



Title	Teilweise geordneter Modul ノ連続性
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 212, p. 106-118
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74845
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

915. Teilweise geordneter Modul 、連續性

中野 秀五郎

以下述ベルユトハ 既ニ知ラレテキルコトカモ知レヌ。
或ハ Birkhoff, 本ニアルノカモ知レヌガ、残念ナ
カラ Birkhoff, 本ヲ入手シテ居ラヌノデカラヌ。

Teilweise geordneter Modul M ト
シテ, 次ノ性質ヲ有スル實數体ニ關スル Modul トス
ル。 $M(a, b, \dots)$

- 1) $a > b, b > c$ ナラバ $a > c$
- 2) $a \nmid a$
- 3) a, b = 對立、 $a \vee b, a \wedge b$ が存在ス。

$$4) a > b + \epsilon \quad a + c > b + c$$

5) $a > 0, \alpha > 0$ (α は實數) + ϵ $\Rightarrow a > 0$
 + ϵ 條件ヲ有スルモノトスル。然ルトキハ一般ニハ

$$6) a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq 0 \quad + \epsilon \quad a_n \geq a_0$$

= $\forall \epsilon a_n \geq x + \epsilon$ $x = \sup, a_0 \geq x$ + ϵ が如キ a_0 ,

即チ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g. l. \text{ of } a_n$ が存在ス。

+ ϵ 條件ハ満足セズ。ソコデ恰モ有理數ヨリ實數ヲ定義
 スルゴトヲ、 M ヲ拡張シテ、(6) + ϵ 性質ヲ有シタル
 コトが出来ル。其ノ方法ニハ *Dedekind / Schnitt*
 ニヨル方法ト、*Cantor / Folge* ニヨル方法トニ通
 リアル。一般 $M = \mathbb{R}$ 、コニニ通りノ方法ハ必ずシモ同
 一結果トハナラヌ。コニテハ其ノ關係ヲ述ベテ見ヨウ。

I. *Dedekind* ノ方法 先ヅ *Dedekind* ノ
 方法ニツイテ考ヘテ見ヨウ。今 M ノ *element* ヨリナ
 ルニツノ集合 A, B が次ノ性質ヲ有スルトキ、 (A, B) ヲ
Schnitt ト云フコトヲスル。 (A, B) ハ共ニ空集合ナ
 ラズ。

$$1) x \in A, y \in B \quad + \epsilon \quad x \geq y$$

$$2) A \text{ ノ } \sup \text{ ノ } x = \sup, \text{ 常ニ } x \geq y \quad + \epsilon \quad y \in B.$$

$$3) B \text{ ノ } \inf \text{ ノ } y = \inf, \text{ 常ニ } x \geq y \quad + \epsilon \quad x \in A.$$

又 *Schnitt* $(A, B) = \mathbb{R}$ A ヲ *oberer Schnitt*,
 B ヲ *unterer Schnitt* ト呼ブコトヲスル。*(Dedekind*
ト少シ異ルが此ノ方が便利デアル)

Lemma 1. C ヲ *lower bounded* + 集合。(

$x \in C$ 十レバ $x \geq l$ 十ルが如キ l が存在スル) 十レバ C / 何レ / element $C =$ 對シ $C \geq x$ 十ル element x / 集合 B へ unter Schnitt デアル。又 C が upper bounded 十レバ C / イヅレ / element $C =$ 對シテ $C \leq x$ 十ル element x / 集合 A へ oberer Schnitt デアル。

証明. B / 何レ / element ヨリ大或ハ等シキ element / 集合 (コレハ明カニ空集合十ラス) γA トスレバ、 (A, B) ハ明カニ上 / 1), 3) γ 満足ス。又 A / 何レ / element ヨリ小或ハ等シキ element ハ C / 何レ / element ヨリ小或ハ等シキヲ以テ、 $B =$ 属ス。故ニ 2) γ 満足サレル。下半モ同様ニシテ証明サレル。

Lemma 2. Schnitt $(A, B) = \gamma$ ハ g. l. δA , $l, u, \delta B$ / 何レカ一方が存在スレバ他方モ存在シテ相等シク且ツ A 及ビ $B =$ 属ス。

証明. 若シ g. l. $\delta A = \alpha$ が存在シタトスレバ、 $\alpha \geq \gamma$ ($\gamma \in B$) 十リ。

然カモ $\alpha \geq \gamma$ ($\gamma \in B$) トスレバ $\alpha \geq \alpha \wedge \gamma \geq \gamma$ ($\gamma \in B$) 十リ。故ニ $\alpha \wedge \gamma \in A$ ト十リ、從テ $\alpha = \alpha \wedge \gamma$ 十リ。

然ツテ又 $\alpha \leq \gamma$ 。故ニ $\alpha = l, u, \delta B$ 。又 α が A 及ビ B / 何レカニ属スルコトハ明カナリ。

Schnitt / 大小ヲ次ノ如ク定義ス。

$$(A_1, B_1), (A_2, B_2) = \gamma$$

$A_1 < A_2$ (従って又 $B_1 \supset B_2$) + ルトキ

$$(A_1, B_1) \geq (A_2, B_2)$$

定理 1. *Schnitt*、集合 α が lower bounded + ルトキハ g. l. b. α が存在し upper bounded + レバ l. u. b. α が存在ス。

証明. α が lower bounded 即ち $(A, B) \in \alpha$
= 對シ

$$(A, B) \geq (A_0, B_0)$$

+ ル (A_0, B_0) が存在スルモノトスレバ

$$B \supset B_0$$

+ リ、故 = $(A, B) \in \alpha$ + ル B 、*Durchschnitt* $\supset$
 B' トスレバ、 $B' \supset B_0$ 、故 = B' ハ空集合ナラズ、然カモ
 B' ハ $(A, B) \in \alpha$ + ルモノヲ A 、和集合ヲ C トスレバ、
 C ノイザレヨリモ小或ハ等シキ element ノ全体ナルヲ以
テ Lemma 1 = ヨリ B' ハ unterer Schnitt、従
ツテ (A', B') + ル Schnitt が存在ス。 $(A, B) \in \alpha$
+ レバ 明カ = $(A, B) \geq (A', B')$ + リ。又 (A, B)
 $\geq (A'', B'')$ ($(A, B) \in \alpha$) トスレバ $B \supset B''$ 、故 = $B' \supset B''$
従ツテ $(A', B') \geq (A'', B'')$ + リ。従ツテ $(A', B') =$ g.
l. b. α 、同様 = シテ後半モ証明シ得。

Schnitt $(A, B) = \gamma$ g. l. b. $A = \alpha$ が存在スル時ハ
 (A, B) γ α = γ 表スコトスレバ

定理 2. $(A_1, B_1) > (A_2, B_2)$ + レバ $(A_1, B_1) > \alpha$
 $> (A_2, B_2)$ + ル α が存在ス。

証明. $B_1 \supset B_2 = \text{シテ}$ B_1 ト B_2 トハ同一トヲヤル $= \exists$
 $x_1 \in B_1, x_2 \in B_2$ トル x_1 が存在ス。此ノ $x_1 = \text{對シテハ}$
 $(A_1, B_1) \geq x_1 > (A_2, B_2)$

同様ニシテ $A_1 \subset A_2 \exists$ $x_2 \in A_1, x_2 \in A_2$ トル $x_2 =$
 對シテハ $(A_1, B_1) > x_2 \geq (A_2, B_2)$

故ニ $(A_1, B_1) \geq x_1 \vee x_2 > (A_2, B_2), (A_1, B_1) > x_1 \wedge x_2$
 $\geq (A_2, B_2)$. $x = \frac{1}{2} \{ (x_1 \vee x_2) + (x_1 \wedge x_2) \} = \frac{1}{2} (x_1$
 $+ x_2)$ トスルバ

$$(A_1, B_1) > x > (A_2, B_2)$$

Schnitt, 加法ハ次ノ如クニ定義ス。

$(A_1, B_1), (A_2, B_2) = \text{對シテ}$ 、定理 1 $= \exists$ $||$

$$(A_3, B_3) = g. l. b. x_1 + x_2$$

$$x_1 \in A_1, x_2 \in A_2$$

が存在ス。コレヲ X テ和トス。即チ

$$(A_3, B_3) = (A_1, B_1) + (A_2, B_2)$$

定理 3.

$$\{ (A_1, B_1) + (A_2, B_2) \} + (A_3, B_3)$$

$$= (A_1, B_1) + \{ (A_2, B_2) + (A_3, B_3) \}$$

証明. $x_i \in A_i$ ($i=1, 2, 3$) トスルバ、明カニ

$$x_1 + x_2 + x_3 \geq \{ (A_1, B_1) + (A_2, B_2) \} + (A_3, B_3)$$

$$\text{故ニ } g. l. b. (x_1 + x_2 + x_3) \geq \{ (A_1, B_1) + (A_2, B_2) \}$$

$$x_i \in A_i + (A_3, B_3)$$

$$\wedge g. l. b. (x_1 + x_2 + x_3) \leq x_1 + x_2 + x_3$$

$$x_i \in A_i$$

$$p \leq g. l. b. (x_1 + x_2 + x_3) \quad p \in M$$

$$\text{トスレバ} \quad p \leq x_1 + x_2 + x_3$$

$$\text{即チ} \quad p - x_3 \leq x_1 + x_2$$

$$\text{故ニ} \quad p - x_3 \leq \{(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\}$$

$$\text{従テ} \quad p \leq \{(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\} + (A_3, B_3)$$

$$\begin{aligned} \text{故ニ} \quad g. l. b. (x_1 + x_2 + x_3) \\ \leq \{(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\} + (A_3, B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{従ツテ} \quad g. l. b. (x_1 + x_2 + x_3) \\ = \{(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\} + (A_3, B_3) \end{aligned}$$

ヨツテ定理ハ明カニ成立ス。

以上ニテ和ハ定義サレルニ、其ノ逆トシテノ差ハ必ずシニ存在セズ。差が可能ナル爲ニハ M ハ尚次ノ性質ヲ有スル必要ガアル。

Archimedesノ公理 $p \in M$ が $p > 0$ ナル時ハ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} p = 0$ 即チ $g. l. b. \frac{1}{n} p = 0$ ナリ。

之レハ又次ノ如クニモ云ハレル。 $q \geq p > 0$ ナルトキハ、 n ヲ大ニスレバ $np \neq q$ ナリ。

以下、 M ハ Archimedesノ公理ヲ満足スルニトス。

Lemma 3. $Schnitt(A, B) = \varnothing$ ハ

$$\begin{aligned} g. l. b. x - y = 0 \\ x \in A, y \in B \end{aligned}$$

ナリ。

証明。 $x \geq y$ ヨリ $l. u. b. x - y \geq 0$ ナルコトハ

明かす。 $l. u. b. (x-y) > 0$ トスレバ、定理 2 =
ヨリ

$$g. l. b. (x-y) > p > 0$$

ナル p が存在ス。此 $p =$ 對シテハ

$$x > y + p \quad (x \in A, y \in B)$$

故ニ $y \in B$ ナラバ $y + p \in B$. 從ツテ $y + np \in B$
 $x \in A$ トスレバ

$$x > y + np \quad (n = 1, 2, \dots)$$

$$\text{從ツテ } 0 < p < \frac{x-y}{n}$$

$$\text{故ニ } g. l. b. \frac{1}{n} (x-y) \geq p > 0$$

トナリテ Archimedes の公理ニ矛盾ス。

定理 4. $(A, B) =$ 對シ、 $(-B, -A)$ ハ又 Schnitt
ヲナシ $(-A \cap x \in A =$ 對シ、 $-x$ ヨリ ナル集合)

$$(A, B) + (-B, -A) = 0$$

証明. $(-B, -A)$ が Schnitt ヲナスコトハ明か
ス。故ニ Lemma 3 = ヨリ

$$(A, B) + (-B, -A) = g. l. b. x - y = 0 \\ x \in A, y \in B$$

此定理ニヨリ減法が一意的ニ可能トナル。

又正ノ実数トスルトキハ、Schnitt (A, B) ヨ
リ $(\alpha A, \alpha B)$ トシテ、又 Schnitt ヲ得ルコトハ明か
デアル、

$$\alpha(A, B) = (\alpha A, \alpha B) \text{ ト定義ス。 } (\alpha > 0)$$

$\alpha < 0$ とスレバ

$$\alpha(A, B) = (\alpha B, \alpha A)$$

又 $0(A, B) = 0$

トス。

定理5. α, β が実数トスレバ

$$\alpha\{\beta(A, B)\} = (\alpha\beta)(A, B)$$

$$\alpha(A, B) + \beta(A, B) = (\alpha + \beta)(A, B)$$

$$\alpha(A_1, B_1) + \alpha(A_2, B_2) = \alpha\{(A_1, B_1) + (A_2, B_2)\}$$

証明. 上ノ式ハ定義ヨリ直チニ得ラレイル。

$\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ とスレバ

$$\alpha(A, B) + \beta(A, B) = g. l. b. (\alpha x_1 + \beta x_2) \\ x_1, x_2 \in A$$

$$\geq g. l. b. (\alpha + \beta)(x_1 \wedge x_2) \geq (\alpha + \beta)(A, B)$$

又 $\alpha(A, B) + \beta(A, B) \leq g. l. b. (\alpha + \beta)x$
 $= (\alpha + \beta)(A, B)$

又 $\alpha > 0$ トスレバ

$$\alpha(A, B) - \alpha(A, B) = \alpha(A, B) + ((-\alpha)B, (-\alpha)A) \\ = (\alpha A, \alpha B) + (-\alpha B, -\alpha A) = 0$$

故ニ $\alpha \geq 0, \beta < 0, \alpha + \beta \geq 0$ トスレバ

$$(\alpha + \beta)(A, B) + (-\beta)(A, B) = \alpha(A, B)$$

ヨリ $\alpha(A, B) + \beta(A, B) = (\alpha + \beta)(A, B)$

他ノ場合モ同様ナリ。

$\alpha > 0$ トスレバ, 又 $(A_1, B_1) + (A_2, B_2) = (A_3, B_3)$ ト
スレバ

又 Archimedes, 公理 (1), (2), (3), (4), (5) ト独立デアル。如何トレベル次ノ Modul ハ (1), (2), (3), (4), (5) ノ性質ハ有スルガ Archimedes, 公理ハ充タサヌ。

(a, b) (a, b real numbers)

大小無 $a_1 > a_2$, 或ハ $a_1 = a_2$, $b_1 > b_2$ ナル時ハ

$$(a_1, b_1) > (a_2, b_2)$$

$$\text{和 } (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

$$\times (a, b) = (\times a, \times b)$$

(a, b) ガ (1), (2), (3), (4), (5) テ充タスコトハ明カナリ。

然カモ $(\frac{1}{n}, 0) > (0, 1) > (0, 0)$ ($n = 1, 2, \dots$) ナリ。

定理 5. $\text{Schnitt } (A, B) = \tau$, $a_1 \geq a_2 \geq \dots$, $a_n \in A$ ナル。然カモ g. l. b $a_n = (A, B)$ ナル Folge $a_1, a_2, \dots$ ガ存在スルベ $b_1 \leq b_2 \leq \dots$, $b_n \in B$ ナル。l. u. b $b_n = (A, B)$ ナル Folge $b_1, b_2, \dots$ ガ存在ス。逆モ亦成立ス。

証明. $a_1 > a_2 > \dots$ トシテ充テアル。

$$(A_n, B_n) = 2(A, B) - a_n$$

トスルベ

$$(A_1, B_1) < (A_2, B_2) < \dots < (A, B)$$

$$\begin{aligned} \text{l. u. b } (A_n, B_n) &= 2(A, B) - \text{g. l. b } a_n \\ &= (A, B) \end{aligned}$$

定理 2 = 3 ナリ

$$(A_n, B_n) < b_n < (A_{n+1}, B_{n+1})$$

+ル b_n が存在ス。然ル時ハ $b_n \leq (A, B) = \text{シテ}$

$$\text{l. u. b. } b_n = (A, B)$$

+リ。逆モ同。

以上ノ如キ $\text{Schnitt } (A, B)$ ヲ $\aleph_0$ - Schnitt ト呼ブコトスル。

定理6. $(A_1, B_1), (A_2, B_2)$ が $\aleph_0$ - Schnitt +
レバ次ノモ亦然リ。

$$(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2), \quad \angle (A_1, B_1),$$

$$(A_1, B_1) + (A_2, B_2)$$

証明。

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots, \quad \text{g. l. b. } a_n = (A_1, B_1)$$

$$a'_1 \geq a'_2 \geq \dots, \quad \text{g. l. b. } a'_n = (A_2, B_2)$$

トスレバ、明カニ

$$\text{g. l. b. } a_n \sim a'_n = (A_1, B_1) \sim (A_2, B_2)$$

又 $\angle > 0$ トレバ ($\angle < 0$ 場合モ同様)

$$\text{g. l. b. } \angle a_n = \angle (A_1, B_1)$$

$$\text{g. l. b. } (a_n + a'_n) = (A_1, B_1) + (A_2, B_2)$$

定理7. $(A_1, B_1) \geq (A_2, B_2) \geq \dots \geq 0$ が悉ク

$\aleph_0$ - Schnitt +レバ、 $\text{g. l. b. } (A_n, B_n)$ モ亦

$\aleph_0$ - Schnitt +リ。

証明. $a_{i1} \geq a_{i2} \geq \dots, \quad \text{g. l. b. } a_{in} = (A_i, B_i)$
 $n = 1, 2, \dots$

トスレバ

$$b_i = a_{1i} \wedge a_{2i} \wedge \dots \wedge a_{ii}$$

= 對シ

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq 0$$

$$\text{然カモ } b_i \geq (A_1, B_1) \wedge \dots \wedge (A_i, B_i) \\ \geq g. l. b. (A_n, B_n)$$

$$\text{故ニ } g. l. b. b_n \geq g. l. b. (A_n, B_n)$$

$$\text{又 } g. l. b. b_i \leq a_{in} \quad (n=1, 2, \dots)$$

$$\text{故ニ } g. l. b. b_i \leq (A_i, B_i)$$

$$\text{従ツテ } g. l. b. b_n \leq g. l. b. (A_n, B_n)$$

$$\text{故ニ } g. l. b. b_n = g. l. b. (A_n, B_n) \text{ ナリ。}$$

定理. 6, 7 = ヨリ $\mathfrak{H}_0$ -Schnitt ハ又 (1) - (6) ヲ満足スル。

II. Cantor 1 方法. 此処デハ Cantor 1 方法ヲ最初カラ述べズニ Schnitt ヲ以テ論ズルコトニスル。
先ツ、次 1 Folge

$$a \left(\begin{array}{l} a_1 \geq a_2 \geq \dots \\ a'_1 \leq a'_2 \leq \dots \end{array} \right), g. l. b. a_n - a'_n = 0,$$

ヲ Element トシ、大小ヲ

$$b \left(\begin{array}{l} b_1 \geq b_2 \geq \dots \\ b'_1 \leq b'_2 \leq \dots \end{array} \right) g. l. b. b_n - b'_n = 0$$

= 對シ

$$a_n \geq b'_n \quad (n=1, 2, \dots) \text{ ナルトキ}$$

$$a \geq b$$

トシ $a \geq b$ = シテ $a \leq b$ ナルトキ $a = b$ トス。

element α = 對シ、 $g. l. b. a_n = (A, B)$ トシ
 テ一意的ニ $\mathfrak{A}_0$ -Schnitt カ對應シ、又 $\mathfrak{A}_0$ -Schnitt =
 ハ定理 5 = ヨリ $g. l. b. a_n = (A, B)$ トルガ如キ α カ存
 在スル。

故 = element α = ヨツテ $\mathfrak{A}_0$ -Schnitt ト isomorph
 + Teilweise geordneter Modul ヲ得ル。又
 Fundamental Folge ヨリ 出ルシヲモ同様ナリ。

以上ヨリ解ル如ク、 $\mathfrak{A}_0$ -Schnitt ハ M ヲ含ミ (1) - (6)
 ヲ満足スル Modul ノ最小ナルモノナリ。又 Schnitt ハ
 (1) - (6) 並ニ定理 (1) ヲ満足スル最小ノ Modul ナリ、(定
 理 2 ヨリ得ラル)

最後 = Schnitt カ必ずシモ $\mathfrak{A}_0$ -Schnitt ナラザル
 例ヲ舉ゲル。

$f(x)$ ヲ $-\infty < x < \infty$ = テ finite points ヲ除イテ
 constant ナル real function トスレバ、此等ノ全体
 ハ (1) - (5) ヲ満足スル。 $\mathfrak{A}_0$ -Schnitt トシテハ多クトモ
 可算個ノ点ヲ除キテ constant ナ function, 又 Sch-
 nitt トシテ任意ノ function ヲ得ル。

又 M カ reparable ナルトキニハ明カニ Schnitt ハ
 常ニ $\mathfrak{A}_0$ -Schnitt デアル。