



Title	ふろべにうす多元環ニツイテ補足（一） [右右ノいでやる束ガ逆同型ナ環ニツイテ]
Author(s)	中山, 正
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 210, p. 56-62
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74837
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

907. ふるべにうす多元環ニツイテ補足(一)

[右右, いでやる束が逆同型ナ環ニツイテ]

中山 正 (阪大)

主定理ノ逆ヲ少し違フ観点カラ見ル. 結果ハソレト互ニ相補ツヲ孰レモ他ヲ含マヌ.

A ヲアル体 F ノ上ノ多元環トスル. A ガノヲ有シ且ツソノ左及び右ノ正規表現 $L(a), R(a), (a \in A)$ ガ互ニ同値ナル時 A ヲふるべにうす環 (F 環ト略)トヨブ. 少し弱ク, ノヲ有シ且ツ $L(a)$ ト $R(a)$ ノ中ノ直既約成分ガ重複度ヲ除ケバ一致スル場合ニハ A ヲ準 F 環トヨブ. *Ann. Math.* 40ノ論文 (以下 Part I ト略) デノ最も主ノ結果ハ次ノコトデアッタ: A ガ準 F 環デアレバ, 相殺関係ガ左右いでやるノ間ノ一対一 対応ヲ與ヘル. 即チ, A ノ部分集合 $S =$ 左カラ乗ジテ $0 =$ ナル元ノ集合ヲ $\ell(S)$, 右カラ $0 =$ スルノヲ $r(S)$ トカケバ

$$\alpha) \quad \ell(r(\ell)) = \ell, \quad r(\ell(r)) = r$$

ガスベテノ左いでやる ℓ , 右いでやる r ニ成立ツ. 逆ニ上ノ関係ガスベテノ巾零單純 左又ハ右いでやる及び根基 N , 零いでやるニ對シテ成立ツトラバ A ハ準 F 型ナル. 更ニ A ガ眞ニ F 型トラバ $\alpha)$ ヨリ強ク

$$\begin{aligned} \beta) \quad (\ell:F) + (r(\ell):F) &= (A:F) \\ &= (r:F) + (\ell(r):F) \end{aligned}$$

ガ成立ツ. 逆ニ $\alpha), \beta)$ ガ上ニ述ベタ如キいでやるニツキ成

立ッナラ A は F 環デアル。

コノ逆ノ方ハ弱メテ、スベテノいでやる = ツキ α) が、
又ハ β) が成立ット假定スレバ勿論成立ッ。然ラバ、今
度ハ上ノ如ク相殺関係デト規定セズ、單ニ左右いでやるノ間
ニ一對一對應ガアリ $\supseteq$ が $\subseteq$ = ナルトシタ場合ハ如何？ 答
ハ肯定的、即チ

定理 A ノ 左いでやるノ + ス 束ト 右いでやるノ + ス
束トガ互ニ逆同型ナラバ A は 準 F 環デアル。更ニソノ逆同
型デ對應スル左右いでやるノ (F = 対スル) 階數ノ和ガ A
ノ階數ニ一致スル (即チ階數ガ *dual*) ナラバ A は F 環デ
アル。

上ニ述ベタ定理ノ前半ト組合セテ

定理 A ノ 左右いでやる束ノ間ニトモカク 一ツノアル
逆同型ガアレバ、實際相殺関係デモ逆同型が生ズル。更
ニ對應スル左右いでやるノ階數ガ *dual* ナル如キ逆同型
ガアルナラバ、相殺関係モマタソノ如クナ逆同型ヲ與ヘ
ル。

トモカク以上デ 左右いでやる束ガ逆同型ナル如キ多元
環ガスッカリ特徴ヅケラレタワケデアル。ナホ、コレヲノコ
トハ實ハ多元環ニカギラズ、最小條件ヲミタス環ニツイテ(ソ
ノ場合ノ F 環、準 F 環、及び階數ノ代用品ニツイテハ近刊
ノ Part II (Ann. Math.) ヲ参照サレタイ) モ同様ニ
成立ッ。

以上ノ定理ノ証明ハ、ハジメニ述ベタ定理ノ逆ノ部分ヨ

リムシロ簡單デアル。(両方ノ結果ハドレモ他ヲ覆ツテハオ
ナイ). 而シテ事實次ノヨリ 強イ定理が成立ツ。

定理 A ノ完全可約左いでやるノナス束が A ノ根基 N
ヲフクム右いでやるノナス束ト逆同型デアリ、マタソノ左右
トリカヘタコトが成立ツナラバ A ハ準 F 環デアル。更ニソレ
ヲノ逆同型ニ於テ對應スル左右いでやるが *dual* + 階數ヲモ
ツナラバ A ハ F 環デアル。

(N ヲフクム 右いでやるトハ即チ最大右いでやるノ截
分ニナルモノデアルカラ *abehn* = 完全可約ト云フベキデア
ラウ)

証明 タメニ寸複習. A ヲ任意ノ多元環, N ヲソ
ノ根基トシ, $e_{k,i}$ ($k=1, 2, \dots, k; i=1, 2, \dots, f(k)$)
ヲ互ニ直交スル原始巾等元ノ系ヲ最大ノモノトスル。タゞ
シ添字ハ $Ae_{k,i}$ ト $Ae_{k,j}$ ノ左いでやるハ k ト入ガ同ジ
トキ且ツソノトキニ限ツテ作用同型ナル如クトツテアルトス
ル。然ラバ 右いでやるニツイテモ同ジコトが成立ツ。更ニ
マタ N デノ剩餘系ニウツテ $\bar{A}e_{k,i}, \bar{A}e_{k,j}$ ノ單純
加群ニツイテモ同ジデアル。Part I デ 次ノ補題ヲ証明
シタ。(實ハコレが表現論カラ構造論ヘウツル糸デアル)

補題 A ハ I ヲ有スルトスル。 A ガ準 F ナルタメニ
ハ次ノ如キ ($1, 2, \dots, k$)ノ置換 ($\pi(1), \pi(2), \dots$
 $\dots, \pi(k)$)ノ存在が必要且ツ充分:

- i) $e_{k,1}$ A ハ唯一ノ單純部分右いでやる $e_{k,1}$ ヲ有シ,
且ツソレハ $\bar{e}_{\pi(k),1} \bar{A}$ = 同型

ii) $Ae_{\pi(k),i}$ は唯一、単純部分左いでやる $\ell_{\pi(k),i}$ があり、且つそれが $\bar{A}\bar{e}_{k,i}$ と同型。

更 = F環デアレタメ (= i), ii) / 外 = 更 =

iii) $f(k) = f(\pi(k))$

ヲミタスコトが必要且つ充分デアル。

次 =、次ノ補題ハ Part II デ証明シタガース順序が転倒シタ急ガアルカラ繰返ス。

補題 上ノ定義デ ii) ノ最後ノ條件ハ除イテモヨイ。

即チソレハ i) 及ビ、ii) ノ前半カラ出ル。

証明: $\ell(N)$, $r(N)$ ハ勿論共ニ両側いでやるデア
ル $\ell(N) = \sum e_{k,i} \ell(N)$ デアリ、コノ $= e_{k,i} \ell(N)$
 $= e_{k,i} A \cap \ell(N)$ ハ $e_{k,i} A$ ノ最大完全可約部分右い
でやるデアル。 ($\ell(N)$ ハ A ノ最大ノ完全可約右いでやる
デアル)。故ニソレハ假定i) カラ単純デ且つ $\bar{e}_{\pi(k),i}$ $\bar{A}$ ト
同型、故ニ $e_{k,i} \ell(N) = e_{k,i} \ell(N) E_{\pi(k)}$ (タジシ
 $E_{\pi(k)} = \sum_i e_{\pi(k),i}$) デアルガ $\lambda \neq \pi(k)$ ナル E_λ
ヲカケレバ $0 =$ ナル。ヨッテ $E_k \ell(N) E_\lambda$ ハ $\lambda = \pi(k)$
ノトキ $E_k \ell(N)$ デアリ、ソウデナケレバ 0 。故ニ今度ハ
 k ノオヲウゴカシテ

$$\begin{aligned} \ell(N) E_{\pi(k)} &= \sum_{\mu} E_{\mu} \ell(N) E_{\pi(k)} \\ &= E_k \ell(N) E_{\pi(k)} = E_k \ell(N) \end{aligned}$$

トナル。スナハチコノ等式ノ両辺ハ両側いでやるデアル。

更ニコレガ単純ナルコトアイフ。ソノタメ d ヲソノ任意ノ
元 ($\neq 0$) トスル。 $d = \sum_i e_{k,i} d$ デルケモーツノ

$e_{k,i} d$ が $\neq 0$.

例へばソレヲ $e_{k,p} d$ トスル. シカラベ $e_{k,p} d A = e_{k,p} l(N)$ デアル. ナゼナラ右辺ハ單純右いでやる
デカラ. ヨツテ $A d A = A e_{k,p} l(N) \supseteq E_k l(N)$ (ナ
ゼナラ $e_{k,q} = C_{k,qp} e_{k,p}$ ナル $C_{k,qp}$. (行列單位
ノ系) ガアルカラ). 即チコレハ我々ノ $E_k l(N)$ ナル両
側いでやるガ單純ナコトデアル. ヨツテ特ニソレハ左いでや
るトシテモ完全可約デアル. (ナゼナラ, ソノ最大完全可約
部分左いでやるハ両側いでやるナルコトガ容易ニ分ルカラ)
ソレハ $E_k l(N)$ ガ $\gamma(N)$ = 含マレル事デアル. k = 任意デ
カラ $l(N) \subseteq \gamma(N)$.

ii) ノ前半 = ヨル $l_{\pi(k),1}$ ハ 唯一ノ 單純部分左いでや
るデカラ最大完全可約部分左いでやる $\gamma(N) e_{\pi(k),1}$ ト
一致スル. 故ニ $e_{k,1} l_{\pi(k),1} = e_{k,1} \gamma(N) e_{\pi(k),1}$ デ
アリ, コレハ上記ニヨリ $\supseteq e_{k,1} l(N) e_{\pi(k),1}$. コレハ
 $= e_{k,1} e_{\pi(k),1} \neq 0$. (條件 i) 故ニ $l_{\pi(k),1} \cong \bar{A} e_{k,1}$
デナケレバナラス. 即チ ii) ノ後半が出タ.

ナテ, 定理ノ証明ハ容易: 完全可約左いでやるノナス
束ヲ Λ , 根基 N ヲフクム (即チ $oben$ = 完全可約ナ) 右い
でやるノ束ヲ P トスル. 仮定ニヨリソノ両ニ逆同型ガアル.
コレ等ノ束ハ modular 且ツ Complemented デアル
ガ, ソノ中ノ独立ナ原子ノ數ヲカゾヘル. P = オイテハソレ
ハ $\bar{A} = A/N$ ノ独立ナ右いでやるノ數. 即チ $\sum f(k)$ デ
アル. Λ = ツイテシラベルタメ A ヲ 直和

$$A = Ae_{1,1} + Ae_{1,2} + \dots + Ae_{k,f(k)} + l_0$$

ト分解スル (コゝ l_0 ハ根基 = フクマレタアル左いでやる
デアル). $\sum f(k)$ 個各左いでやる $Ae_{k,i}$ ガ 少クモ 一ツ
ノ單純左いでやる, 即チ $\wedge$ ノ原子ヲ有シ、ソレ等ハ独立デ
アル。ヨツテ $\wedge$ = オケル数ト一致スルノダカラソレハ丁度
一ツ、即チ唯一ツデアリ、シカモ l_0 ハ消ヘテシマハネバ
ナラナイ。即チ iii) ノ前半ハステ = 云ヘタ。

ソノ唯一ツノヲ $l_{k,i}$ デアラハス。シカラバ同ジ $k =$
属スルソレラガ同型ノコトハ明カダガ、更ニ違フ $k =$ 對ス
ルモノハ同型デナイコトライフ、ソレニハ $\wedge$ 及ビ P ヲ
(irreducible) + 「射影幾何」ニ分解スル数ヲカゾ
ヘル。

ソレハ互ニ背景的デナイ原子ノ數デアアル、シカルニニ
ツノ單純左いでやるノ共ハソレラガ同型ノトキ、且ツソノ時
ニカギリ第三ノソレヲ含ミ、從ツテ配景的デアアル。ヨツテ上
記ノ數ハ $\wedge$ デハ高々 k デアリ、 P デハ丁度 k デアル、故
ニ $\wedge$ デモ丁度デアリ、シタガツテ違フ $k =$ 對スル $l_{k,i}$ ハ
同型デナイ。

全然同様ノコトガ左右トリカヘテイヘル。故ニ上ノ補題
カラ A ガ準 F 環デアアル、(單位元 1 ノ存在ハ $l_0 = 0$ 及ビソ
レト同様ナ $0 = 0$ カラ)

次ニ更ニ對應スル左右左いでやるノ階數ガ dual ト
スル。

$\wedge$ ト P ノ逆同型ヲ $\sigma: l \rightarrow \pi = \sigma(l) \quad (l \in \wedge)$ デ

表ハサウ。

今 $\gamma(N)E_{\pi(k)}$ を考へル。既ニ知ルゴトク、コレハ $\overline{A}\overline{e}_k \cong \gamma(N)e_{\pi(k),1}$ ト同型ト單純左いでやるスベテノ和デアアル。

即チ $\gamma(N)e_{\pi(k),1} = \ell_{\pi(k),1}$ ト配景的ト原子全部ノ和デアアル。故ニソレニ對應スル $\sigma(\gamma(N)E_{\pi(k)})$ ハトモカク A/σ が互ニ同型ナル如キ最大右いでやる σ ノトスアル最大ノ系ノ截合デアアル。スナハチ適當ト入ヲトレバ $N \cup (1-E_\lambda)A$ トナル。シカルニ $\gamma(N)E_{\pi(k)}$ ハ上述ニヨリ $f(\pi(k))$ 個ノ独立ト原子ノ和デアアル。他方 $N \cup (1-E_\lambda)A$ ハ $f(\lambda)$ 個ノ *open* = 独立ト最大元ノ截合デアアル。故ニ $f(\lambda) = f(\pi(k))$ トナル。

シカルニ假定ヨリ

$$\begin{aligned} f(k) \cdot f(\pi(k)) \cdot (\overline{e}_k, \overline{A}\overline{e}_k : F) &= (\gamma(N)E_{\pi(k)} : F) \\ &= (A/\sigma(\gamma(N)E_{\pi(k)}) : F) \\ &= (A/(N \cup (1-E_\lambda)A) : F) \\ &= f(\lambda)^2 \cdot (\overline{e}_\lambda, \overline{A}\overline{e}_\lambda : F) \end{aligned}$$

デアアル (第一ノ等号カ假定)、故ニ併セレバ $f(k) = f(\pi(k))$ トナル。何故ナラ $\overline{e}_k, \overline{A}\overline{e}_k$ ト $\overline{e}_\lambda, \overline{A}\overline{e}_\lambda$ ハ同型。ナセナラ一方ノ歪体ノ射影幾何ニ逆同型ト射影幾何ノ係数歪体ニ逆同型デカラデアアル。コレデ iii) モ出来テ、 A ガ F 環デアアル。