



Title	一ツノ抽象積分ニ就テ
Author(s)	河田, 敬義
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 210, p. 63-75
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74838
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

908. ツノ抽象積分 = 就テ

河田 敬 義 (東大)

確率論ヲ stochastic process ヲ取扱フトキニ,
Khintchine ハ任意ノ parameter t ($0 \leq t \leq 1$)
ヲ有スル確率変數 $\{x_t\}$ カラ, 無難作ニソノ積分
 $\int_0^1 x_t dt$, ソノ平均値ノ關係 $\int_0^1 x_t dt = \int_0^1 \bar{x}_t dt$ 等ヲ
用ヒタ。(Korrelations-theorie der stationäre
stochastische Prozesse, Math. Ann. 108).

Doob ハ之レ等ノ議論ガ全ク一般ニハ成立シナイコ
ト, 其レガ許サレルノハ $\{x_t\}$ ガ所謂 measurable
stochastic process ノ場合ニ限ルコトヲ主張シタ。
此処デハ全ク別ノ立場カラ, 直接ニアル確率ノ場ニ於ケル
確率変數ノ空間 (即チ S -空間) ヲ考ヘテ, 其処デノ積分
ヲ抽象的ニ取扱ツテ見タイト思ヒマス。

確率論ノ場合ト直接ニ關係スルヌウニ公理等ヲ選ビマシ
タノデ, S 空間ノ値ヲ取ル積分トシテハ, マヅイモノニナッ
テ終ヒマシタ。皆様ノ御教示ヲオ願ヒ致シマス。(以下
G. Birkhoff: Theory of Lattice ヲ L トシテ
引用シマス。)

§ 1

先ヅ L ヲ σ -complete vector lattice (L ,
p. 105) トスル。即チ

1) L ハ real. linear space \mathcal{T} , partially

order が與へられテキテ, $\vee \wedge = \exists$ lattice
ヲ作り.

2) $\mathcal{L} \ni f \geq 0, \lambda \geq 0$ (λ : real number) +
バ $\lambda f \geq 0$.

3) $f \geq 0, g \geq 0$ + トラバ $f + g \geq 0$.

4) 一般 = $f \geq g$ \wedge $f - g \geq 0$ ト等値.

次 = \mathcal{L} \wedge 單位元 $e > 0$ \exists 含ムトスル。即チ

5) 任意 $\mathcal{L} \ni a > 0 =$ 對シテ $e \wedge a > 0$

以上ヲ直チ $x^+ = x \wedge 0, x^- = (-x) \wedge 0$ トス
レバ, $x = x^+ - x^-$. 又 $|x| = x^+ + x^-$ ト定メレバ,

$$|\lambda x| = |\lambda| |x|, |x + y| \leq |x| + |y|.$$

又, n \exists 自然數トスルトキ $x^{(n)} = x \wedge n e$ ト置ケバ

5) 1) 性質カラ

$$\mathcal{O} - \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(n)} = x$$

$\Rightarrow = \mathcal{O} - \lim$ \wedge order topology = \exists 極限
(L. p. 112) \exists 示ス。

Def. $\mathcal{L} \ni x$ が e -bounded トハ適當 $+ N$ (自
然數) = 對シテ $|x| \leq N e$ + ルコトヲ云フ。

Axiom I. e -bounded + 元 $x =$ 對シテ \wedge 実平
均値 \bar{x} が定マリ, x, y 共 = e -bounded + ルトキ \wedge

$$\begin{cases} \overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}, \\ \overline{\lambda x} = \lambda \cdot \bar{x} \\ x \geq y \text{ + トラバ } \bar{x} \geq \bar{y} \end{cases}$$

ヲ満足スル ε ノトスル。

Axiom II. $\mathcal{L} \ni x_n \geq 0$ ガスベテ ε -bounded
 デ且ツ $n = \infty$ ツイテ單調増加デアルトスル。

若シ $\varepsilon \in \{x_n\}$ ガ bounded デトイテラバ (即チス
 ベテノ $n = \infty$ 對シテ $x_n \leq a$ +ル $a \in \mathcal{L}$ ガ存在シトイテ
 ラバ)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n} = \infty.$$

(注意) Axiom II ハ余リ面白い條件デトイテ、若シモ
 Axiom I デ、 $x > y$ +ラバ $\overline{x} > \overline{y}$ ト條件ヲ強メテオクテラ
 バ、Axiom II ハ所謂 "vollkommen" +ル條件 ($\mathcal{L} \ni a_n$,
 $|a_n| \wedge |a_m| = 0$, $n \neq m$ +ラバ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ガ存在スル) カ
 ラ得ラバ。

§ 2

\mathcal{L} ノ部分空間 \mathcal{L}_1 7, $\mathcal{L}_1 \ni x = x_+ - x_-$ ガ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{(x_{\pm} \wedge ne)} < \infty$$

+ル全体トスル。其ノトキ $\overline{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{(x_+ \wedge ne)} - \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{(x_- \wedge ne)}$ ト置ク。

(i) \mathcal{L}_1 ハ linear subspace トナリ、 $x \rightarrow \overline{x}$ ハ
 positive linear functional トナル。

(証) $\mathcal{L}_1 \ni x, y \geq 0$ トスルバ

$$\begin{aligned} (x+y) \wedge ne &\leq (x \wedge ne) + (y \wedge ne) \leq (x+y) \wedge 2ne, \\ \overline{(x+y) \wedge ne} &\leq \overline{(x \wedge ne)} + \overline{(y \wedge ne)} \leq \overline{(x+y) \wedge 2ne} \end{aligned}$$

カテ $x + y \in \mathcal{L}_1$, $\overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y}$ ヲ得ル。入 x ノトキモ同様。

(ii) \mathcal{L}_1 デハ $x > y$ ナラバ $\overline{x} > \overline{y}$ トナル。

(証) $x - y$ ヲ考ヘレバ, $x > 0$ ノトキ $\overline{x} = 0$ カテ矛盾ヲ導ケバヨイ。

$x \cap e = x_1$ トオケバ, $x_1 > 0$ ナリ且ツ $0 = \overline{x} \geq \overline{x_1} \geq 0$ カテ $\overline{x_1} = 0$. シカル $= m x_1$ ($m = 1, 2, \dots$) ハ unbounded (L. p. 106, Thes. 7.3). コレハ Axiom II = 反スル。

(iii) Axiom II ハ \mathcal{L}_1 $\exists x_n \geq 0$ = 對シテモ成立スル。

(証) $\forall x_n \leq x_{n+1}$, $a = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{x_n} < \infty$ トスル。
 $x_n \cap Ne = x_n^{(N)}$ トスレバ, $\{x_n^{(N)}\}$ ハ N ヲ固定スレバ Axiom II 1 條件ヲ充ス。故ニ $\sigma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(N)} = x^{(N)}$ が存在スル。勿論 $x^{(N)} \leq Ne$ ナリ, $\overline{x^{(N)}} \leq a$. 故ニ $\{x^{(N)}\}$ ヲ考ヘレバ, \wedge Axiom II カテ $\sigma\text{-}\lim_{N \rightarrow \infty} x^{(N)} = x$ が存在スル。シカル $= x_n^{(N)} \leq x^{(N)} \leq x$ ナリ故ニ $N \rightarrow \infty$ トスレバ $x_n \leq x$ トナル。コレガ求タル結果デアツタ。

(iv) \mathcal{L}_1 $\exists x$ = 對シテ $\|x\| = |\overline{x}|$ トオケバ, $\|x\|$ ハ Norm 1 性質ヲ満足スル:

(1) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|,$

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,$

(3) $\|x\| = 0$ ナラバ, $x = 0$.

(v) \mathcal{L}_1 ハ (iv) = 於ケル Norm = \exists Banach space

トナル。

(証) \mathcal{L}_1 complete ナルコトヲ言ヘサレバヨ
1. $\mathcal{L}_1 \ni x_n$ が $\lim_{m,n \rightarrow \infty} \|x_m - x_n\| = 0$ ナ満足スルモノ
トナル。 $n(k)$ ナ $m, n \geq n(k) + 1$ ナバ $\|x_m - x_n\| \leq \frac{1}{k^3}$
ナル如クナレバ

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \overline{|x_{n(k)} - x_{n(k+1)}|} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty$$

ナル故, (iii) ナ $\sum_{k=1}^{\infty} k |x_{n(k)} - x_{n(k+1)}| = u \in \mathcal{L}_1$ ナ存

在スル。故 $|x_{n(k)} - x_{n(k+1)}| \leq \frac{1}{k} u$ ナ $(L.P. 112)$

ナ $\sigma\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n(k)} = x$ ナ存在シ, 之レナ $n\text{-}\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n(k)}$

$= x$, 然レツテ $n\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ トナル。 (コ $\supset = n \lim$

ハ norm topology = ヨル \lim ナ示ス)

(vi) $\mathcal{L}_1 \ni x_n = \text{対シテ } n\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ナルコトナ,

$\|x_n\| < C = \text{シテ } \sigma^*\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ ナルコトナ, 八 equivalent

トナル。

(此処ニ $\sigma^*\text{-}\lim$ ハ order topology = 對スル star topology ナ意味スル (L.P. 29)).

(証) 前者ナラ後者, 出ルコトハ (v) ナキト同様。後
半ハ $x_n \geq 0, x = 0$ トシテモ一般性ヲ失ハナイ。即チ

$\sigma^*\text{-}\lim x_n = 0, \overline{x_n} < C$ ナラ $\overline{x_n} \rightarrow 0$ ナ証明スレバ

ヨイ。今 $\overline{x_{n(k)}} > \varepsilon > 0$ ナリトスレバ, $\overline{x_{n(k)}}$ 中基本
列ヲ選ベバ,

(v) カラ $n - \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{n(t(r))} = \mathcal{L} \in \mathcal{L}_1, \bar{x} = \lim_{r \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{L}_{n(t(r))}} > \varepsilon$

トナリ, 前半カラ $0 - \lim_{r \rightarrow \infty} \mathcal{L}_{n(t(r))} = \mathcal{L} \neq 0$ トナリ矛盾

トナル。

特 = $Ne \geq x_n \geq -Ne$ ナル $x_n =$ 對シテハ \mathcal{O}^* topology
ト norm top. トハ一致スル。

§.3

$[0, 1] = X_1$ 上, \mathcal{L}_1 値ヲ取ル函数 $f(t)$ ヲ考ヘル。

(定義) measurable function 1 class \mathcal{M}

ヲ次ノ性質ヲ有スル最小ノ class トスル。

1) \mathcal{M} ハ Const. ヲ含ム。

2) $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$ ナラバ $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \in \mathcal{M}$ (α_1, α_2 ハ
實數)

3) $f \in \mathcal{M}$, 且ツ $\alpha(t)$ ヲ real measurable
function トスレバ $\alpha(t) f(t) \in \mathcal{M}$.

4) $f_n(t) \in \mathcal{M}$ デ且ツ t 1 almost everywhere
テ $\mathcal{O}^* \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f(t)$ ナラバ $f(t) \in \mathcal{M}$.

(vii) $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$ ト non-negative
function 1 差 = 分ケ, $f_{\pm}^{(n)}(t) = f_{\pm}(t) \wedge ne$ トス
レバ, $f(t)$ ガ上ノ定義デ measurable ナルタメノ必要
十分條件ハ $f_{\pm}^{(n)}(t)$ ガ \mathcal{L}_1 = 於テ Bochner 1 意味デ
measurable ナルコトデアル。

(証) $0 \leq f(t) \leq Ne$ ナル範囲デハ, 先ツ有限値函数
ガ $\mathcal{M} =$ 属シ, 従ッテソノ $\mathcal{O}^* \lim \in \mathcal{M} =$ 属スル。(vi)カ

\mathcal{O}^* \lim と $\text{norm } \lim$ とは一一致スルカラ, コノ範囲デ
ハ有限値函数 \lim とナル $f(t)$ 丈デ 4)ヲ満足スル。

$f_+(t) = \mathcal{O}^* \lim_{n \rightarrow \infty} f_+^{(n)}(t)$ ナル故, $f_+^{(n)}(t)$ が
Bochnerノ意味デ measurable ナラバ, $f_+(t) \in \mathcal{M}$
ニ属サテハナラナイ。

逆ニカナル $f(t)$ ノ class カ1) - 4)ヲ満足スルコト
ヲ証明シマシ。

先ヅ $\mathcal{M} \ni f_1, f_2 \geq 0$ トスレバ,

$$(f_1 + f_2) \cap ne = \{ (f_1 \cap ne) + (f_2 \cap ne) \} \cap ne$$

ナル故, ($0 \leq f \leq ne$ ナル範囲デハ $f(t) \in \mathcal{M}$ ナラバ
 $f(t) \cap f_0$ (f_0 ハ Const.) ハ又 $\mathcal{M} =$ 属スル故) 2)ノ
成立スルコトガワカル。

次ニ 4)ハ $f_n(t) \xrightarrow{\mathcal{O}^*} f(t)$, $f_n(t) \in \mathcal{M}$ トスレバ
 $f_n^{(r)}(t) \xrightarrow{\mathcal{O}^*} f^{(r)}(t)$, 即チ Bochnerノ方法デ (*)
 $f^{(r)}(t)$, 又 measurable トナリ, $f(t) \in \mathcal{M}$ トナル。
他ニ同様。

(viii) $f_1, f_2 \in \mathcal{M}$ ナラバ $f_1 \cup f_2, f_1 \cap f_2 \in \mathcal{M}$.

(ix) $\mathcal{M} \cap \mathcal{L}$, ハ \mathcal{L} ノ内ニ於ケル Bochnerノ意味ノ
measurable ト一致スル。

(証) $\mathcal{L} \ni f \geq 0$ トスレバ $\|f(t)\| \geq \|f(t) \cap ne\|$ ナル故,
 $\mathcal{O}^* \lim_{n \rightarrow \infty} f(t) \cap ne = f(t)$ ナラ, (vi)ニヨリ

$f(t) = n \lim_{n \rightarrow \infty} f(t) \cap ne$ トナリ Bochnerノ意味デ

$f(t)$ ガ measurable トナル。

§ 4

次 = \mathcal{M} , subspace \mathcal{J} が次 / 条件ヲ満足スル maximal class トシテ定メル。

1) \mathcal{J} が $f(t)$, A が X_1 / Lebesgue measurable set スルハ $\int_A f(t) dt \in \mathcal{L}$ が定マリ

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n = A, \quad A_n \cap A_m = O, \quad (n \neq m)$$

トシテ

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f(t) dt = \int_A f(t) dt$$

2) $f_1(t), f_2(t) \in \mathcal{J}$ トシテ $\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) \in \mathcal{J}$ ト
 たり (α_1, α_2 ハ実数)

$$\begin{aligned} & \int_A (\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t)) dt \\ &= \alpha_1 \int_A f_1(t) dt + \alpha_2 \int_A f_2(t) dt \end{aligned}$$

3) $f(t) = f_0 = \text{const.} \in \mathcal{J}$ 等

$$\int_A f_0 dt = m(A) \cdot f_0$$

4) $f_n(t) \in \mathcal{J}$, 且 $f(t) \in \mathcal{J}$ 等 $|f_n(t)| \leq f(t)$,

前頁脚註 (米) S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind. Fund. Math. 20 (1933)

$\sigma^* \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f_0(t) + \text{ラバ}$, $f_0(t) \in \mathcal{J} + \text{ラ}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(t) dt = \int_A f_0(t) dt.$$

5) $f(t) \in \mathcal{J} + \text{ラバ}$ $|f(t)| \in \mathcal{J}$.

(X) $f(t) = f_+(t) - f_-(t)$, $f_{\pm}^{(n)}(t) = f_{\pm}(t) \wedge n$ $\forall e$
 トスレバ $f \in \mathcal{J} + \text{ラ}$ $\times \times$ / 必要+条件ハ $f_{\pm}^{(r)}(t)$ が \mathcal{L}_1 /
 値ヲトル Bochner / 意味 / measurable function
 トシテ integrable デ, 且ツ

$$\sigma^* \lim_{r \rightarrow \infty} \int_A f_{\pm}^{(r)}(t) = x_{\pm}$$

が存在スルコトデアル。

コノ時 $\int_A f(t) dt = x_+ - x_-$ トナル。

(証) 5) カラ $f(t) \geq 0$ トシテ一般性ヲ失ハナイ。 $f^{(r)}(t)$
 ハ $\|f^{(r)}(t)\| \leq r$ カラ measurable + ラバ必ず integrable デ, コノ範囲デ 1) - 5) ヲ満足スル。

故ニ $\int_A f(t) dt$ が定義サレ得ル+ラバ, 今ノ方法ヨ
 リ仕方がナイ。 逆ニコノ様ニ \mathcal{J} / 範囲ヲ定メタトキニ
 1) - 5) / 満足スルコトヲ証明シヤウ。

1) 2) 3) 5) ハ問題ハナイ。 4) / 証明。 $f_n(t) \geq 0$,
 $f_n(t) \xrightarrow{\sigma^*} f_0(t)$, $f_n(t) \leq f(t) \in \mathcal{J}$ トスル。
 $\int_A f_n^{(r)}(t) dt = I_n^{(r)}$ ($n = 0, 1, \dots$) トスル。

(コノ $= f_n^{(r)}(t) = f_n(t) \wedge r$ トスル)

$$\int_A f^{(r)}(t) dt = I, \int_A f_n(t) dt = I_n, \int_A f(t) dt = I$$

トオク。 $f_n^{(r)}(t)$, 積分、Bochner / 意味、積分が
アルカラ

$$O^* \lim_{n \rightarrow \infty} I_n^{(r)} = I_0^{(r)},$$

又定義カラ $O \lim_{r \rightarrow \infty} I_n^{(r)} = I_n$ 及 $O \lim_{r \rightarrow \infty} I^{(r)} = I$ デアル。

$$\begin{array}{ccc} I_n & I_0 & \text{サテ} \\ \uparrow & \uparrow & \\ I_n^{(r)} & I_0^{(r)} & \end{array} \quad \begin{array}{l} I - I_0^{(r)} \cong I_n - I_n^{(r)} \quad (n=0, 1, \dots) \\ \text{デアルカラ (vi) ヨリ} \\ 0 \cong I_n - I_n^{(r)} \cong W_n, \quad W_n \downarrow 0 \\ \text{+ル } \mathcal{L} / \text{元 } W_n \text{ ガアル。} \end{array}$$

一方 $I_n^{(r)}, I_0^{(r)}$, $\mathcal{L}_1 =$ 属スル故 (vi) カラ

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} k / |I_0^{(k)} - I_{n(k)}^{(k)}|$$

ガ $\mathcal{L}_1 =$ 属スル又 $\psi = n(k)$ ヲ選ブコトガ出来ル。

$$\begin{aligned} \text{即チ } |I_0 - I_{n(k)}| &\leq |I_0 - I_0^{(k)}| + |I_0^{(k)} - I_{n(k)}^{(k)}| \\ &+ |I_{n(k)}^{(k)} - I_{n(k)}| \leq 2W_n + \frac{u}{k} \downarrow 0 \text{ トナリ,} \end{aligned}$$

$O \lim_{k \rightarrow \infty} I_{n(k)} = I$ トナル。 即チモトメル関係式ヲ
得タ。 ———

(xi) $f(t) \in \mathcal{L}_1$, (for almost every t) ナラバ

$\int_A f(t) dt$ ハ Bochner / 積分トナリ

$$\int_A \overline{f(t)} dt = \overline{\int_A f(t) dt}$$

ヲ満足スル。

(Xii) $f(t) \in \mathcal{J}$ デ $\int_0^t f(t) dt \in \mathcal{L}_1$ ナラバ $f(t)$
ハ almost every t デ \mathcal{L}_1 = 属スル。

コレ等ノ証明ハ 別ニムツカシイコトナシ。

(Xiii) $f(t) \in \mathcal{L}_1$ (for every t) デ $f(t) \in \mathcal{J}$ デ
モ 必ズシモ Bochner ノ 意味デ integrable トハ
限ヲナシ。(例ヲ後ニ挙ゲル)

§ 5

\mathcal{L} = 於ケル σ^* topology が metric topology
= ナル場合ニハ measurable function, class \mathcal{M}
ハ次ノ如ク定メラレル。

(Xiv) $\mathcal{M} \ni f(t)$ ハ 適當ナル 有限値函数

$$f_n(t) = \sum_{r=1}^{N_n} f_r^{(n)} \chi(A_r^{(n)})$$

($\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 = \sum_{r=1}^{N_n} A_r^{(n)}$, $A_r^{(n)} \cap A_s^{(n)} = \emptyset$ ($r \neq s$), χ ハ

χ ノ 特性函数, $f_r^{(n)} \in \mathcal{L}$) , σ^* -limit トシテア
ラハサレル。

コレハ更ニ一般ニ

(Xv) \mathcal{X}_1 上ノ \mathcal{L} metric space \mathcal{S} ノ 値ヲトル
函数 $f(t)$ ヲ考ヘル。ソノ中デ 有限値函数ノ 極限トナル
class ヲ \mathcal{M} トスレバ, \mathcal{M} = 属スル $f_n(t)$ ノ 極限函
数ニ亦 \mathcal{M} = 属スル。

コノ 証明ハ Bochner ノ 証明ヲ 少シカヘレバヨシ。

次 = 微分トノ関係ハ

(XVii) $\int_0^t f(t) dt$ ハ殆ンド致ル如ク微分可能デ、ソ

ノ値ハ $f(t) = \text{等シイ}$ 。

又不定積分ハ *absolutely continuous* デアル
ガ、逆ハ必ずシモ真デハナイ。

§ 6

L -space $\rightarrow [0, 1]$ 上ノ measurable function
ノ equivalent + class ノ作ル space トシ、
order, 平均値ヲ普通ノ意味ニトル。 o^* -convergence
ハ asymptotic convergence \rightarrow 意味シ、 L ハ
 S -space トナル。

ニ変数 x, y ($0 \leq x, y \leq 1$) ノ函数 $f(x, y)$ ガス
ベテ $x = \text{ツイテ}$, x ノ固定シタトキ $=$, y ノ measurable
function デアレバ、ソレハ一ツノ L space ノ値ヲ
トル X_1 ノ函数ヲ定メル。若レモ $f(x, y)$ ガニ変数ニ関シ
テ measurable + ラバ §3 ノ意味デ measurable
トナリ、逆ニ $f(x, y)$ カラ定メラル函数ガ §3 ノ意味デ
measurable + ラバ適當ト $x, y = \text{ツイテ}$ ノ measur-
able function $f_1(x, y)$ ヲ選ンテ、
 $m_y(f(x, y) \neq f_1(x, y)) = 0$ for every x
トスルコトが出来ル。

次ニ二変数 x, y ニ関シテ measurable + $f(x, y)$
カラ定メラレル L ノ値ヲトル函数 $ff(x)$ ガ integrable

t の始とドスベテ $y = \text{對シテ}$ y を固定スレバ $f(x, y)$ の
 $x = \text{關シテ}$ Lebesgue . integrable ナルコト、一致シ
 且ツ、 $\int f(x) dx = \int f(x, y) dx$ となる。 $f(x)$
 が Bochner の意味で integrable ナルハ $f(x, y)$ が
 二変數ニ關シテ integrable ナルコトデアルカラ、 x 及
 ビ y を夫々固定スレバ integrable ナルモ、二變數ト
 シテハ integrable デナイ $f(x, y)$ ナレバ (Xiii) の
 例トナル。又 (Xvi) の例トシテハ Clarkson の等式
 例ヲ考ヘレバヨイ。

$$\text{即チ } f(x, y) = \begin{cases} 0, & x > y \\ 1, & x \leq y \end{cases} \quad \text{トスレバソレカラ定義シタ } f(x)$$

ハ absolutely continuous デ且ツ微分可能デアルガ
 ソノ値ハスベテ 0 トナリ、 $f(t)$ の不定積分ニハナラナイ。