハ區間 $0 \leq t \leq t_0$ デハ近似定理 I 様 = *stepwise constant function* デ近似サレ
ル。トコロガ $\varpi_n(\varepsilon)$ ヲ考ヘルト、近似定理 I デ分カル様 =、
 $K(t)$ ハ $0 \leq t \leq t_0$ デハ近似的 = *stepwise constant function* デ與ヘラレ、
 $t_0 \leq t < \infty$ デハ $K(t) \equiv -1$ デアル。

以上ノ二種類ノ近似ニヨツテ、全ク任意ノ $\varepsilon^* > 0$ 、 m ヲ與ヘルト、
 $n_0 = n_0(m, \varepsilon^*)$ ト $T = T(m, \varepsilon^*)$ ガ定メラレ、

$n \geq n_0$ 、 $\mu \leq m$ ニ對シ $|a_\mu - a_\mu^{(n)}| < \varepsilon^*$
ナル不等式ガ $t_0 \geq T(m, \varepsilon^*)$ ニ對シテ成立スルコトが分カル。

又カラ、モシモアル μ ニ對シテ $|a_\mu| > \mu$ ナルコトアリトスレバ、 n ヲ十分大ニシ、 t_i ヲ $i = 1, 2, \dots, n$ ニ對シテ -1 ニスレバ $t_0 \geq T$ ナル t_0 カラキメ久區間 $(0, t_0)$ ガ細分サレ、近似度が高マルカラ $|a_\mu^{(n)}| > \mu$ ガ成立スルコトノナラウ。我々ハ斯様ナコトノナイコトヲ示シタイノデアアル。

$$t_1 = t_2 = \dots = t_n = t^* = \frac{t_0}{n} \text{ ノトキハ}$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha^* = e^{-\frac{t_0}{n}}$$

だから、 n が十分大 = スレバ $1 - \alpha^* = 1 - e^{-\frac{t_0}{n}}$ が十分小
トナル。我々ハ n が大 = シテ $1 - \alpha^*$ が十分小ト考ヘテ我々
ノ証明ヲ行ヘバヨイ。

サテ、一般 = $\alpha_i = e^{-t_i}$ トシテ、前ノ (7) カラ $G_i(z)$
ノ展開ハ

$$(8) \quad G_i(z) = \alpha_i \{ z + 2(1 - \alpha_i) \eta_i z^2 + (1 - \alpha_i)(3 - 5\alpha_i) \eta_i^2 z^3 \\ + 2(1 - \alpha_i)(2 - 8\alpha_i + 7\alpha_i^2) \eta_i^3 z^4 + \dots \}, 0 < \alpha_i < 1$$

トサル、コノ展開係數ハ本論中絶ヘズ必要トナル

我々ハ Bieberbach ノ想像定理ヲ考ヘル = 際シ、常
ニ各 n ノ $\mu = n$ = 對シテ $\Re a_n > 0$ ト考ヘテ差支ヘナイ。然ラ
サル場合 = ハ $\Delta(z)$ ノ代リ = $\bar{\theta}_n \Delta(\theta_n z)$, $|\theta_n| = 1$ ヲ
適當ナル θ_n ヲ選ンテ考ヘタラヨイノデアアル。コノ根據カラ
我々ハ $t_0 \leq t < \infty$ = 對シテハ上述ノ如ク $K(z) \equiv -1$ トシ
タノデアアル。

以上ノコトヲ幾何学的 = 見ルナラバ、Bieberbach
ノ想像カ當ツテキルトシタトキノ極限ノ函数 = ナル $\Phi_0(z)$
= $z(1-z)^{-2}$ ノ slit domain ヲ考ヘタ場合、 $\Phi_0(z)$
= 對シテハ $0 \leq t < \infty$ デ $K(z) \equiv -1$ が對應シテキルが、
 $\Phi_0(z)$ ノ領域が色々変化シテ来ルト $K(z) \in 0 \leq t < \infty$ デ
定義サレタ色々ノ $|K(z)| = 1$ ノ函数 = ナルが、ドンナト
キデモ

$$\Re a_\mu^{(n)} \leq \mu$$

が $\mu = 2, 3, 4$ = 對シテ成立シナケレバナラナイコトヲ n
ヲ十分大 = シテ 証明シタイノデアアル。コノコトカラ $n \rightarrow \infty$

ナラシメ、我々ハ $\Re a_n \leq \mu$ 即チ $|a_n| \leq \mu$ / 証明ヲ得ルコトナルカラデアレ。

§ 3. 定理 $|a_2| \leq 2$ / 証明

以下ニ述ベル $|a_2| \leq 2$ / 証明ガケナラ、Löwner / 公式カラ直チニ得ラレルノダケレドモ、コノデ用ヒレ論法ハ次節ニ用ヒルノガシ、ソノ上、コノ節ノ結果ガ次節デ是非共必要ニナツテ来ルノデ、今ツタ定理ノ証明カラヤリ直ホサナケレバナラナイノデアアル。我々ノ証明方法ハ a_3, a_4 等ドノ係數ニ對シテモ共通ニ適用出来ルノデ、モシコノ論法ヲ続ケルナラバ遂ニ Bieberbach / 想像定理ヲ全部解決スルノチノイカト思ハレル。現ニ $|a_5| \leq 5$ ナルコトモ實際ニ証明出来ルンダカラ

我々ハ mathematical induction ヲ用ヒル。

1. approximation function $\Phi_n(z)$ $n=1$ / トキニ考フ。コノトキハ $t^{(1)} = t_0$ デアル。

$$\Phi_1(z) = \frac{\Phi_0(\zeta_1(z))}{\alpha_1} = z + a_2^{(1)} z^2 + \dots$$

トオケバ

$$\Phi_1'(z) = \frac{1}{\alpha_1} \frac{d\Phi_0}{d\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{dz}; \quad \Phi_1'(0) = \left(\frac{1}{\alpha_1} \frac{d\Phi_0}{d\zeta_1} \frac{d\zeta_1}{dz} \right)_0 = 1$$

$$\text{且ツ} \quad \Phi_1''(z) = \frac{1}{\alpha_1} \left[\frac{d^2\Phi_0}{d\zeta_1^2} \left(\frac{d\zeta_1}{dz} \right)^2 + \frac{d\Phi_0}{d\zeta_1} \frac{d^2\zeta_1}{dz^2} \right]$$

デアルカラ、(8)ヲ用ヒテ、

$$(9) \quad \Phi_1''(0) = \frac{2!}{\alpha_1} [2\alpha_1^2 + 2(1-\alpha_1)\alpha_1\eta_1] \\ = 2!2[\alpha_1 + (1-\alpha_1)\eta_1]$$

トナル。

以下ニ於テハ $\eta_n \equiv X_n + iY_n$ ($X_n^2 + Y_n^2 = 1$), $n=1, 2,$
 トオクコトニスレバ, (9)ニヨリ

$$\Re \frac{\Phi_1''(0)}{2!} = \Re a_2^{(1)} = 2[\alpha_1 + (1-\alpha_1)X_1] \equiv \varphi_2^{(1)}(X_1, \alpha_1)$$

ト表セバ,

$$\varphi_2^{(1)}(X_1, 1) = 2; \quad \varphi_2^{(1)}(1, \alpha_1) = 2$$

テ, $\varphi_2^{(1)}(X_1, \alpha_1)$ ハ明ラカニ $X_1 = 1$ ノトキニ *maximum*
 トナル。依ツテ

$$\Re \frac{\Phi_1''(0)}{2!} = \Re a_2^{(1)} \leq 2$$

ガ成立スル。コノ等号ハ $X_1 = 1$ ノトキニ成立ス。

2. $k=$, $n=2$ ノ場合ヲ考ヘル。コノトキハ $t^{(2)} = t$ 。

デアル。

$$\Phi_2(z) = \frac{\Phi_0(\zeta_1(\zeta_2(z)))}{\alpha_1\alpha_2} = \frac{\Phi_1(\zeta_2(z))}{\alpha_2} = z + a_2^{(2)}z^2 + \dots$$

トオケバ,

$$\Phi_2'(z) = \frac{1}{\alpha_2} \frac{d\Phi_1}{d\zeta_2} \frac{d\zeta_2}{dz},$$

且ツ

$$\Phi_2''(z) = \frac{1}{\alpha_2} \left[\frac{d^2\Phi_1}{d\zeta_2^2} \left(\frac{d\zeta_2}{dz} \right)^2 + \frac{d\Phi_1}{d\zeta_2} \frac{d^2\zeta_2}{dz^2} \right]$$

デアリ, (9)ニヨリ

$$\left(\frac{d^2 \Phi_1}{d\zeta_2^2} \right) = 2! \cdot 2 [\alpha_1 + (1-\alpha_1) \eta_1]$$

デアルカラ

$$\begin{aligned} \Phi_2''(0) &= \frac{2! \cdot 2}{\alpha_2} [(\alpha_1 + (1-\alpha_1) \eta_1) \alpha_2^2 + (1-\alpha_2) \alpha_2 \eta_2] \\ &= 2! \cdot 2 [\alpha_1 \alpha_2 + (1-\alpha_1) \alpha_2 \eta_1 + (1-\alpha_2) \eta_2] \end{aligned}$$

トナル。依ツテ

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \frac{\Phi_2''(0)}{2!} &= \mathcal{R} a_2^{(2)} = 2 [\alpha_1 \alpha_2 + (1-\alpha_1) \alpha_2 X_1 + (1-\alpha_2) X_2] \\ &\equiv \mathcal{P}_2^{(2)} \end{aligned}$$

ト表ハセバ

$$(\mathcal{P}_2^{(2)})_{\alpha_1=\alpha_2=1} = 2; (\mathcal{P}_2^{(2)})_{X_1=X_2=1} = 2$$

デ、 $\mathcal{P}_2^{(2)}$ ハ明ラカニ $X_1=X_2=1$ ノトキニ maximum トナル。依ツテ

$$\mathcal{R} \frac{\Phi_2''(0)}{2!} = \mathcal{R} a_2^{(2)} \leq 2$$

カ成立スル。コノ等号ハ $X_1=X_2=1$ ノトキニ成立ツ。

3. 一般ニ

$$\begin{aligned} \Phi_n(\zeta) &= \frac{\Phi_0(\zeta_1(\zeta_2(\cdots(\zeta_n(\zeta))\cdots)))}{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n} = \frac{\Phi_{n-1}(\zeta_n(\zeta))}{\alpha_n} \\ &= \zeta + a_2^{(n)} \zeta^2 + \cdots \end{aligned}$$

トナキ、コノ場合ヲ考ヘル。コノトキハ $\zeta^{(n)} = \zeta_0$ デアル。

$$\Phi_n'(\zeta) = \frac{1}{\alpha_n} \frac{d\Phi_{n-1}}{d\zeta_n} \frac{d\zeta_n}{d\zeta},$$

且ツ

$$\Phi_n''(z) = \frac{1}{d_n} \left[\frac{d^2 \Phi_{n-1}}{d\zeta_n^2} \left(\frac{d\zeta_n}{dz} \right)^2 + \frac{d\Phi_{n-1}}{d\zeta_n} \frac{d^2 \zeta_n}{dz^2} \right]$$

デアル、扱テ今

$$\Phi_{n-1}''(0) = 2!2 [d_1 d_2 \cdots d_{n-1} + (1-d_1) d_2 d_3 \cdots d_{n-1} \eta_1 + \cdots + (1-d_{n-1}) \eta_{n-1}]$$

ヲ assume スル、上式ヨリ

$$(10) \Phi_n''(0) = 2!2 [d_1 d_2 \cdots d_n + (1-d_1) d_2 d_3 \cdots d_n \eta_1 + \cdots + (1-d_n) \eta_n]$$

ニシテ

$$\Re \frac{\Phi_n''(0)}{2!} = \Re a_2^{(n)} = 2 [d_1 d_2 \cdots d_n + (1-d_1) d_2 d_3 \cdots d_n \chi_1 + \cdots + (1-d_n) \chi_n] \equiv \varphi_2^{(n)}$$

ト表ハセバ

$$(\varphi_2^{(n)})_{d_1=d_2=\cdots=d_n=1} = 2;$$

$$(\varphi_2^{(n)})_{\chi_1=\chi_2=\cdots=\chi_n=1} = 2$$

デ、 $\varphi_2^{(n)}$ ハ明ラカニ $\chi_1=\chi_2=\cdots=\chi_n=1$ ノトキニ *maximum* トナル。依テ

$$\Re \frac{\Phi_n''(0)}{2!} = \Re a_2^{(n)} \leq 2$$

ガ成立スル。コノ等号ハ $\chi_1=\chi_2=\cdots=\chi_n=1$ ノトキニ成立ツ。

依ッテ近似定理ニヨリ、 t_0 ヲ相當大ニ選ババ $n \rightarrow \infty$ ナラシメテ、 $\Re a_2 \leq 2$ ナル結果ヲ得ルコトが出来ル。

(附註) $a_2^{(n)}$ ガケヲ考ヘルヲラバ、上ノ結果ハ容易ニ、Lownerノ積分表示式

$$(II) \quad a_2 = \lim_{t_0 \rightarrow \infty} b_2(t_0) = -2 \int_0^{\infty} e^{-t} \kappa(t) dt$$

＝於テ

$$\kappa(t) = -\eta_{n-i+1}, \quad t^{(i-1)} \leq t \leq t^{(i)}$$

$$(i = 1, 2, \dots, n);$$

$$= -1, \quad t^{(n)} \leq t < \infty$$

$$\text{且ツ } t^{(0)} = 0, \quad t^{(n)} = t_0, \quad d_{n-i+1} = e^{-(t^{(i)} - t^{(i-1)})} = e^{-t_i}$$

トオキ, 上ト同シ結果ヲ得ラル。即チ

$$\begin{aligned} a_2 &= 2 \left[\int_0^{t^{(1)}} e^{-t} \eta_n dt + \int_{t^{(1)}}^{t^{(2)}} e^{-t} \eta_{n-1} dt + \dots + \int_{t^{(n)}}^{\infty} e^{-t} dt \right] \\ &= 2 \left[e^{-t^{(n)}} + (1 - e^{-(t^{(n)} - t^{(n-1)})}) e^{-t^{(n-1)}} \eta_1 + \dots + (1 - e^{-t^{(1)}}) \eta_n \right] \\ &= 2 \left[d_1 d_2 \dots d_n + (1 - d_1) d_2 d_3 \dots d_n \eta_1 + \dots + (1 - d_n) \eta_n \right] \end{aligned}$$

トナル。シカシ斯様ノ計算法ハ a_3, a_4 等ニ對シテハ複雑シテ先キノ見透シガ困難ナル。

§4. 定理 $|a_3| \leq 3$ ノ証明

又ハリ, mathematical induction ヲ用ヒテ $\Re a_3^{(n)} \leq 3$ ヲ証明シテ見ヤウ。

$t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{t_0}{n}$ ト取ルバ $d_1 = d_2 = \dots = d_n = d^*$ デ $d^* = e^{-\frac{t_0}{n}}$ デアルカラ n ヲ大キシタルトキハ d^* ハ殆ンド 1 ニ近イカラ, 我々ハ $1 - d_i (i = 1, 2, \dots, n)$ ハ十分小ナリトシテ証明スル。

1. $n = 1$ ノトキヲ考フ。前ノ様ニ

$$\Phi_1(z) = \frac{\Phi_0(\zeta_1(z))}{\alpha_1} = z + a_2^{(1)} z^2 + a_3^{(1)} z^3 + \dots$$

トオキ,

$$\Phi_1''(z) = \frac{1}{\alpha_1} \left[\frac{d^2 \Phi_0}{d\zeta_1^2} \left(\frac{d\zeta_1}{dz} \right)^2 + \frac{d\Phi_0}{d\zeta_1} \frac{d^2 \zeta_1}{dz^2} \right],$$

且ツ

$$\Phi_1'''(z) = \frac{1}{\alpha_1} \left[\frac{d^3 \Phi_0}{d\zeta_1^3} \left(\frac{d\zeta_1}{dz} \right)^3 + 3 \frac{d^2 \Phi_0}{d\zeta_1^2} \frac{d\zeta_1}{dz} \frac{d^2 \zeta_1}{dz^2} + \frac{d\Phi_0}{d\zeta_1} \frac{d^3 \zeta_1}{dz^3} \right]$$

テ、リ、(8)ヲ用ヒテ、

$$\begin{aligned} \Phi_1'''(0) &= \frac{3!}{\alpha_1} [3\alpha_1^3 + 8\alpha_1^2(1-\alpha_1)\eta_1 + \alpha_1(1-\alpha_1)(3-5\alpha_1)\eta_1^2] \\ &= 3! [3\alpha_1^2 + 8\alpha_1(1-\alpha_1)\eta_1 + (1-\alpha_1)(3-5\alpha_1)\eta_1^2] \end{aligned}$$

トナル。此ツテ

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \frac{\Phi_1'''(0)}{3!} &= \mathcal{R} a_3^{(1)} \\ &= [3\alpha_1^2 + 8\alpha_1(1-\alpha_1)x_1 + (1-\alpha_1)(3-5\alpha_1)(2x_1^2-1)] \\ &\equiv \mathcal{P}_3^{(1)}(x_1, \alpha_1) \end{aligned}$$

ト表ハセバ

$$(\mathcal{P}_3^{(1)})_{\alpha_1=1} = 3; (\mathcal{P}_3^{(1)})_{x_1=1} = 3$$

テ、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \mathcal{P}_3^{(1)} \right)_{\alpha_1=1} = 4(1-x_1)^2 \geq 0$$

ナル不等式が $-1 \leq x_1 \leq 1$ ナルスベテノ x_1 = 對シテ成立ツ。

$1-\alpha_1$ ハ十分小ト考ヘテヨイカラ、 $\delta > 0$ ヲ十分小ニトシ、

$\mathcal{P}_3^{(1)}(x_1, \alpha_1)$ ノ値ヲ領域 $-1 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq 1-\alpha_1 \leq \delta$ テ考

へレバコイノデアルガ $\frac{\partial}{\partial d_1} \varphi_3^{(1)}$ ハ $d_1 = 1$ ヲキ連続ガカラ, 斯様ナスバテノ $X_1, d_1 = 1$ 對シ,

$$(12) \quad \mathcal{R} \frac{\Phi_1'''(0)}{3!} = \mathcal{R} a_3^{(1)} \leq 3$$

ガ得ラレル. コノ等号ハ $X_1 = 1$ ノトキノミ成立ツ.

2. 次ニ, $n=2$ ノトキヲ考フ.

$$\Phi_2(z) = \frac{\Phi_1(\zeta_2(z))}{d_2} = z + a_2^{(2)} z^2 + a_3^{(2)} z^3 + \dots$$

トオキ

$$\begin{aligned} \Phi_2'''(z) &= \frac{1}{d_2} \frac{d}{dz} \left[\frac{d^2 \Phi_1}{d\zeta_2^2} \left(\frac{d\zeta_2}{dz} \right)^2 + \frac{d\Phi_1}{d\zeta_2} \frac{d^2 \zeta_2}{dz^2} \right] \\ &= \frac{1}{d_2} \left[\frac{d^3 \Phi_1}{d\zeta_2^3} \left(\frac{d\zeta_2}{dz} \right)^3 + 3 \frac{d^2 \Phi_1}{d\zeta_2^2} \frac{d\zeta_2}{dz} \frac{d^2 \zeta_2}{dz^2} + \frac{d\Phi_1}{d\zeta_2} \frac{d^3 \zeta_2}{dz^3} \right] \end{aligned}$$

デアリ,

$$\mathcal{R} \left(\frac{d^3 \Phi_1}{d\zeta_2^3} \right)_0 = 3! \varphi_3^{(1)} = 3! \left[3d_1^2 + 8d_1(1-d_1)X_1 + (1-d_1)(3-5d_1)(2X_1^2-1) \right],$$

$$\left(\frac{d^2 \Phi_1}{d\zeta_2^2} \right)_0 = 2! a_2^{(1)} = 2! 2 \left[d_1 + (1-d_1)\eta_1 \right]$$

デアルカラ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \Phi_2'''(0) &= \frac{3!}{d_2} \mathcal{R} \left[\varphi_3^{(1)} d_2^3 + 4d_2^2 a_2^{(1)} (1-d_2)\eta_2 + d_2(1-d_2)(3-5d_2)\eta_2^2 \right] \\ &= 3! \left[\varphi_3^{(1)} d_2^2 + 8d_2 \cdot \mathcal{R} \left[d_1 + (1-d_1)\eta_1 \right] (1-d_2)\eta_2 \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{R} (1-d_2)(3-5d_2)\eta_2^2 \right] \end{aligned}$$

トナル. 依ッテ

$$(13) \quad \mathcal{R} \frac{\Phi_2'''(0)}{3!} = \left[\varphi_3^{(1)} d_2^2 + 8d_1 d_2 (1-d_2) X_2 + (1-d_2)(3-5d_2)(2X_2^2-1) \right]$$

$$+ \boxed{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}] \equiv \varphi_3^{(2)}$$

ト表ハスコト、スル、但シコトニ、 $\boxed{(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)}$ ハ因数
 $(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$ ヲ有スル項ノ実数部ヲ表ハストスル。扱テ
 コノ $\varphi_3^{(2)}$ ニ對シ、

$$\left(\varphi_3^{(2)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=1} = 3; \quad \left(\varphi_3^{(2)}\right)_{x_1=x_2=1} = 3$$

テ

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_i} \varphi_3^{(2)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=1} = 4(1-x_i)^2 \geq 0$$

ガ $-1 \leq x_i \leq 1$ ノスベテノ x_i ($i=1, 2$)ニ對シテ成立ツ。

$1-\alpha_1, 1-\alpha_2$ ハ十々小ト考ヘテキレカラ、 $-1 \leq x_i \leq 1$,

$0 \leq 1-\alpha_i \leq 1$ ナルスベテノ x_i, α_i ($i=1, 2$)ニ對シ、

$$\Re \frac{\Phi_2'''(0)}{3!} = \Re a_3^{(2)} \leq 3$$

ガ成立ツ。但シコノ等号ハ $x_1=x_2=1$ ノトキノミニ成立ツ。

3. 一般ノ場合ヲ考ヘル。

$$\Phi_n(z) = \frac{\Phi_{n-1}(\zeta_n(z))}{\alpha_n} = z + a_2^{(n)} z^2 + a_3^{(n)} z^3 + \dots$$

トオキ、

$$\Phi_n'''(z) = \frac{1}{\alpha_n} \left[\frac{d^3 \Phi_{n-1}}{d\zeta_n^3} \left(\frac{d\zeta_n}{dz} \right)^3 + 3 \frac{d^2 \Phi_{n-1}}{d\zeta_n^2} \frac{d\zeta_n}{dz} \frac{d^2 \zeta_n}{dz^2} + \frac{d\Phi_{n-1}}{d\zeta_n} \frac{d^3 \zeta_n}{dz^3} \right]$$

扱テ、 $\Re a_3^{(n-1)} = \varphi_3^{(n-1)}$ トオキ、

$$\left(\varphi_3^{(n-1)}\right)_{\alpha_1=\alpha_2=\dots=\alpha_{n-1}=1} = 3;$$

$$\left(\varphi_3^{(n-1)}\right)_{x_1=x_2=\dots=x_{n-1}=1} = 3$$

$$\text{及ビ} \left(\frac{\partial}{\partial d_i} \varphi_3^{(n-1)} \right)_{d_1=d_2=\dots=d_{n-1}=1} = 4(1-x_i)^2 \geq 0, \\ i = 1, 2, \dots, n-1$$

ヲ assume スル。上式ヨリ

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \Phi_n'''(0) &= 3! \left[\varphi_3^{(n-1)} d_n^2 \right. \\ &\quad \left. + 4d_n \mathcal{R} a_2^{(n-1)} (1-d_n) \eta_n + \mathcal{R} (1-d_n) (3-5d_n) \eta_n^2 \right] \\ &= 3! \left[\varphi_3^{(n-1)} d_n^2 + 8d_n \mathcal{R} \{d_1 d_2 \dots d_{n-1} + (1-d_1) d_2 d_3 \right. \\ &\quad \left. \dots d_{n-1} \eta_1 + \dots + (1-d_{n-1}) \eta_{n-1} \} (1-d_n) \eta_n \right. \\ &\quad \left. + \mathcal{R} (1-d_n) (3-5d_n) \eta_n^2 \right] \end{aligned}$$

トナル。依ツテ

$$\begin{aligned} (A) \quad \mathcal{R} \frac{\Phi_n'''(0)}{3!} &= \left[\varphi_3^{(n-1)} d_n^2 + 8d_1 d_2 \dots d_n (1-d_n) x_n \right. \\ &\quad \left. + (1-d_n) (3-5d_n) (2x_n^2 - 1) \right. \\ &\quad \left. + \boxed{(1-d_i)(1-d_n)} \right] \\ &\equiv \varphi_3^{(n)} \end{aligned}$$

ト表ハスコト、スル。但シコト $= \boxed{(1-d_i)(1-d_n)}$, $i = 1, 2, \dots, n-1$ ハ因數 $(1-d_i)(1-d_n)$ ヲ有スル項ノ實數部
分ヲ表ハストスル。故、コノ $\varphi_3^{(n)} = \text{對シ}$,

$$\left(\varphi_3^{(n)} \right)_{d_1=d_2=\dots=d_n=1} = 3; \quad \left(\varphi_3^{(n)} \right)_{x_1=x_2=\dots=x_n=1} = 3$$

ナ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial d_i} \varphi_3^{(n)} \right)_{d_1=d_2=\dots=d_n=1} = 4(1-x_i)^2 \geq 0, \\ (i = 1, 2, \dots, n)$$

ガ $-1 \leq x_i \leq 1$ ノスベテノ $x_i = \text{對シテ}$ 成立ツ。

即チ, $d_1 = d_2 = \dots = d_n = 1$ ニ於テ

$$d\varphi_3^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_3^{(n)}}{\partial x_i} dx_i = \sum_{i=1}^n 4(1-x_i)^2 \geq 0$$

が如何ナル n に対シテモ成立ス。上ノ等号ハ $x_1 = x_2 = \dots$
 $\dots = x_n = 1$ ノトキノミ成立ツ。

特ニ、簡單ノタメニ、 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \alpha^*$ ノ場
 合ヲ見ルニ、先ツ

$n=2$ ノトキハ (13) ヨリ

$$\varphi_3^{(2)} = \left[\varphi_3^{(1)} \Big|_{\alpha_1 = \alpha^*} \cdot \alpha^{*2} + 8\alpha^{*2}(1-\alpha^*)x_2 + (1-\alpha^*)(3-5\alpha^*)(2x_2^2-1) \right. \\ \left. + \boxed{(1-\alpha^*)^2} \right]$$

トナリ、但シコソ $= \boxed{(1-\alpha^*)^2}$ ハ因数 $(1-\alpha^*)^2$ ヲ有スル項
 ノ実数部ヲ表ハストスル。コノトキハ

$$\left(\varphi_3^{(2)} \right)_{\alpha^*=1} = 3; \quad \left(\varphi_3^{(2)} \right)_{x_1=x_2=1} = 3$$

ニシテ、

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*} \varphi_3^{(2)} \right)_{\alpha^*=1} = 4(1-x_1)^2 + 4(1-x_2)^2 \geq 0$$

トナルガ、一般ノ場合ニハ (14) ヨリ

$$\varphi_3^{(n)} = \left[\varphi_3^{(n-1)} \Big|_{\alpha = \alpha^*} \cdot \alpha^{*2} + 8\alpha^{*2}(1-\alpha^*)x_n + (1-\alpha^*)(3-5\alpha^*)(2x_n^2-1) \right. \\ \left. + \boxed{(1-\alpha^*)^2} \right]$$

トナリ、

$$\left(\varphi_3^{(n)} \right)_{\alpha^*=1} = 3; \quad \left(\varphi_3^{(n)} \right)_{x_1=x_2=\dots=x_n=1} = 3$$

$$= \text{シテ} \quad \left(\frac{\partial}{\partial \alpha^*} \varphi_3^{(n)} \right)_{\alpha^*=1} = \sum 4(1-x_i)^2 \geq 0$$

トナリ，等号ハ $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1$ / トキ / $\equiv$ 成立ツ。
 之レ以外ノ場合ハ スベテ $-1 \leq X_i \leq 1$ / $X_i =$ 對シ，
 $\alpha^* = 1$ / 近傍即チ $\delta > 0$ ガ存在シ $0 \leq 1 - \alpha^* \leq \delta$ / $\alpha^* =$ 對
 シ

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^*} \varphi_3^{(n)} > 0$$

ガカラ，

$$\varphi_3^{(n)} \leq 3$$

トナル。此ノ様ナ $\delta > 0$ ノ近似定理ノ意見ニ選ベハ

$$1 - \alpha^* = 1 - e^{-\frac{t_0}{n}} = \delta \text{ トシ，}$$

$$t_0 = n \log \frac{1}{1-\delta}$$

トナルカラ， $n \rightarrow \infty$ ナラシメバ $t_0 \rightarrow \infty$ トナリ，近似定
 理ノ近似度ハイクラデモ高メラレル。

依テ，我々ハ

$$\mathcal{R} \frac{\Phi_n'''(0)}{3!} = \mathcal{R} a_3^{(n)} \leq 3$$

ノ處ナルコトヲ スベテ $n =$ 對シテ知リ得タ。 $n \rightarrow \infty$ ナラ
 シメテ $\mathcal{R} a_3 \leq 3$ ノ得。

§ 5. 定理 $|a_4| \leq 4$ ノ証明

コノ定理ノ証明ニ， a_3 ノ場合ト全ク同ジ論法ヲ出
 來ル。

1. $n = 1$ ノ場合

$$\Phi_1(z) = \frac{\Phi_0(\zeta_1(z))}{\alpha_1} = z + a_2^{(1)} z^2 + a_3^{(1)} z^3 + a_4^{(1)} z^4 + \dots$$

トオキ,

$$\Phi_1'''(z) = \frac{1}{\alpha_1} \left[\frac{d^3 \Phi_0}{d\zeta_1^3} \left(\frac{d\zeta_1}{dz} \right)^3 + 3 \frac{d^2 \Phi_0}{d\zeta_1^2} \frac{d\zeta_1}{dz} \frac{d^2 \zeta_1}{dz^2} + \frac{d\Phi_0}{d\zeta_1} \frac{d^3 \zeta_1}{dz^3} \right]$$

ヨリ

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(iv)}(z) = & \frac{1}{\alpha_1} \left[\frac{d^4 \Phi_0}{d\zeta_1^4} \left(\frac{d\zeta_1}{dz} \right)^4 + 6 \frac{d^3 \Phi_0}{d\zeta_1^3} \left(\frac{d\zeta_1}{dz} \right)^2 \frac{d^2 \zeta_1}{dz^2} \right. \\ & \left. + \frac{d^2 \Phi_0}{d\zeta_1^2} \left\{ 3 \left(\frac{d^2 \zeta_1}{dz^2} \right)^2 + 4 \frac{d\zeta_1}{dz} \frac{d^3 \zeta_1}{dz^3} \right\} + \frac{d\Phi_0}{d\zeta_1} \frac{d^4 \zeta_1}{dz^4} \right] \end{aligned}$$

依ツテ (8)ヲ用ヒテ

$$\begin{aligned} \Phi_1^{(iv)}(0) = & 4! \left[4\alpha_1^3 + 18\alpha_1^2(1-\alpha_1)\eta_1 + 4\alpha_1(1-\alpha_1)(5-7\alpha_1)\eta_1^2 \right. \\ & \left. + 2(1-\alpha_1)(2-8\alpha_1+7\alpha_1^2)\eta_1^3 \right] \end{aligned}$$

トナル。ソコデ

$$\begin{aligned} \kappa \frac{\Phi_1^{(iv)}(0)}{4!} = & \left[4\alpha_1^3 + 18\alpha_1^2(1-\alpha_1)\eta_1 + 4\alpha_1(1-\alpha_1)(5-7\alpha_1)\eta_1^2 \right. \\ & \left. + 2(1-\alpha_1)(2-8\alpha_1+7\alpha_1^2)\eta_1^3 \right] \\ \equiv & \mathcal{P}_4^{(1)}(X_1, \alpha_1) \end{aligned}$$

ト表ハセバ

$$(\mathcal{P}_4^{(1)})_{\alpha_1=1} = 4; \quad (\mathcal{P}_4^{(1)})_{X_1=1} = 4$$

デ,

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1} \mathcal{P}_4^{(1)} \right)_{\alpha_1=1} = 4(1-X_1)(2X_1^2 - 2X_1 + 1) \geq 0$$

ト此不等式が $-1 \leq X_1 \leq 1$ とルスベテ X_1 一對シテ成立ツ。

$1-\alpha_1$ ハ十分小ト考ヘテヨイカラ, $\delta > 0$ 十分小トリ,

$\mathcal{P}_4^{(1)}(X_1, \alpha_1)$ ノ値ヲ領域 $-1 \leq X_1 \leq 1, 0 \leq 1-\alpha_1 \leq \delta$ デ考

へレベヨイノデアルガ $\frac{\partial}{\partial \alpha_i} (X_i, \alpha_i)$ ハ $\alpha_i = \text{ツキ連続カカラ}$
 斯様ナスベテノ $X_i, \alpha_i = \text{数シ}$

$$\mathcal{R} \frac{\Phi_1^{(1V)}(0)}{4!} = \mathcal{R} a_4^{(1)} \leq 4$$

が得ラレ, コノ等号ハ $X_i = 1$ ノトキノミ成立ツ。

2. 次ニ, $n=2$ ノトキヲ考フ。

$$\Phi_2(z) = \frac{\Phi_1(\zeta_2(z))}{\alpha_2} = z + a_2^{(2)} z^2 + a_3^{(2)} z^3 + a_4^{(2)} z^4 + \dots$$

トオキ,

$$\begin{aligned} \Phi_2^{(1V)}(z) = & \frac{1}{\alpha_2} \left[\frac{d^4 \Phi_1}{d\zeta_2^4} \left(\frac{d\zeta_2}{dz} \right)^4 + 6 \frac{d^3 \Phi_1}{d\zeta_2^3} \left(\frac{d\zeta_2}{dz} \right)^2 \frac{d^2 \zeta_2}{dz^2} \right. \\ & \left. + \frac{d^2 \Phi_1}{d\zeta_2^2} \left\{ 3 \left(\frac{d^2 \zeta_2}{dz^2} \right)^2 + 4 \frac{d\zeta_2}{dz} \frac{d^3 \zeta_2}{dz^3} \right\} + \frac{d\Phi_1}{d\zeta_2} \frac{d^4 \zeta_2}{dz^4} \right] \end{aligned}$$

デアリ,

$$\mathcal{R} \left(\frac{d^4 \Phi_1}{d\zeta_2^4} \right)_0 = 4! \varphi_4^{(1)},$$

$$\left(\frac{d^3 \Phi_1}{d\zeta_2^3} \right)_0 = 3! a_3^{(1)} = 3! \left[3\alpha_1^2 + 8\alpha_1(1-\alpha_1)\eta_1 + (1-\alpha_1)(3-5\alpha_1)\eta_1^2 \right],$$

$$\left(\frac{d^2 \Phi_1}{d\zeta_2^2} \right)_0 = 2! a_2^{(1)} = 2! 2[\alpha_1 + (1-\alpha_1)\eta_1]$$

デアルカラ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R} \Phi_2^{(1V)}(0) = & 4! \mathcal{R} \left[\varphi_4^{(1)} \alpha_2^3 + 6 a_3^{(1)} \alpha_2^2 (1-\alpha_2) \eta_2 \right. \\ & + 2 a_2^{(1)} \alpha_2 (1-\alpha_2) (5-7\alpha_2) \eta_2^2 \\ & \left. + 2 (1-\alpha_2) (2-8\alpha_2+7\alpha_2^2) \eta_2^3 \right] \end{aligned}$$

トナル、ソコデ

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \Re \frac{\Phi_2^{(IV)}(0)}{4!} &= \left[\varphi_4^{(1)} d_2^3 + 18 d_1^2 d_2^2 (1-d_2) X_2 \right. \\
 &\quad + 4 d_1 d_2 (1-d_2) (5-7 d_2) (2 X_2^2 - 1) \\
 &\quad + 2 (1-d_2) (2-8 d_2 + 7 d_2^2) (4 X_2^3 - 3 X_2) \\
 &\quad \left. + \boxed{(1-d_1)(1-d_2)} \right] \\
 &\equiv \varphi_4^{(2)}
 \end{aligned}$$

ト表ハスコトナスル、但シコト、 $\boxed{(1-d_1)(1-d_2)}$ ハ因数
 $\boxed{(1-d_1)(1-d_2)}$ ヲ有トル項ノ実数部分ヲ表ハストスル。

抑テ、コノ $\varphi_4^{(2)} =$ 對シ

$$\left(\varphi_4^{(2)} \right)_{d_1=d_2=1} = 4; \quad \left(\varphi_4^{(2)} \right)_{X_1=X_2=1} = 4$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial d_i} \varphi_4^{(2)} \right)_{d_1=d_2=1} = 4(1-X_i)(2X_i^2 - 2X_i + 1) \geq 0$$

ガ $-1 \leq X_i \leq 1$ ノスベテノ X_i ($i=1, 2$) = 對シテ成立ツ。

$1-d_1, 1-d_2$ ハ十餘小ト考ヘテキルカラ、 $-1 \leq X_i \leq 1$,

$0 \leq 1-d_i \leq 1$ トナルスベテノ X_i, d_i ($i=1, 2$) = 對シ

$$\Re \frac{\Phi_2^{(IV)}(0)}{4!} = \Re a_4^{(2)} \leq 4$$

ガ成立ツ。但シコノ等号ハ $X_1 = X_2 = 1$ ノトキノミニ成立ツ。

3. 一般ノ場合ヲ考ヘル。

$$\Phi_n(z) = \frac{\Phi_{n-1}(\zeta_n(z))}{d_n} = z + a_2^{(n)} z^2 + a_3^{(n)} z^3 + a_4^{(n)} z^4 + \dots$$

トオキ、

$$\begin{aligned}\Phi_n^{(iv)}(z) = & \frac{1}{d_n} \left[\frac{d^4 \Phi_{n-1}}{d\zeta_n^4} \left(\frac{d\zeta_n}{dz} \right)^4 + 6 \frac{d^3 \Phi_{n-1}}{d\zeta_n^3} \left(\frac{d\zeta_n}{dz} \right)^2 \frac{d^2 \zeta_n}{dz^2} \right. \\ & \left. + \frac{d^2 \Phi_{n-1}}{d\zeta_n^2} \left\{ 3 \left(\frac{d^2 \zeta_n}{dz^2} \right)^2 + 4 \frac{d\zeta_n}{dz} \frac{d^3 \zeta_n}{dz^3} \right\} + \frac{d\Phi_{n-1}}{d\zeta_n} \frac{d^4 \zeta_n}{dz^4} \right]\end{aligned}$$

但、今 $\mathcal{R} a_4^{(n-1)} = \varphi_4^{(n-1)}$ トオキ、

$$\left(\varphi_4^{(n-1)} \right)_{d_1=d_2=\dots=d_{n-1}=1} = 4; \quad \left(\varphi_4^{(n-1)} \right)_{x_1=x_2=\dots=x_{n-1}=1} = 4$$

及ビ

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial}{\partial d_i} \varphi_4^{(n-1)} \right)_{d_1=d_2=\dots=d_{n-1}=1} &= 4(1-x_i)(2x_i^2 - 2x_i + 1) \\ &\geq 0, \quad i=1, 2, \dots, n-1\end{aligned}$$

ヲ assume スル。上式ヨリ

$$\begin{aligned}\mathcal{R} \Phi_n^{(iv)}(0) = & 4! \mathcal{R} \left[\varphi_4^{(n-1)} d_n^3 + 6 a_3^{(n-1)} d_n^2 (1-d_n) \eta_n \right. \\ & + 2 a_2^{(n-1)} d_n (1-d_n) (5-7d_n) \eta_n^2 \\ & \left. + 2 (1-d_n) (2-8d_n+7d_n^2) \eta_n^3 \right]\end{aligned}$$

トナル。依ツテ

$$\begin{aligned}(15) \quad \mathcal{R} \frac{\Phi_n^{(iv)}(0)}{4!} = & \left[\varphi_4^{(n-1)} d_n^3 + 18 d_1^2 d_2^2 \dots d_n^2 (1-d_n) x_n \right. \\ & + 4 d_1 d_2 \dots d_n (1-d_n) (5-7d_n) (2x_n^2 - 1) \\ & + 2 (1-d_n) (2-8d_n+7d_n^2) (4x_n^3 - 3x_n) \\ & \left. + \boxed{(1-d_i)(1-d_n)} \right] \\ & \equiv \varphi_4^{(n)}\end{aligned}$$

ト表ハスコトナル、但シコト、 $\boxed{(1-d_i)(1-d_n)}$ 、 $i=1,$

$2, \dots, n-1$ ハ因數 $(1-d_i)(1-d_n)$ ヲ有スル項ノ實

数部分ヲ表ハストスル。扱テコノ $\varphi_4^{(n)} =$ 對シ、

$$\left(\varphi_4^{(n)}\right)_{d_1=d_2=\dots=d_n=1}=4; \left(\varphi_4^{(n)}\right)_{x_1=x_2=\dots=x_n=1}=4$$

デ、

$$\left(\frac{\partial}{\partial d_i} \varphi_4^{(n)}\right)_{d_1=d_2=\dots=d_n=1}=4(1-x_i)(2x_i^2-2x_{i+1}) \geq 0, \\ (i=1, 2, \dots, n)$$

ガ $-1 \leq x_i \leq 1$ ノスベテ、 $x_i =$ 對シテ成立ツ。

即チ $d_1=d_2=\dots=d_n=1$ 於テ、

$$d\varphi_4^{(n)} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi_4^{(n)}}{\partial d_i} dd_i = \sum_{i=1}^n 4(1-x_i)(2x_i^2-2x_{i+1}) \geq 0$$

ガ如何ナル $n =$ 對シテモ成立ス。上ノ等号ハ $x_1=x_2=\dots=\dots=x_n=1$ ノトキノミ成立ツ。

特ニ、簡單ノタメニ、 $d_1=d_2=\dots=d_n=d^*$ ノ場合ヲ見ルニ、今ノ一般ノ場合ニハ (15) ヨリ

$$\varphi_4^{(n)} = \left[\varphi_4^{(n-1)} \cdot d^{*3} + 18d^{*2}(1-d^*)x_n + 4d^{*n}(1-d^*)(5-7d^*)(2x_n^2-1) \right. \\ \left. + 2(1-d^*)(2-8d^*+7d^{*2})(4x_n^3-3x_n) \right. \\ \left. + \boxed{(1-d^*)^2} \right]$$

トナリ、 $\boxed{(1-d^*)^2}$ ハ因数 $(1-d^*)^2$ ヲ有スル項ノ實數部
分ヲ表ハストスル。而シテ

$$\left(\varphi_4^{(n)}\right)_{d^*=1}=4; \left(\varphi_4^{(n)}\right)_{x_1=x_2=\dots=x_n=1}=4$$

ニシテ

$$\left(\frac{\partial}{\partial d^*} \varphi_4^{(n)}\right)_{d^*=1} = \sum_{i=1}^n 4(1-x_i)(2x_i^2-2x_{i+1}) \geq 0$$

トナリ，等号ハ $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 1$ / トキノミ成立
 ヲ。之レ以外ノ場合ニハ，スベテノ $-1 \leq X_i \leq 1$ / $X_i =$
 對シ $\alpha^* = 1$ / 近傍即チ $\delta > 0$ が存在シ $0 \leq 1 - \alpha^* \leq \delta$ /
 $\alpha^* =$ 對シ

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^*} \mathcal{P}_4^{(n)} > 0$$

ガカラ，

$$\mathcal{P}_4^{(n)} \leq 4$$

トナル。此ノヤウナ $\delta > 0$ ナ近似定理ノ意見ニ選ベバ，
 $1 - \alpha^* = 1 - e^{-\frac{t_0}{n}} = \delta$ トシ，

$$t_0 = n \log \frac{1}{1-\delta}$$

トナルカラ， $n \rightarrow \infty$ ナラシメバ $t_0 \rightarrow \infty$ トナリ，近似定
 理ノ近似度ハイクラデモ高メラレル。

依ツテ，我々ハ

$$\mathcal{R} \frac{\Phi_n^{(IV)}(0)}{4!} = \mathcal{R} a_4^{(n)} \leq 4$$

ノ真ナルコトヲ、スベテノ $n =$ 對シテ知り得タ。 $n \rightarrow \infty$ ナ
 ラシメテ $\mathcal{R} a_4 \leq 4$ ナ得。

References.

- [1] Bieberbach, Sitzungsber. der preuss.
 Ak. der Wiss., Math. Phys.
 Klasse, (1916), 940-955.

- [2] Löwner, *Math. Annalen*, 89(1923), 103-121.
 - [3] Basilewitch, *Recueil Mathématique*, 43(1936), 211-228.
 - [4] Peschl, *Jour. für Math.*, 176(1936), 61-94.
 - [5] Joh, *Proceeding of Phys.-Math. Soc.* 20
(1938), 591-610
-