



Title	確率法則ノ組類別
Author(s)	國澤, 清典
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 211, p. 81-89
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74840
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

910. 確率法則ノ組類別

國澤 清典 (阪大)

ニツノ分布函数が與ヘラレ、ソレヲ $F_1(x)$, $F_2(x)$ トスル。

$F_1(x)$ ト $F_2(x)$ が同ジ組ニ屬スルト云フノハ適當ナ a, b ヲ選ビ

$$F_1(ax+b) = F_2(x)$$

$$\text{但シ } \infty > a > 0, \quad \infty > b > -b$$

デアル場合、云ヒ換ヘレバ変數ニ一次変換ヲホトコシテオ互ニ得ラレル場合ニ同ジ組ニ屬スルト云フコトニスル。此ノ關係ハ反射律、對稱律、移動律ヲ明ラカニ満足スル故ニ確率法則全体ヲ上ノ様ナ關係ヲ組類別スルコトが出来ル。

例ヘバ Gauss ノ法則ハ一ツノ重要ナル確率法則ノ組ヲ作ル。又特別ノ場合トシテ單位法則ヲ考ヘラレル。ソレハ

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0 \end{cases}$$

デアル法則ノツクル組, 即チ $\Sigma(x - \bar{x})$ デアルガ、
此ノ組ヲ非固有ノ組¹⁾ト云ツテ、ソノ他ノ組ヲ固有ノ組ト
假ニ云ツテオク。

固有組ノ系列 $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ が興ヘラレタ
トキ $F_1(x) \in K_1, F_2(x) \in K_2, \dots, F_n(x) \in K_n, \dots$
デアルヤ²⁾ノ分布函数ノ系列が存在シテソノ組 K ノ法則
 $F(x)$ ニ法則収斂シテオレバ $\{K_n\}$ ハ *Khintchin*ノ意
味デ K ニ組類別収斂ヲナスト定義スル。此ノ組類別収斂
ニ関シテハ、次ノ重要ノ定理ヲ *A. Khintchin* が証明
シタ。²⁾

定理 (*Khintchin*) スベテノ組系列モ皆ニ非固有
組ニ組別収斂ヲナシ、又組系列ヲ適當ニトレバーツノシカ
モーツニ限ル固有組ニ組別収斂(勿論 *Khintchin*ノ意味
デ)ナス事が出来ル。

ガカラ非固有組ヘノ組別収斂ハ *triviale*ノ場合
デ今般 *Khintchin*ノ意味デノ組別収斂ト云ヘバ固有
組ヘノ収斂ト解スルコトニスル。又非固有組ヘシカ収斂シテ
ケレバ発散収斂ヲナシテイルト云ツテモ差支ヘナイワケデア
ル。例ヘバ n 個ノ *chance variable*ノ和 S_n ヲ適
當ニ *reduce*シテ *Gauss*ノ法則

1) *unechte Klasse, classe impropre.*

2) *A. Khintchin, Mitt. Inst. Math. und Mech.*
Univ. Tomsk, 1, 1937, pp. 258—261.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}u^2} du$$

=法則收斂サスコトが出来ルトラバ吾々ハ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} K(S_n) = G$$

ト書ケコトが出来ル。 $K(S_n)$ ハ S_n / 分布函数 / 属スル組ヲ, G ハ Gauss / 法則 / 組ヲ表ハス。

非固有組ヲ除外シテ固有組ニヨリ出来ル空間ヲ R ト書ケコト = スルト Khintchin / 定理ヨリ R ハ Fréchet / L -space⁴⁾ ヲ作ルコトが容易ニワカルガ W. Doeblin ハ Paris, C. R.⁵⁾ デ R ハ Khintchin / 意味 / topology ト同等 + 距離ヲツケルコトが出来 + イ例ヲ作ルコトが出来タト述ベテイルが何ソナ例デアルカハ具体的ニハ述ベテハイナイ。ソコデ以下 distance ヨリハ弱イカ三角形 / axiom / 成立シナイ所謂 Fréchet / "écart" ヲ Khintchin / 意味 / topology ト同等⁶⁾ トナル様ニ R = 導入シタイ。Doeblin ハ此 / 点ヲ注意ハシテイルが何ソナ方法デアルカ述ベテイナイ。故ニ結局 R ハ E -space⁷⁾ トナリ metric space ヨリハ一般トナルガ L -space ヨリハ特殊ト空間トナル事がワカツタ。

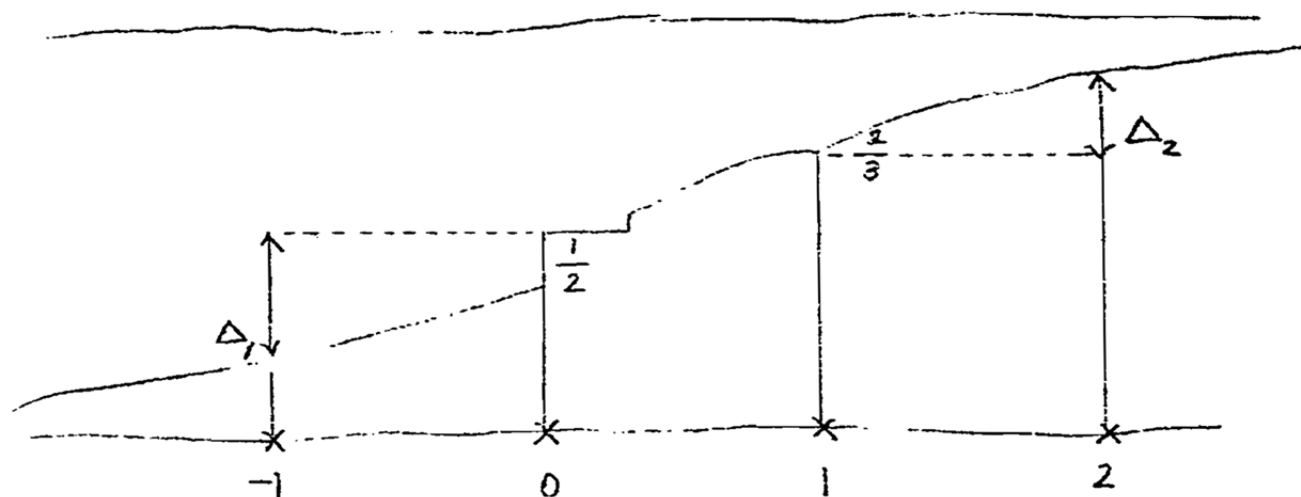
4) 功力金二郎氏 抽象空間論 39頁

5) C. R. Paris, 206, 1938, pp. 306-308

6) 導来集合ヲ度ヘタイト / 意味デ

7) 功力金二郎氏 抽象空間論 175頁

最初 = 法則 / 各組カラ次 / 様 + 代表ヲ取出ス。



即チ *médiane* が 0 ト + ル様 = シ、モシ *médiane* が
澤山 アレバ 左端が 0 = 來ル様 = シ、次 = 此ノ様 + 法則 $F(x)$
= ツキ適當 = $\infty > a > 0$ + ル a トリ $F(ax) = \frac{2}{3}$ ヲ満ス
 x が 1 アアルヤウ = シ、若シコノ様 + x が 澤山 アレバ 右
端が 丁度 1 = 來ルヤウ = a ヲ決メル。此ノヤウナ法則ヲ改
メテ $F(x)$ ト置キ代表トスル。コレハ一意的 = 決マルコト
が容易ニヲカル。

スルト $[-1, 0]$ $[1, 2]$ デソレゾレ $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ ナ
ルヤウナ *Positive Pr* ヲモツヲケデアル。次 = *écart*
ヲ次ノ様 = 定義スル。

組 K, K' がアリ, $F(x), F'(x)$ ヲ夫々 K, K' ノ代表法
則トシテ K ト K' ノ間 = 次ノヤウナ關係 (K, K') ヲ導入
スレバ

$$(K, K') = \inf_a [\text{Max} \{ (F(ax), F'(ax)), \\ | \frac{1}{a} - a | \cdot (F(x), F'(x)) \}]$$

が $\acute{e}cart$ トナルコトヲ証明スル。此処 $= (F(ax), F'(ax))$ 等ハ P. Levyノ意味ノ法則距離ヲ示ス。

定理 I 上述ノ (K, K') ナ各組ノ間 $= \acute{e}cart$ ヲツケルコトが出来ル。

(証明) 1. $(K, K) = 0$ ハ明ラカ。

2. $(K, K') = 0$ トラバ $K = K'$ ノ証明

(K, K') ノ定義ヨリ

$$\text{Max} \{ (F(a_n x), F'(a_n x)), \\ \left| \frac{1}{a_n} - a_n \right| \cdot (F(x), F'(x)) \} \rightarrow 0$$

が成立スル $x = \{a_n\}$ ヲ取り出スコトが出来ル。

$(F(x), F'(x)) = 0$ トラバ問題ハタク $K = K'$ トナル故 $= (F(x), F'(x)) \neq 0$ トスル。

$$\left| \frac{1}{a_n} - a_n \right|$$

ヨリ $a_{n_i} \rightarrow 0, a_{n_j} \rightarrow \infty$ デアルヤウナ *subsequence* $\{a_{n_i}\}$ が存在シタイコトハ容易ニワカル。故ニ適當ニ部分系列ヲ選ンデ $a_{n_i} \rightarrow 1$ 。

トスルコトが出来テ

$$F(a_{n_i} x) \rightarrow F(x) \\ F'(a_{n_i} x) \rightarrow F'(x)$$

故ニ

$$(F(ax), F'(ax)) = 0$$

トナリ, $K = K'$ ガ云ヘタ。

3. $K = K'$ トラバ $K' = K$ ハ明ラカ。 — 以上 —

コレデ $\acute{e}cart$ が出来タノデ $Khintchin$, $topology$ ト同等デアルコト、此ノ場合デハ即チ導来集合ヲ変ヘタイコトヲ証明スル。

定理2 上述ノ $\acute{e}cart$ ヲ空間 R ニ導入スレバ $Khintchin$ ノ意味ノ $topology$ ト同等トナル。

(証明) 最初ニ $\acute{e}cart(K_n, K) \rightarrow 0$ トスレバ適當ニ部分系列ヲ取ルト、 $Khintchin$ ノ意味デ組別収斂スルコトヲ証明スル。定義ヨリ

$$\text{Max} \left\{ (F_n(a_n x), F(a_n x)), \left| \frac{1}{a_n} - a_n \right| \cdot (F_n(x), F(x)) \right\} \rightarrow 0$$

此処ニ F_n 及ビ F ハ各々 K_n , 及ビ K ノ代表法則ヲ示ス。

先ツ $(F_n(x), F(x)) \rightarrow 0$ ナラバ問題ナイガ故ニ最初カラ $(F_n(x), F(x)) > \delta > 0$ ト假定シテアツテ良イ。

容易ニ subsequence ヲ選ブト

$$a_{n_i} \rightarrow 1$$

ガ云ヘル、故ニ

$$F(a_{n_i} x) \rightarrow F(x)$$

トナルコトガワカル。

故ニ任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シ充分大キイ $N(\varepsilon)$ ヲトルト $n_i > N(\varepsilon)$ ニ對シ

$$(F_{n_i}(a_{n_i} x), F(a_{n_i} x)) < \varepsilon,$$

$$(F(a_{n_i} x), F(x)) < \varepsilon$$

故ニ

$$(F_{n_i}(a_{n_i}x), F(x)) < (F_{n_i}(a_{n_i}x), F(a_{n_i}x)) \\ + (F(a_{n_i}x), F(x)) < 2\varepsilon$$

故 =

$$F_{n_i}(a_{n_i}x) \rightarrow F(x)$$

此レヨリ K_{n_i} は $K = \text{Khintchin}$ / 意味デ組別収斂
スル事がワカッタ、逆ニ

$\{K_n\}$ が $K = \text{Khintchin}$ / 意味デ組別収斂ス
ルト假定スルト $K_n \ni F_n(a_nx + b_n)$ $n=1, 2, 3, \dots$
が存在シテ

$$F_n(a_nx + b_n) \rightarrow F(ax + b)$$

(法則収斂 / 意味デ)

此処ニ $F_n(x)$, $F(x)$ は K_n , K / 代表法則トスル。

Levy / 意味 / 法則距離 / 性質カラシテ

$$(F_n(a_nx + b_n - b), F(ax)) \\ = (F_n(a_n)x + b_n, F(ax + b))$$

デアルカラシテ最初カラシテ $b=0$ ト假定シテヨイ。又

$$F_n(a_nx + b_n) \rightarrow F(ax)$$

(法則収斂 / 意味デ)

ナラバ

$$F_n\left(\frac{a_nx + b_n}{a}\right) \rightarrow F(x) \quad (\text{法則収斂, 意味デ})$$

デアルカラ, 最初カラ $F_n(a_nx + b_n)$, $F(x)$ = 法則収
斂シテイルト考ヘテ差支ヘナイ。又 = 組 / 代表法則 / 作り方
カラシテ

$$\left\{ \frac{1-b_n}{a_n} \right\}, \left\{ -\frac{b_n}{a_n} \right\} \quad n=1, 2, 3, \dots$$

ノ中カラ部分系列ヲ取り出シテ

$$\frac{1-b_{n_i}}{a_{n_i}} \rightarrow 1, \quad -\frac{b_{n_i}}{a_{n_i}} \rightarrow 0$$

此レカラシテ

$$b_{n_i} \rightarrow 0, \quad a_{n_i} \rightarrow 1$$

若シ $F_{n_i}(x)$ が $F(x)$ = 法則収斂シテアレバ *écart* /
作り方カラシテ

$$(K_{n_i}, K) \rightarrow 0$$

ソコデ $F_{n_i}(x)$ が $F(x)$ = 法則収斂シテイタイ場合ヲ考
ヘレバ良イ。

任意 $= \varepsilon > 0$ ヲ與ヘテモ $n_i > N(\varepsilon)$ デアルヌウナ
 n_i = ツキ

$$\left| a_{n_i} - \frac{1}{a_{n_i}} \right| \frac{1}{\sqrt{2}} < \varepsilon$$

$$(F_{n_i}(a_{n_i}x + b_{n_i}), F(x)) < \varepsilon$$

$$(F(a_{n_i}x + b_{n_i}), F(x)) < \varepsilon.$$

故 =

$$\begin{aligned} & (F_{n_i}(a_{n_i}x + b_{n_i}), F(a_{n_i}x + b_{n_i})) \\ & \leq (F_{n_i}(a_{n_i}x + b_{n_i}), F(x)) \\ & + (F(x), F(a_{n_i}x + b_{n_i})) < 2\varepsilon \end{aligned}$$

故 =

$$(F_{n_i}(a_{n_i}x), F(a_{n_i}x))$$

$$= (F_{n_i}(a_{n_i}x + b_{n_i}), F(a_{n_i}x + b_{n_i})) \\ < 2\varepsilon$$

$$\text{故} = (K_{n_i}, K) \leq 2\varepsilon$$

$\varepsilon > 0$ は任意デアルカラ、 K_{n_i} ハ $K = \text{écart}$ デ收斂シ
テイル事ガワカッタ。 — 以上 —