



Title	単位ヲ有スル Vector-latticeニ就イテ, I
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 211, p. 94-98
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74842
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

912. 單位ヲ有スル Vector-lattice = 就イテ, I

吉田 耕 作 (阪大)

Vector-lattice ノ定義⁽¹⁾ 實數体 (實數ヲ α, β ,
 $\gamma, \dots$ ヲ表ハス) ヲ係数トスル加群 E ($\vee$ ノ要素ヲ
 $x, y, z, \dots$ ヲ表ハス) = 於テ次ノ條件ヲ満足スル
semi-order $\geq$ カ定義サレタルトキ E ヲ Vector-lattice
ト呼ブ:

$$(1) \quad f \geq g \text{ ト } f - g \geq 0 \text{ トハ同等}^{(2)}$$

$$(2) \quad f \geq 0, \lambda \geq 0 \text{ ヲ } \lambda f \geq 0$$

$$(3) \quad f \geq 0, -f \geq 0 \text{ ヲ } f = 0$$

$$(4) \quad f \geq 0, g \geq 0 \text{ ヲ } f + g \geq 0$$

$$(5) \quad \text{semi-order } \geq 0 \text{ ノ意味ヲ } E \text{ ハ lattice ヲ}$$

作ル。即チ全テ, $f =$ 對シ join $f \vee 0$ カ定マ
ル。⁽³⁾

Unit I. vector-lattice $E =$ 於テ $I > 0$ が
存在シ, 全テ, $x \in E =$ 對シ適當 $= \alpha, \beta$ ヲ撰ベバ
 $\beta I \leq x \leq \alpha I$ ト出来ルトキ I ヲ unit ト呼ブ。

以下 unit I ヲ有スル vector-lattice 7 function

(1) G. Birkhoff: Lattice theory 参照。

(2) $f \geq 0$ 且ツ $f \neq 0$ ヲ $f > 0$ ヲ表ハス。

(3) $f \vee 0 = f^+, f \wedge 0 = f^-$,
 $f^+ - f^- = |f| = f \vee (-f)$ 等。

space トシテ 表現スルコトヲ考ヘテミル。

Lemma 1. E , 線状部分空間 N ハ, $f \in N$ トレトキ $|x| \leq |f|$ +ル $x \in N$, +ル條件ヲ満足スルトキ = 限ッテ $E \rightarrow E/N$ が linear + lattice-homomorphism ヲ與ヘル。カ、ル線状部分空間 N ヲ normal テアルト云フ (Birkhoff: loc. cit. 109)。

Lemma 2. 任意, normal linear subspace (n. l. s.) $N \neq E$ = 對シ N ヲ含ム maximal n. l. s. $\neq E$ が存在スル。

証. E/N ハ E ト同ジ條件ヲ満足シ且ツ $E \rightarrow E/N$ = 於ケル I , 像ハ E/N , unit = +ル (Lemma 1). 次 = $E \neq \{\alpha I\}$ +ラ E ハ n. l. s. $N (\neq 0, E)$ ヲ有スルコトヲ示ス。

何者, 假定カラ $x \in E$ 存在シ $x + \gamma I$ (for any γ). $\alpha I \geq x$ +ル如キ α , $\inf$ ヲ α' , $x \geq \beta I$ +ル如キ β , $\sup$ ヲ β' トヲクト $\alpha' I \geq x \geq \beta' I$ 且 $\forall \alpha' > \beta'$. $\exists \gamma$

テ $x - \frac{\alpha + \beta}{2} I \neq 0$, 即チ $(x - \frac{\alpha + \beta}{2} I)^+ \neq 0$,

$(x - \frac{\alpha + \beta}{2} I)^- \neq 0$. 今 $\gamma (x - \frac{\alpha + \beta}{2} I)^+ \geq |\gamma|$ +ル

如キ γ , 全体 N ヲ考ヘレバ明カ = N ハ n. l. s. 且ツ $N \neq E$ ($\because N \ni (x - \frac{\alpha + \beta}{2})^-$ ナカラ).

最後 = maximal n. l. s. 1 存在ハ以上カラ transfinite induction テ証明スル。即チ上カラ

linear + lattice-homomorphism を導く
congruence relations (defined by a n. l. s.
 N_α) / transfinite + 系列が導く レル:

$$N_0, N_1, N_2, \dots, N_\alpha, \dots \quad (N_\alpha \subset N_{\alpha+1} \neq E),$$

$$\alpha < \omega$$

コトが limit ordinal $\omega = \text{least } \alpha \text{ such that } x \equiv y \pmod{N_\omega}$
 N_ω) $x \equiv y \pmod{N_\omega}$ for some $N_\alpha, \alpha < \omega$ $\Rightarrow N_\omega$
+ n. l. s. が定義 $\neq$ (Lemma 1), $N_\alpha \subset N_\omega$, 且
つ $N_\omega \neq E$ ($\because N_\alpha \neq E$ 即ち $I \equiv 0 \pmod{N_\alpha}, \alpha < \omega$)
である。ヨツて transfinite induction を用いた
である。

Lemma 3. $x \neq 0$ かつ x が含める maximal
n. l. s. N 存在する。

証明. $|x| \geq \alpha I, \alpha > 0$ かつ Lemma 2 から明か。
若し $\alpha > 0$ が存在しないかつ $x^+ > 0$, 且つ $x^+ \geq \alpha I$
かつ $\alpha \leq 0$ と假定しても一般性失はる。(1) コトが $\beta I \geq x^+$
+ $\beta / \inf.$ $\exists \gamma$ かつ $I \geq \frac{x^+}{\gamma}, \gamma > 0$. 然らば
 $I - \frac{x^+}{\gamma} > 0$ 且つ $(I - \frac{x^+}{\gamma})$ は定義から $\geq \delta x^+$ for
any $\delta > 0$. ヨツて $\in \{I - \frac{x^+}{\gamma}\} \geq |x|$ を満足する γ
1 全体 N の n. l. s. である。且つ x^+ が含める。然して Lemma
2 = 3, N が含める maximal n. l. s. $\neq E$ を作る

(1) $-x^-$ が x^+ の代り = 使つて。

之ハ α^+ ヲ含マヌ。(何者, α^+ ヲ含ムト $E = \text{一致して}$ 了ヲ
カラ). 従ッテ α ヲ含マヌ.

Lemma 4. N ヲ maximal n. l. d. トスレ
バ E/N ハ 實数体ト linear lattice-homomorphic
証. $E \rightarrow E/N$ デ $I \rightarrow I'$ トスル

$$E/N = \left\{ \alpha I' \right\}_{-\infty < \alpha < \infty}.$$

若シ然ラズンバ E/N ハ Lemma 2 = ヲリ n. l. d. ($\neq 0$,
 E/N)ヲ含ムコト = ナリ N ノ maximality = 反スル.

以上カラ

定理. unit I ヲ 有スル vector-lattice E
ハ E ノ maximal n. l. d. $N \neq E$ ヲ 点トスル空間 γ_E
ノ上ノ 有界函数 $x(t)$ ノ 或ル系 $F(\gamma_E)$ ノ 作ル vector-
lattice = linear lattice-isomorphic = 寫
サレ且ツ I ハ 恒等的 = 1 + ル 函数 = 寫サレル.

系. γ_E ノ 点 t_0 ノ 近傍ヲ

$\varepsilon \{ |x_i(t_0) - x_i(t)| < \varepsilon; i = 1, 2, \dots, n \}, x_i \in F(\gamma_E).$
+ ル weak (Tychonoff) topology デ 定義スル
ト γ_E ハ bicomact 且ツ 各 $x(t) \in F(\gamma_E)$ ハ γ_E デ
連續 = ナル. γ_E デノ 連続函数ノ 全体 $C(\gamma_E)$ ノ 中デ
 $F(\gamma_E)$ ハ, norm $\|x\| = \sup |x(t)|$ ノ 意味デ, 稠密
ナナル.

証明 ハ 次ノ M. Kreinノ 補助定理⁽¹⁾カラ 明デアラウ.

(1) C. R. URSS, 27 (1940), 427-430

M. Krein / 補助定理. *bicompact space*
 $\mathcal{T}$ / 上 / 連続函数 $x(t)$ / 作る *linear system*
 $F(\mathcal{T})$ が i) *function space* トシ $\Rightarrow$ *lattice* を
 作り ii) 任意 / $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$ ト任意 / 実数 $\alpha, \beta =$ 對シテ
 $x(t_1) = \alpha, x(t_2) = \alpha_2$ + 且 $x(t) \in F(\mathcal{T})$ が
 存在スル / ヲ満足スル + ラバ $\mathcal{T}$ デ連続 + 任意 / 函数ハ
 $F(\mathcal{T}) =$ 属スル函数デ一様近似セシメ得ル。

Krein / 補助定理 = ハ $x(t) \in F(\mathcal{T})$ + ラ $|x(t)| \in$
 $F(\mathcal{T})$ トシテアルガ之レハ i) ト同等。又吾々 / $F(\mathcal{T})$ が ii)
 を満足スルコトハ $\mathcal{T}$ / 作り方カラ明ラカ。尚コノ補助定理
 ノ証明ガ書イテナイ / ア難シイ / カト思フタ / デスガ、中山
 深雪 / 両氏 = オ語レタトコロ案外何デモ + イコトガワカリ
 マシタ。

鬼 = 角斯様 = シテ *unit* ヲ有スル *vector lattice* が
 表現出来テミルト角谷氏 + M. Krein / 抽象M空間ヨリ發
 分一般デアリ且ツ *essential* = ハ両氏 / ト違ハナイ / ェ
 ケレドモ、Stone / *Boolean ring* / 表現ト全ク同ジ
idea デ行ク所ガ興味ナクモ + イト思ヒマス。