



Title	Zerfallungsgruppen ノ存在ニツイテ
Author(s)	関, 武次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 210, p. 49-53
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74835
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

905. Zerfallungsgruppen, 存在 = ツイテ

関 武 次 郎 (東京物理学校)

群 $\mathcal{N}$ ト $\mathcal{F}$ ヲ與ヘルトキ $\mathcal{O}_f/\mathcal{N} \cong \mathcal{F}$ ナル群 $\mathcal{O}_f$ ヲ求
メル問題, 即チ群ノ Erweiterungstheorie = 次
ノ Artin ノ定理ガアリマス。(例ヘバ Zassenhaus;
Lehrbuch der Gruppentheorie I 98頁)

定理 (Artin) 群 $\mathcal{O}_f$ ガ abelscher Normal-
teiler $\mathcal{N}$ ヲ有スルトキハ, $\mathcal{N}$ = 開スル $\mathcal{O}_f$ ノ Zerfäll-
lungsgruppe $\overline{\mathcal{O}_f}$ ガ存在スル, 即チ

$$\mathcal{O}_f = \sum \mathcal{N} S_\sigma, \quad \sigma \in \mathcal{F}, \quad \mathcal{O}_f/\mathcal{N} \cong \mathcal{F}$$

トスルトキ, 次ノ條件ヲ満足スル $\overline{\mathcal{O}_f}$ ガ存在スル。

i) $\overline{\mathcal{O}_f}$ ハ $\mathcal{O}_f$ ヲ含ム。

ii) $\overline{\mathcal{O}_f}$ ハ Normalteiler $\overline{\mathcal{N}}$ ヲ有シ, $\overline{\mathcal{N}}$ ハ $\mathcal{N}$ ヲ
含ミ且ツ $\overline{\mathcal{O}_f} = \sum \overline{\mathcal{N}} S_\sigma$

iii) $\overline{\mathcal{O}_f} = \overline{\mathcal{N}} \cdot \overline{\mathcal{F}} \quad \text{茲ニ} \quad \overline{\mathcal{F}} \cong \mathcal{F} \quad \overline{\mathcal{N}} \cap \overline{\mathcal{F}} = 1$

コノ Artin ノ定理ノ中デ, $\mathcal{N}$ ガ abelsch トイフ條件
ヲ省イテモ, 矢張り成立スルコトガ、次ノ如ク簡單ニ証明出
来ルノデスガ, コノヤウナ証明法ハ何処カ他ニアルデセウ
カ御存知ノ方ガアリマシタラ, 教ヘテ戴キタイト思ヒマ
ス。

(証明) 一般ニ $\mathcal{N}$ ト $\mathcal{F}$ ヲ與ヘルトキ $\mathcal{O}_f/\mathcal{N} \cong \mathcal{F}$
ナル如キ群 $\mathcal{O}_f$ ハ次ノ三條件ヲ満足スル $\mathcal{N}$, Automor-

phism S_σ (但し $\sigma \in \mathcal{F}$ トスル) 及ビ $\mathcal{R}$, Element
 1 System (即チ Faktor-system) $C_{\sigma, \tau} = \exists$ 一意的ニ決定サレル。(Zassenhaus 90頁)

$$X, Y \in \mathcal{R} \quad \sigma, \tau \in \mathcal{F} \text{ トスルトキ}$$

$$\text{I} \quad (XY)^{S_\sigma} = X^{S_\sigma} Y^{S_\sigma}$$

$$\begin{aligned} \text{II} \quad (X^{S_\tau})^{S_\sigma} &= X^{S_\sigma S_\tau} = (X^{S_{\sigma\tau}})^{C_{\sigma, \tau}} = X^{C_{\sigma, \tau} S_{\sigma\tau}} \\ &= C_{\sigma, \tau} X^{S_{\sigma\tau}} C_{\sigma, \tau}^{-1} \end{aligned}$$

$$X^{S_1} = X^{C_{1,1}}$$

$$\text{III} \quad C_{\sigma, \tau} C_{\sigma\tau, \rho} = C_{\tau, \rho}^{S_\sigma} C_{\sigma\tau\rho}$$

而シテコノトキ $\mathcal{O} = \sum \mathcal{R} S_\sigma$, $S_\sigma S_\tau = C_{\sigma, \tau} S_{\sigma\tau}$ トナル。

逆ニ群 $\mathcal{O}$ の Normalteiler $\mathcal{N}$ トシ $\mathcal{O}/\mathcal{N} \cong \mathcal{F}$,

$\mathcal{O} = \sum \mathcal{R} S_\sigma$, $\sigma \in \mathcal{F}$ $S_\sigma S_\tau = C_{\sigma, \tau} S_{\sigma\tau}$, $C_{\sigma, \tau} \in \mathcal{R}$
 トオケバ Vertretersystem $\{S_\sigma\}$ 及ビ Faktor-system $\{C_{\sigma, \tau}\}$ ハ上ノ I, II, IIIヲ満足スル。

サテ假定ニヨリ $\mathcal{O}/\mathcal{N} \cong \mathcal{F}$ トナル故, 上記ノ I, II, IIIヲ満足スル $\{S_\sigma\}$, $\{C_{\sigma, \tau}\}$ が存在スル。今コノ $C_{\sigma, \tau}$ ヲ用ヒテ

$$\text{I}' \quad (XY)^{A_\sigma} = X^{A_\sigma} Y^{A_\sigma} \quad X, Y \in \mathcal{R}$$

$$\text{II}' \quad (X^{A_\tau})^{A_\sigma} = X^{A_\sigma A_\tau} = (X^{A_{\sigma\tau}})^{C_{\sigma, \tau}} = X^{C_{\sigma, \tau} A_{\sigma\tau}}$$

$$X^{A_1} = X^{C_{1,1}}$$

$$\text{III}' \quad C_{\sigma, \tau} C_{\sigma\tau, \rho} = C_{\tau, \rho}^{A_\sigma} C_{\sigma, \tau\rho}$$

=ヨリ $\mathcal{H}$ の Erweiterung ヲ作り之ヲ $\overline{\mathcal{H}}$ トスレバ $\overline{\mathcal{H}}$ へ抽象的ニハ $\mathcal{O}$ ト全ク同一ノモノトナル。

今 $\sigma \in \mathcal{H}$ トスルトキ S_σ^* ヲ $\overline{\mathcal{H}}$, Automorphism トシテ次ノ如ク定義ス。

$$X \in \overline{\mathcal{H}} \text{ トスルトキ } X^{S_\sigma^*} = A_\sigma X A_\sigma^{-1} = X^{A_\sigma}$$

然ルトキハ $X, Y \in \overline{\mathcal{H}}$ トスルトキ

$$\text{I}'' \quad (XY)^{S_\sigma^*} = (XY)^{A_\sigma} = X^{A_\sigma} Y^{A_\sigma} = X^{S_\sigma^*} Y^{S_\sigma^*}$$

$$\text{II}'' \quad (X^{S_\tau^*})^{S_\sigma^*} = X^{S_\sigma^* S_\tau^*} = (X^{A_\tau})^{A_\sigma} = X^{A_\sigma A_\tau}$$

$$= X^{C_{\sigma, \tau} A_\sigma} = (X^{A_\sigma})^{C_{\sigma, \tau}} = (X^{S_{\sigma\tau}^*})^{C_{\sigma, \tau}} = X^{C_{\sigma, \tau} S_{\sigma\tau}^*}$$

$$X^{S_{1,1}^*} = X^{A_1} = X^{C_{1,1}}$$

$$\text{III}'' \quad C_{\sigma, \tau} C_{\sigma\tau, \rho} = C_{\tau, \rho}^{A_\sigma} C_{\sigma, \tau\rho} = C_{\tau, \rho}^{S_\sigma^*} C_{\sigma, \tau\rho}$$

トナルカラ, コノ I'', II'', III'' ヲ用ヒテ $\overline{\mathcal{H}}$ ノ一ツノ Erweiterung ヲ得ル。之ヲ $\overline{\mathcal{O}}$ トスレバ

$$\overline{\mathcal{O}} = \sum \overline{\mathcal{H}} S_\sigma^* \quad \sigma \in \mathcal{H}$$

ト書ケル。且ツ I'', II'', III'' = 於テ X, Y ヲ特ニ $\mathcal{H}$ ノ元ト

考ヘレバ $\mathcal{H}$ ノ一ツノ Erweiterung $\mathcal{O}^* = \sum \mathcal{H} S_\sigma^*$ ヲ

得ルガ明カラカニ $S_\sigma^* \Leftrightarrow S_\sigma = \text{ヨリ } \mathcal{O}^* \cong \mathcal{O} \text{ デアルカラ}$

$\overline{\mathcal{O}}$ ハ $\mathcal{O}$ ヲ含ムト考ヘテ差支ナイ。依ツテ以下 S_σ^* , 代リニ S_σ ト書クコトトスル。

然ルトキハ $\overline{\mathcal{O}}$ ハ $\mathcal{O}$ ヲ含ミ且ツ $\mathcal{O} = \sum \mathcal{H} S_\sigma$,

$$\overline{\mathcal{O}} = \sum \overline{\mathcal{H}} S_\sigma$$

$$X = T_\alpha = A_\alpha^{-1} S_\alpha$$

トスレバ $\{T_\alpha\}$ は $\overline{G}/\overline{H}$, *Vertrętersystem* = $\forall \tau$

$$\begin{aligned} T_\alpha T_\tau &= A_\alpha^{-1} S_\alpha A_\tau^{-1} S_\tau = A_\alpha^{-1} (S_\alpha A_\tau^{-1} S_\alpha^{-1}) S_\tau S_\tau \\ &= A_\alpha^{-1} (A_\alpha A_\tau^{-1} A_\alpha^{-1}) S_\alpha S_\tau \quad (\text{定義=ヨル}) \\ &= (A_\alpha A_\tau)^{-1} (S_\alpha S_\tau) = (C_{\sigma, \tau} A_{\alpha\tau})^{-1} (C_{\sigma, \tau} S_{\alpha\tau}) \\ &= A_{\alpha\tau}^{-1} S_{\alpha\tau} = T_{\alpha\tau} \end{aligned}$$

トナルカラ $\{T_\alpha\}$ は $\overline{H}$ ト *isomorph* ナル群 $\overline{H}$ ヲ作
ル。

$$\text{又明ラカ} = \overline{H} \cap \overline{F} = 1$$

依ツテ 定理ハ完全ニ証明サレタ。

系 1 上ニ証明シタ $\overline{G} = \overline{H} \overline{F}$ ハ *direkte Produkt*
 $\overline{G} = \overline{H} \times \overline{F}$ トナル。

(証明) $X \in \overline{H}$ トスレバ

$$\begin{aligned} T_p^X &= X A_p^{-1} S_p X^{-1} = X A_p^{-1} (S_p X^{-1} S_p^{-1}) S_p = X A_p^{-1} (A_p X^{-1} A_p^{-1}) S_p \\ &= A_p^{-1} S_p = T_p \end{aligned}$$

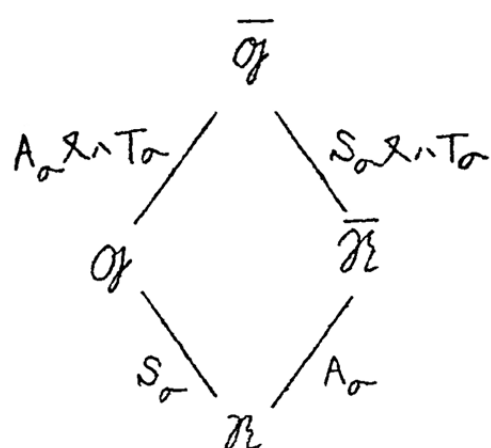
一般ニ $\overline{G}$, 元ハ $X T_\alpha$ ($X \in \overline{H}$) ト書ケルカラ

$$T_p^{X T_\alpha} = (T_\alpha T_p T_\alpha^{-1})^X = T_{\alpha p \alpha^{-1}}^X = T_{\alpha p \alpha^{-1}}$$

依ツテ $\overline{F}$ は $\overline{G}$, *Normalteiler* ナル。 $\overline{H} \neq \overline{G}$
normalteiler ナ $\overline{H} \cap \overline{F} = 1$, $\overline{G} = \overline{H} \overline{F}$ ナル故
 $\overline{G} = \overline{H} \times \overline{F}$ ナル。

系2. $\overline{O_f} = O_f \overline{F}$

特 = F が abelsch + ラバ O_f は $\overline{O_f}$ の Normalteiler
トナリ、従ッテ又 $\overline{O_f} = O_f \times F$ トナル。 $\mathcal{N}$, $\overline{\mathcal{N}}$, O_f , $\overline{O_f}$ 及
ビッ / Vertretersystem を図示スレバ左ノ如クナル。



(証明) O_f の元素ハ $XA_\alpha T_\alpha$ ($X \in \mathcal{N}$)

ト書ケルガ

$$\begin{aligned} XA_\alpha T_\alpha &= XS_\alpha (A_\alpha^{-1} S_\alpha)^{-1} T_\alpha \\ &= XS_\alpha T_\alpha^{-1} T_\alpha \\ &= XS_\alpha T_\alpha^{-1} \end{aligned}$$

$$XS_\alpha \in O_f$$

デアアルカラ

$$\overline{O_f} = O_f \overline{F}$$

ス系1 = 証明シタ如ク T_p ト $\overline{\mathcal{N}}$ の元素トハ可換デアアル
カラ

$$\begin{aligned} T_p^{S_\alpha} &= T_p^{A_\alpha T_\alpha} = (T_\alpha T_p T_\alpha^{-1})^{A_\alpha} \\ &= T_{\alpha p \alpha^{-1}}^{A_\alpha} = T_{\alpha p \alpha^{-1}} \end{aligned}$$

$$F \text{ が abelsch + ラバ } S_\alpha T_p S_\alpha^{-1} = T_p$$

$$\therefore S_\alpha^{T_p} = S_\alpha$$

従ッテ O_f は $\overline{O_f}$ の Normalteiler トナリ且ッ $\overline{O_f} = O_f \times \overline{F}$
トナル。

(昭和十六年一月)