



Title	群トソノ lattice ニツイテ
Author(s)	岩澤, 健吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 211, p. 76-81
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74839
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

lattice is distributive = ナルコトハ明ラカデアリマス。

一番簡單に D-group (以下 $L(\mathcal{O})$ が distributive = ナル様子の $\mathcal{O}$ をこの様=呼ぶコト=シマス) トシテ

Lemma 1. cyclic group ハ 及テ D-group デアル。

証明. $\mathcal{O} = \{A\}$ を無限次ノ cyclic group トシマス。 $\alpha = \{A^l\}$, $\beta = \{A^m\}$, $\gamma = \{A^n\}$ トシテ

$$\alpha \cup (\beta \cap \gamma) = (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma)$$

が成立スルコトヲ云へバヨイワケデスガ、コレハ次ノ初等整除論的關係=他ナリマセン。

即チ $(\quad, \quad), \{ \quad, \quad \} =$ ヨツテソレソレ最大公約数, 最小公倍数ヲ表セバ

$$(l, \{m, n\}) = \{(l, m), (l, n)\}$$

有限次ノ Cyclic group ハ上記 $\{A\}$ ノ factor group デスカテ勿論 D-group = ナリマス。(証終)

コレヲ用ヒテ

Lemma 2. 有理数全体ノ加法群ヲ R トスレバ R ハ D-group デアル。

証明. $\alpha \cup (\beta \cap \gamma) \supseteq (\alpha \cup \beta) \cap (\alpha \cup \gamma)$ ヲ云へバ十分デアリマス。コノ右辺=含マレル任意ノ数ヲ X トスレバ $X = A + B = A' + C$, $A, A' \in \alpha$, $B \in \beta$, $C \in \gamma$ 。

$\bar{\alpha} = \{A, A'\}$, $\bar{\beta} = \{B\}$, $\bar{\gamma} = \{C\}$ トスレバ $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ ハ $\{A, A', B, C\}$ ノ部分群ヲ後者ハ Cyclic group, 従ッテ lemma 1 = ヨリ D-group デスカテ

$$\overline{a} \vee (\overline{b} \wedge \overline{c}) = (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{c})$$

ヨツテ

$$a \vee (b \wedge c) \geq \overline{a} \vee (\overline{b} \wedge \overline{c}) = (\overline{a} \vee \overline{b}) \wedge (\overline{a} \vee \overline{c}) \geq X$$

即チ

$$a \vee (b \wedge c) \geq (a \vee b) \wedge (a \vee c). \quad (\text{証終})$$

次 = G を任意 / D -group トシ A, B を G / 任意 / Element トシマス。先ツ

$$\{A\} \cap \{B\} = 1$$

トスレバ

$$a = \{AB\}, \quad b = \{A\}, \quad c = \{B\}$$

トオイテ

$$\{AB\} = a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) = \{A, B\}$$

即チ $\{A, B\}$ は *cyclic* = ナリマス。一般 = $\{A\} \cap \{B\} = 1$

トオケバ $\mathcal{C}$ は $\{A, B\}$ / *Zentrum* = 属シ $\{A, B\} / \mathcal{C}$ へ

今証明シタコト = ヨリ *cyclic* = ナリマスカラ、従ツテ

$\{A, B\}$ は *abel* 群 = ナリマス。ヨツテソノ *base* ヲトツ

テ $\{A, B\} = \{A_1\} \times \cdots \times \{A_n\}$ トスレバ $\{A\} \cap \{B\} = 1$

ナル場合、考察テ $\{A_1\}, \{A_2\}, \cdots, \{A_n\} = 1$ ヲ解返

シテ $\{A, B\} = \{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ ヲ得マス。即チ $\{A, B\}$ は

常 = *cyclic* = ナリマス。ヨツテ A, B / *order* へ共 = 無限

デアルカ共 = 有限デアルカデアリマス。

又 G が *abel* 群デアルコトモコレデワカリマシタ。ソ

コデ先ツ G / Element / *order* が凡テ有限デアル場

合ヲ考察スルコトニシマス。任意 / 自然数 m = 對シ *order*

m ナル G ノ 部分群ハ高々一ツデアリマスカラ G ノ

Element ノ 数ハ高々 *abzählbar* デアリマス。ヨツテ
コレヲ

$$1 = A_0, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$$

トシマス。サテ G ハ 次ノ様ニシテ R (有理数ノ加法群 R
ヲ $\text{mod } 1$ デ *reduce* シタモノ) ノ 部分群 = *isomorph*
= 寫像サレマス。先ヅ $A_0 = 1$ = ハ勿論 0 ヲ 對應サセマス。

A_1 ノ Order が m_1 ナラバ A_1 ヲ $\frac{1}{m_1}$ = 對應サセマス。

$\{A_0, A_1, A_2\}$ ハ *cyclic* デアリマスガ $\{A_0, A_1\}$ ノ

$\{A_0, A_1, A_2\}$ = 終ケル index ヲ m_2 トシ $B_2^{m_2} = A_1$ トナ
ル様ニ $\{A_0, A_1, A_2\}$ ノ *Erzeugende* $B_2 = \frac{1}{m_1 m_2}$ ヲ 對
應サセマス。

以下同様ニ $B_3^{m_3} = B_2$, $\{B_3\} = \{A_0, A_1, A_2, A_3\}$ ナル
 $B_3 = \frac{1}{m_1 m_2 m_3}$ ヲ 對應サセル-----。コレガ *Isomorphie*

ヲ 與ヘルコトハ明カデアリマス。即チ G ハ R ノ 部分群
ト *Isomorph* = ナリマス。次ニ G ノ Element ノ order

ガ (1 以外ハ) 凡テ無限デアル場合ヲ考ヘマス。 $A \neq 1$ ヲ 任

意ニトレバ最初ノ考察カラ $G/\{A\}$ ノ Element ハ 凡テ有
限ノ order ヲ持ツコトガワカリマスカラ今証明シタコト

ニヨリ $G/\{A\}$ ハ R ノ 部分群 = *isomorph* デアリマス。

ヨツテ特ニコノ場合ニ G ノ Element ノ 数ハ *abzählbar*
デアリマスカラ前ト同様ニ

$$A_0 = 1, A_1, A_2, \dots$$

トシマス。

今度ハ G が R の内 = 次、様 = 對應サセマス。先ヅ $A_0 = 1$
 = ハ O が $A_1 = 1$ に対応サセマス。 $B_2^{m_2} = A_1, \{B_2\} =$
 $\{A_1, A_2\}$ トラバ $B_2 = \frac{1}{m_2}$ に対応サセ以下苗ト全ク同じ様
 = スレバ矢張り *Isomorphic* が得ラレマス。

即チ以上ノ結果ヲマツメレバ *D-group* G ハ R 又ハ
 R_1 ノアル部分群ト *isomorph* デナケレバナラスコトが
 ワカリマシタ。然シ逆ニコノ様ナ群が *D-group* = ナル
 コトハ *lemma 2* = ヨリ R が先ヅ *D-group* デアリ R_1
 ハ R ノ *factor group* デアリマスカラ明白デアリマス。
 ムツテ次ノ定理ヲ得マス。

定理 1. 群 G が *D-group* ナルタメニ必要且ツ十分
 ナル條件ハ G が R 又ハ R_1 ノ部分群ト *isomorph* = ナル
 コトデアル。

系 1. 有限群 G が *D-group* ナルタメニ必要且ツ十分
 ナル條件ハ G が *cyclic* ナルコトデアル。

系 2. R_2 が R_1 ノ任意ノ部分群トスレバ R_1 ハ $R_2^* \cong R_1/R_2$
 ナル部分群 R_2^* ヲ含ム。

証明. R_1/R_2 = 亦 *D-group* ナカラ
 又上ノ定理カラ次ノコトヲ容易ニ証明出来マス。

定理 2. 群 G = 属スル $L(G)$ が *Boolean algebra*
 ナルタメニ必要且ツ十分ナル條件ハ G が R_1^0 ノ部分群ト
isomorph ナルコトデアル。但シ R_1^0 トハ R_1 ノ部分群
 デ、 $\frac{1}{p}$ (p : 凡テノ素数) ノ全体カラ *erzeugen* サレ
 タ群デアル。

—— 終 ——

(参考文献)

- 1) 例へば $L(q)$ が "ausgeglichen" + "lattice" 又は modular lattice の場合等.