OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	函數方程式　φ(x,y)＝f(x)f(y)／f(x+y) ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 212, p. 103-106
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74844
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

914. 函數方程式 $\varphi(x,y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ ニ就イテ

春木　博（阪大）

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\ (x>0),$$

$$B(x,y)=\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt\ (x>0,\ y>0)$$ ノ間ノ有名ナ関係式トシテ $B(x,y)=\frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$ ガアル。次ニ $\varphi(x,y)$, $f(x)$ ヲトモニ未知函數トシテ、若干ノ解析的性質及ビ境界條件ヲ附シテ函數方程式 $\varphi(x,y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ ノ解ヲ求メテ見ヨウ。

（假定）

(i) $\varphi(x,y)$ ハ $x>0$, $y>0$ デ定義サレタ一價有限實數値函數

(ii) $\varphi_{xx}(x,y)$, $\varphi_{yx}(x,y)$ ガ存在シテ連續デアル。

(iii) $g(x,1)=\frac{1}{x}$, $g_{xx}(x,x)\geqq g_{yx}(x,x)$, $g(x,x)\geqq 0$

(iv) $f(x)$ ハ $x>0$ デ、連續デアル。

(v) 函數方程式 (F) $g(x,y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ ガ成立スル。

(結果) $g(x,y)=B(x,y)$, $f(x)=e^{\alpha x}\Gamma(x)$ (α ハ實數)

(証明) 先ヅ $f(x)>0$ トナルコトハ (F) ニ於テ $y=x$ トオキ、(假定) (iii) ノ $g(x,x)\geqq 0$ ヲ用フレバ判ル。$f(x)$ ガ二回微分可能トナルコトヲ証明スル。(F) ヲ y ニ關シテ α ヨリ β 迄積分スレバ ($0<\alpha<\beta$)

$$f(x)\int_\alpha^\beta f(y)\,dy=\int_\alpha^\beta f(x+y)g(x,y)\,dy$$

$f(x)$ ハ連續トナル故 $g_y(x,y)=f(x+y)$ トナル $g(x,y)$ 存在スル。故ニ上式ノ右辺ニ於テ部分積分ヲ行ヘバ

$$f(x)\int_\alpha^\beta f(y)\,dy=\Big[g(x,y)g(x,y)\Big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta g(x,y)g_y(x,y)\,dy$$

$f(x)>0$ トナル故 $\int_\alpha^\beta f(y)=C\neq 0$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{C}\left\{\Big[g(x,y)\,g(x,y)\Big]_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta g(x,y)g_y(x,y)\,dy\right\}$$

上式ノ右辺ハ連續微分可能トナル故 $f(x)$ モ亦連續微分可能トナル。$f(x)$ ガ二回微分可能トナルコトハ、(F) ヲ x ガ

微分シタ式ニ於テ $f(x)$ が連續微分可能ナルコト及ビ假定 (ii) ヲ用キテ、同樣ニシテ証明サレル。

$$\varphi(x,y)=\frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$$ ヲ用ヒテ $\varphi_{xx}(x,x)\geqq\varphi_{yx}(x,x)$ ヲ書キ直セバ

$$\frac{f''(x)f(x)-f'^2(x)}{f(2x)}\geqq 0$$

$f(2x)>0$ ナル故

$$f''(x)f(x)-f'^2(x)\geqq 0$$

即チ $\log f(x)$ が凸函數デアル。

今 $f^*(x)=e^{-(\log f(1))x}f(x)$ ヲ考フレバ $f(x)$ が對數的凸函數ナルコトカラ

(i) $f^*(x)$ ハ對數的凸函數デアル。

又

(ii) $f^*(1)=1$

假定 (iii) ニヨリ

(iii) $f^*(x+1)=xf^*(x)$

Artin ノ定理 (Einführung in die theorie der Gammafunktion, 1931) ニヨリ (i), (ii), (iii) カラ

$$f^*(x)=\Gamma(x)$$

故ニ $\alpha=\log f(1)$ トオケバ

$$f(x)=e^{\alpha x}\Gamma(x)$$

$$\varphi(x, y) = B(x, y)$$

(注意) 假定 (i), (ii), (iii) ヲ充ス二次数ノ函数 $\varphi(x, y)$ トシテ, $B(x, y)$ ノ外ニ色々トアルガアラウガ、最モ簡単ナモノトシテ對稱函数ナル條件ヲ入レテ $\frac{1}{xy}$ ヲアゲルコトガ出来ル。上述ノ結果カラ例ヘバ $\frac{1}{xy} = \frac{f(x)f(y)}{f(x+y)}$ ヲ充ス連續函数 $f(x)$ ($x>0$ デ連続) ハ存在シ得ヌコトガ判ル。