



Title	可換ナ Radikal ヲ持ツ Lie環 (I)
Author(s)	安倍, 亮
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 214, p. 152-170
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74851
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

921. 可換 + Radikal を持つ Lie 環 (I)

安倍 亮 (東大)

準単純 + Lie 環 = ツイテハ Cartan 以来 カナリ 精シ
イコトが知ラレタキル。準単純 + Lie 環, 即チ Radikal
ノアル Lie 環 = ツイテ知ラレタキル一般ノ定理ハ
先ツ

「Leviノ定理. 標数 0ノ基礎体 P ノ上ノ Lie 環
ヲ R , ソノ Radikal 即チ最大可解 Ideal) ヲ $\mathfrak{r}$ ト
セバ

$$R = \mathfrak{s} + \mathfrak{r}, \quad \mathfrak{s} \cong R/\mathfrak{r}$$

ナル如キ準単純部分環 $\mathfrak{s}$ ガアル」

ガケデアラウ。Radikalノアル Lie 環 = ツイテ, 之レ以
上 = モウ少シ立入ツテ考ヘテ見ヨウト思ヘバ, 先ヅ一番簡單
ナハ Radikalガ可換, 即チ $\mathfrak{r}' = \mathfrak{r}$ 。 $\mathfrak{r} = 0$ ノ場合
デアアル。コノ様ナ Lie 環トレテドンナモノガアルカハ, 單
純環ノ分類ト (準単純環ノ) 総ベテノ既約表現ノ知識¹⁾ トカ
ラ完全ニ答ヘラレル事ハ, Leviノ定理ヲ使ヘバ容易ニ分ル。

1) 準単純環ノ総テノ既約表現ハ, 少クト基礎体ガ代数的閉体
ノトキニハ後ニ述ベル様ニ, 其ノ單純成分ノ総テノ既約表現ガ
分レバ, ソレカラ分ル。併シ基礎体ガ一般ガトハッキリ分
ラナイ。即チ單純環ノ既約表現ガワカレバイト云ヒ切ル
コトが出来ナイ。ソコデ括弧シテ (準単純環) ト附加ヘ
タノデアアル。

次 = Levi の分解 $\mathcal{R} = \mathcal{F} + \mathcal{N}$ = 於テ $\mathcal{F}$ は一般 = 一意的デハ + イガ, 然ラバ $\mathcal{F}$ トシテ $\mathcal{N}$ ナ部分環が出テ来ルカガ問題 = ナル。少クトモ $\mathcal{N}' = 0$ ノ場合 = ハ $\mathcal{R} = \mathcal{F} + \mathcal{N}$, $\mathcal{R} = \mathcal{F}_1 + \mathcal{N} + \mathcal{L}$ ニツノ分解ガイレバ, $\mathcal{F}$ ヲ $\mathcal{F}_1$ = 持ッテ行ク $\mathcal{R}$ ノ Automorphismus ガアルコトハ容易 = ナル。然ッテコノ場合 = ハ, Levi ノ分解ハ Isomorphie ヲ除イテ一意的デアル。

更 = コノ問題ヲ推シ進メテ $\mathcal{R}$ ノスベテノ Automorphismus ヲ決定スルコトガ出来ル。コノトキ 導單純環ノ Automorphismus ト表現トノ關係ニツイテ興味アル問題が出テ来ル。即チ $\mathcal{F}$ ノ Automorphismus $S \rightarrow S^A$ ト $\mathcal{F}$ ノ表現 $S \rightarrow \mathfrak{a}^{\mathcal{F}}(S)$ ガアルトキ, 表現 $S \rightarrow \mathfrak{a}^{\mathcal{F}}(S^A)$ ハドウナルカト云フコト, 特ニニツノ表現 $\mathfrak{a}^{\mathcal{F}}(S)$ ト $\mathfrak{a}^{\mathcal{F}}(S^A)$ ガ同値ニナル條件等。

之等ノ事ニツイテ考ヘテ見タイ。

1. 可換 + Radikal ヲ持ッ Lie 環ノ構造

基礎体 P ハ今後断ラナクテモ標數 0 ノ体トスル。具體的ノ問題デハ, P ヲ代數的閉体, 或ハ更ニ複素數体トシナケレバ + フ + イコトモアルガ, 一般 = ハ標數 0 ノ任意ノ体トシテオク。

$\mathcal{R}$ ヲ P ノ上ノ Lie 環, $\mathcal{N}$ ノ Radikal 初ハ今後常ニ可換 + モノトスル。即チ

$$\mathcal{N}' = \mathcal{N} \circ \mathcal{N} = 0$$

Lie の定理ニヨリ

$$\mathcal{R} = \mathcal{P} + \mathcal{N}$$

ナル準単純部分環 $\mathcal{P}$ がアル。 $\mathcal{P} = (u_1, \dots, u_r)$,
 $\mathcal{N} = (v_1, \dots, v_g)$ トスレバ $\mathcal{R}$ の構造ヲ與ヘル式ハ

$$(1.1) \quad u_i \circ u_j = u_k C_{ij}^k, \quad v_\alpha \circ v_\beta = 0, \\ u_i \circ v_\alpha = v_\beta d_{i\alpha}^\beta; \\ C_{ij}^k, d_{i\alpha}^\beta \in P; i, j, k = 1, \dots, r; \alpha, \beta = 1, \dots, g. \quad 2)$$

$$(1.2) \quad D_i = [d_{i\alpha}^\beta] \quad (d_{i\alpha}^\beta \text{ ハ } \beta \text{ 行 } \alpha \text{ 列ノ元})$$

ナル g 行 g 列ノ Matrix トスレバ, $u_i \alpha^i \rightarrow D_i \alpha^i$ ハ $\mathcal{P}$ ヲ表現加群トスル $\mathcal{P}$ ノ表現デアアル。 $\mathcal{N}$ が可換デカラ,
 $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ ノ表現ト考ヘルコトモ出来ル。

逆ニ $\mathcal{P} = (u_1, \dots, u_r)$ ヲ任意ノ準単純 Lie 環
 (1.1) ノ最初ノ式ヲソノ構造, $\alpha^j: u_i \rightarrow [d_{i\alpha}^\beta]$ ヲ其ノ
 一ツノ表現トスレバ, (1.1) デ構造ヲ定義スルコトニヨリ,
 可換 + Radikal ヲ有スル Lie 環 $\mathcal{R} = (u_1, \dots, u_r;$
 $v_1, \dots, v_g)$ が出来ル。之レヲ $\mathcal{R}(\mathcal{P}; \alpha^j)$ ト書クコト
 ニシヨウ。

$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathcal{P}; \alpha^j)$ ト $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}(\mathcal{P}_1; \alpha_1^j)$ トハ $\mathcal{P} \cong \mathcal{P}_1$
 ナ且ツ ($\mathcal{P} \cong \mathcal{P}_1$ = 基キ $\mathcal{P}$ ト $\mathcal{P}_1$ ヲ適當 = identifizieren シ

2) 今後ローマ字ノ Index ハ 端 = u ノ Index, ギリシア字ノ Index ハ
 端 = v ノ Index ヲ表ハスモノトスル。ニ度アラハレル Index ハ
 ローマ字デアアルカ ギリシア字デアアルカニ依ヒ夫々 $1, \dots, r$
 ナハ $1, \dots, g$ ヲ動カシテ加ヘ合セルモノトスル。

タトキ) $\varrho\mathcal{J}$ と $\varrho\mathcal{J}_1$ が同値ナラバ, $\mathcal{P}$ -Modul $\mathcal{M}$ ト $\mathcal{P}_1$ -Modul $\mathcal{M}_1$ が $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{P}_1$ - 作用同型ニ對應スルカラ, 同型デアアル。

$\mathcal{P} = \mathcal{P}_1$ ナルトキ即チ $\mathcal{R}(\mathcal{P}; \varrho\mathcal{J})$ ト $\mathcal{R}(\mathcal{P}; \varrho\mathcal{J}_1)$ トが同型ナルタメニハ然レ $\varrho\mathcal{J}$ ト $\varrho\mathcal{J}_1$ ハ必ずレモ同値デアナクテモヨイ, 即チ A ヲ $\mathcal{P}$ ノアル自己同型トレテ $\mathcal{R}_1$ ノ $\mathcal{P}$ ト $\mathcal{R}_1$ ノ $\mathcal{P}$ トヲ $S^A \leftrightarrow S$ = 従ツテ對應サセタトキ, 表現 $S \rightarrow \varrho\mathcal{J}(S^A) = \varrho\mathcal{J}^A(S)$ ト $S \rightarrow \varrho\mathcal{J}_1(S)$ が同値ナラバ, $\mathcal{R}$ ト $\mathcal{R}_1$ ハ同型デアアル。ソコデ自ラ次ノ定義ニ導カレル:

定義. $\mathcal{O}$ ヲ Lie 環 (スハ群, Algebra 等) $\mathcal{P}$ ノ Automorphismen ノ一ツノ群トスル. $\mathcal{P}$ ノニツノ表現 $\varrho\mathcal{J}, \varrho\mathcal{J}_1$ = 對シ

$$\varrho\mathcal{J}^A \sim \varrho\mathcal{J}_1$$

ナル $\mathcal{O}$ ノ Automorphismus A がアルナラバ, 即チ

$$\varrho\mathcal{J}(S^A) = L^{-1} \varrho\mathcal{J}_1(S) L, \quad S \in \mathcal{P}$$

ナル A ト $|L| \neq 0$ ナル行列 L がアルナラバ, $\varrho\mathcal{J}$ ト $\varrho\mathcal{J}_1$ トハ $\mathcal{O}$ -äquivalent デアルト云フ。³⁾

コノ定義ニヨレバ, (A) ヲ $\mathcal{P}$ ノ Automorphismen 全体

3) $\mathcal{P}$ が群又ハ algebra, 時, ソノ内部同型ノ群ヲ $\mathcal{J}$ トスレバ, 表現ノ $\mathcal{J}$ -äquivalenz ハ普通ノ äquivalenz ト一致スル. $\mathcal{P}$ が実数体又ハ複素数体, 上, Lie 環ナル時モ所謂「内部同型」ノ群ニ就テ同シ事カ云ヘル。コノ事ハ後ニ述ベル。

又 $GL(n, P)$ ノ既約表現中互ニ kontragredient ナニツハ, 一般ニ同値デアハイガ (A)-äquivalent デアル。之モ後ニ述ベル。

1 群トスルトキ, $\mathcal{R}(\mathfrak{g}; \mathfrak{a}) \cong \mathcal{R}(\mathfrak{g}; \mathfrak{a}')$ + ルタメ =
 ハ $\mathfrak{g}$ の表現 $\mathfrak{a}, \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{h}(A)$ -äquivalent デアレバヨ
 イ。故 =

定理 [1.1] 可換 + Radikal $\mathfrak{p}$ ヲ上ノスベテ
 1 Lie 環ヲ求メルコトハ

i) $\mathfrak{p}$ 上ノ然テノ準單純環ノ決定。

ii) $\mathfrak{p}$ 上ノ各準單純環 $\mathfrak{g}$ ノ $\mathfrak{p} =$ 於ケル總テノ表現 (類)
 ノ決定。

iii) $\mathfrak{g}$ ノ $\mathfrak{p} =$ 於ケル表現全体ヲ $\mathfrak{h}(A)$ -äquivalent +
 $\mathfrak{p}$ ノノ類ニ分ケル事。

1 三ツニ帰着スル。

i) = 就テ. $\mathfrak{p}$ 上ノ準單純環ハ $\mathfrak{p}$ 上ノ單純環ノ直和
 デアル。従ツテ單純環ノ分類ヲスレバヨイ。周知ノ通り之
 レハ $\mathfrak{p}$ が代数的閉体若クハ実閉体ノトキハ完全 = (Killing-
 Cartan), 其他ノ場合ニ大部分 (Landherr-Jacobson)
 数ヘ上ゲラレテ居ル。

ii) = 就テ. 準單純環ノ表現ハ完全可約デアル。従ツテ
 既約表現ハ全部分レバヨイ。⁴⁾ $\mathfrak{p}$ が代数的閉体ノトキハ,

4) 特ニ $\mathfrak{p}$ が $\mathfrak{p}$, minimal + Ideal + $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}$ ハ始メカラ
 既約デアル。コノヤウナ Radikal $\mathfrak{p}$ 持ツ Lie 環ヲ考ヘル
 コトニヨツテ, 準單純環ノ既約表現ヲ論ズルコトが出来ル。
 Cartan, Thèse, 既約表現ヲ論ビタ第ハ章, 題ガ

"Groupes n'admettant qu'un sous-groupe invariant
 intégrable" トナツテ居ルハコノ故デアル。

單純環ノ既約表現 = 帰着スル。何トナレバ

「 $\mathfrak{f}$ ヲ單純環 $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_s$ ノ直和, $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_s$ ヲ夫々 $\mathfrak{f}_1, \dots, \mathfrak{f}_s$ ノ既約表現トスレバ, $\mathfrak{g}_1, \dots, \mathfrak{g}_s$ ノ直積ナル $\mathfrak{f}$ ノ表現 $\mathfrak{g}$ ハ既約, 逆ニ $\mathfrak{f}$ ノ既約表現ハ総テ此形ニナル。但 P ハ代数的閉」

(爰ニ, 例ヘバ $\mathfrak{f}_1$ ノ g 次ノ表現 $\mathfrak{g}_1$ ト, $\mathfrak{f}_2$ ノ h 次ノ表現 $\mathfrak{g}_2$ ノ直積トハ $S_1 + S_2 \rightarrow \mathfrak{g}_1(S_1) \times E_h + E_g \times \mathfrak{g}_2(S_2)$ $S_i \in \mathfrak{f}_i$ (X-号ハ Kronecker-Produkt) + $uvgh$ 次ノ表現ノ事, 即チ無限小演算子ノ二作ツタ積表現ノ事ナル。証明ハ略ス)

代数的閉体ノ場合ノ單純環ノ既約表現ハ之亦 Cartan が完全ニ求メテ居ル。⁵⁾ 従ツテ ii) モ完全ニ解カレテキル譯ナル。

P が一般ノ場合デモ

「 P ノ上ノ Lie 環 $\mathfrak{f}$ ノ P ニ於ケル既約表現ハ, $K \supset P$ ナル或ル K ニ於ケル $\mathfrak{f}$ ノアル 絶對既約表現ニ於テ行列ノ K ノ Element γ ノ K/P ノ正規表現デ置キカヘテ得ラレル表現ト同値ナル。」⁶⁾

5) Cartan: Les groupes projectifs qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane, Ann. École Norm. Sup. 31 (1914)

6) E. Bannow. Die Automorphismengruppen der Cayley-Zahlen, Abh. Math. Sem. Hamburg 13 (1940), 250 頁参照。

但証明ハシテナイ。此定理及 Cartan 定理ニ就テハ別ノ機會ニ述ベタイ。

P^* は P 上ノ代数的閉体トスレバ, $\mathfrak{f}$ ノ K = オケル絶對既約表現 $\mathfrak{q}$ $\mathfrak{f}$ P^* / P^* = オケル既約表現 $\mathfrak{q}^*$ = 拡張ヲキル。 $\mathfrak{q}^*$ ハ既述ノ如リ, 完全ニ分ツテ居ル。之カラ逆ニ $\mathfrak{q}$ トシテドノ様ナモノガ有リ得ルカヲ求メルノハ, P^* 上ノ單純環ヲ全部知ツテ, 之カラ P 上ノ單純環ヲ全部求メルノト略々同様ノ問題ナルガ, 更ニ難カシイカラウト思フ。7)

iii) = ツイテハ第四節ニ述ベル。之レモ P が複素數体ノ場合ハ完全ニ分ル。

Radikal $\mathfrak{r}$ $\mathfrak{f}$ -modul トシテ既約+modul, 直和ニ分ケ, 其ノ中零表現ヲ vermitteln シタイモノ, 直和ヲ $\mathfrak{r}_1$, 零表現 = 相當スルモノノ直和ヲ $\mathfrak{r}_2$ トスル。 $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2$. $\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{f}$ ハ明カ = $\mathfrak{R}$ / Zentrum = 他ナラナイ。

(Zentrum $\mathfrak{f}$ トセバ, $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{r}_2 = 0$, $\mathfrak{r} \circ \mathfrak{r}_2 = 0$ ヨリ $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{r}_2 = 0$ $\therefore \mathfrak{r}_2 \subset \mathfrak{f}$. 逆 = $\mathfrak{f}$ ハ $\mathfrak{R}$ / 可解 Ideal $\mathfrak{f}$ カラ $\subset \mathfrak{r}$, 而モ $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{f} = 0$ カカラ $\mathfrak{f} \subset \mathfrak{r}_2$, $\therefore \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{f}$) コノトキ $\mathfrak{f} + \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{R}$ / Ideal ナラツテ, 従ツテ $\mathfrak{R} = \mathfrak{f} + \mathfrak{r}_1$ / Ideal, 直和ナアル。又 $\mathfrak{f}$ / $\mathfrak{r}_1$ = オケル表現ハ零表現ヲ含マナイカラ $\mathfrak{f} \circ \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_1$, (証明: $\mathfrak{r}_1 = \sum m_i$ $\mathfrak{f}$ 既約+ $\mathfrak{f}$ -modul $\mathfrak{f}$ 分解トスル。零表現ガナイカラ $\mathfrak{f} \circ m_i \neq 0$, 之ハ m_i / zulässig + Teilmodul ナ, 且ツ m_i ハ既約カカラ $\mathfrak{f} \circ m_i = m_i$),

7) P が實數ノ場合ハ Cartan が完全ニ決定シテ居ル。

$$\therefore f \circ n_i = \sum f \circ m_i = \sum m_i = n_i, \text{ g. e. d.)}$$

故に $f \circ f = f$ を考へ合セルト

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_1 &= (n_1 + f) \circ (n_1 + f) \supset f \circ n_1 + f \circ f \\ &= n_1 + f = \mathcal{R}_1, \end{aligned}$$

ヨリ

$$\mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1,$$

即ち $\mathcal{R}_1$ は vollkommen ナナル。又

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = (f + \mathcal{R}_1) \circ (f + \mathcal{R}_1) = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_1,$$

ヨリ $\mathcal{R}_1$ は $\mathcal{R}_1$ ableitung = 他ナラナイコトが分ル。

以上ヲ纏メテ

定理 [1.2] 可換ナ Radikal を持ツ Lie 環 $\mathcal{R}$ ハ
 1) Zentrum $\mathcal{Z}$ ナ Ableitung $\mathcal{R}'$ ナ 直和ナル。
 (Ideal, 直和!);

$$\mathcal{R} = \mathcal{Z} + \mathcal{R}', \quad \mathcal{Z} \circ \mathcal{Z} = 0, \quad \mathcal{Z} \circ \mathcal{R}' = 0.$$

$\mathcal{R}'$ は vollkommen 即ち $\mathcal{R}' \circ \mathcal{R}' = \mathcal{R}'$, 又 $\mathcal{R}'$,
 Zentrum は (0), 従ッテ $\mathcal{R}'$, Radikal ナル, ト
 スレハ $\mathcal{R}'/\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_1$ = 生ズル表現ハ 零表現ヲ含マナ
 イ。

系. $\mathcal{R}$ が可換ナ Radikal を持ツ Lie 環ナルトキ,

i) $\mathcal{R}$, Zentrum = (0) ナル事.

ii) $\mathcal{R}$ が vollkommen ナル事, 即ち $\mathcal{R}' = \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$

iii) $\mathcal{R} = \mathcal{R}(f; g)$, g が 零表現ヲ含マヌ事。

之等ハ同値ナル。

$\mathcal{Z}$ ハ 可換ナ Lie 環ナカラ 極メテ 尙卑ナル。essential

+1) $\mathcal{R}'$ デ之ハ上ノ系ノ i) ii) iii) ヲ満足シテ居ル。

2. 可換 + Radical ヲ持ッ Lie 環, 自己同型

$\mathcal{R}$ Automorphismus A ヲ考ヘヨウ。 A ハ $\mathcal{R}$,
Ableitung $\mathcal{R}'$ ヲ $\in$ Zentrum $\mathcal{Z}$, ヲモ自分自身=
ウツスカラ, $\mathcal{R} = \mathcal{R}' + \mathcal{Z}$ Autom. A ハ $\mathcal{R}'$ 勝手
+ Autom. ト $\mathcal{Z}$ 勝手 + Autom. ヲ組合セタモノ=
過ギナイ。而モ $\mathcal{Z}$ Autom. ハ全然勝手 + (non-
singular +) 一次変換デアッテ問題ニナラナイカラ,
 $\mathcal{R}'$ Autom. ガ考ヘレバヨイ。従ッテ $\mathcal{R}'$ 代リ = $\mathcal{R}$
ト書き, $\mathcal{R}$ ハ始メカラ前節系ノ條件ヲ満シ, $\mathcal{R}/\mathcal{R}'$ ノ $\mathcal{R}'$ =
於ケル表現ハ零表現ヲ含マナイモノトシテ差支ヘナイ。

扱テ $\mathcal{R}$ Autom. A ハ Radical $\mathcal{R}'$ invariant
= スルカラ, 之ハ $\mathcal{R}/\mathcal{R}' (\cong \mathcal{R}')$ Autom. $\bar{A}$ ヲ生ズル。
 A 全体ノ群 (A) ノ中デ $\bar{A}^0 = E$ (恒等変換) ナル A^0 全体
(A^0) ハ Normalteiler ヲナシ,

$$(A)/(\mathcal{R}') \cong (\bar{A})$$

$\bar{A}$ 全体ノ作ル群 ($\bar{A}$) ハ $\mathcal{R}/\mathcal{R}'$ Autom. ノ群デアル
ガ, 後ニ述ベル様 = $\mathcal{R}/\mathcal{R}'$ Autom. 全体ノ群デアルカ
ドウカハ分ヲナイ。

(1) Automorphismus A^0 .

A^0 = 對シテハ $\bar{A}^0 = E$, 即チ $A^0 u_i \equiv u_i (\mathcal{R}')$ 又
 $A^0 \mathcal{R}' = \mathcal{R}'$ カカラ, A^0 ハ次ノ様ナ形ニナル:

$$(2.1) \quad A^0: A^0 u_i = u_i^* = u_i + v_\alpha + t_{i,\alpha}^\alpha, \quad A^0 v_\alpha =$$

$v_\alpha^* = v_\beta S_\alpha^\beta$. A^0 は Autom. デアルカラ $u_i^* =$ 對シ
テモ

$$u_i^* \circ u_j^* = u_k^* C_{ij}^k$$

デナケレバナラナイ。 (1.1) ト (2.1)ヲ使ツテ精シク書
ケバ

$$u_k C_{ij}^k + v_\beta d_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha - v_\beta d_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha = u_k C_{ij}^k + v_\beta t_k^\beta C_{ij}^k,$$

即チ

$$d_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha - d_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha = t_k^\beta C_{ij}^k,$$

或ハ纏メテ書クトトハ

$$(2.2) \quad D_i t_j - D_j t_i = t_k C_{ij}^k, \quad t_i = \begin{bmatrix} t_i^1 \\ \vdots \\ t_i^2 \end{bmatrix}$$

ノ解デアル。 $u_i^* \circ v_\alpha = u_i \circ v_\alpha$ デアルカラ, コノ t
ヲ用ヒテ作ル。

$$(2.3) \quad A^{00}: \quad A^{00} u_i = u_i + v_\alpha t_i^\alpha, \quad A^{00} v_i = v_i$$

モ $\mathcal{R}$ ノ Autom. デアル。 A^{00} ノ全体 (A^{00}) ハ $\mathcal{R}$ ノ元
ヲ elementweise = 不変 + シタル (A^0) ノ Autom.
全体ノ群デアツテ, 容易 = 今ル様 = (A) ノ normalteiler
ヲナス。

ソレハ (2.2)ノ解ノ空間ト isomorph + Vektor-
gruppe ヲナシテ居ル。 (2.2)ノ解トシテハル
トモ

$$(2.4) \quad t_i = D_i w, \quad w = \begin{bmatrix} w^1 \\ \vdots \\ w^r \end{bmatrix}$$

がアル。但し w は任意, $Vektor$ デアル。之レが解ナルコトハ, $u_i \rightarrow D_i$ が表現デアッテ $D_i D_j = D_j D_i = D_k C_{ij}^k$ ヲ満足スルコトカラ分ル。實ハ之以外 = (2.2)ノ解ハナ^{1.8)} 而モ $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ ノトキハ, 任意ノ解ハ唯一通リノ w デ (2.4)ノ形ニ表ハサレ, 従ッテ $Vektor$ 空間 (A^0) ハ丁度 g 次元デアアル。之等ノ事ハ次節デ証明スル。

備元ニ戻ッテ與ヘラレタ A^0 カラ, (2.3)ノ如ク A^0 ヲ定義シタトキ, $A^S = A^0 (A^0)^{-1}$ 即チ

$$(2.5) \quad A^S: \quad A^S u_i = u_i, \quad A^S v_\alpha = v_\beta S_\alpha^\beta$$

モ $\mathcal{R}$ ノ $Autom.$ デアル。

$A^S(u_i \circ v_\alpha) = A^S u_i \circ A^S v_\alpha = u_i \circ A^S v_\alpha$ デカラ A^S ハ $\mathfrak{g}$ ニ對シテハ, $\mathfrak{g}$ -Operator automorphism デアル。即チ $S = [S_\alpha^\beta]$ (β 行 α 列)ト書ケバ

$$(2.6) \quad D_i S = S D_i, \quad i = 1, \dots, r$$

即チ S ハ表現 $\mathfrak{g}$ ハ總テノ行列ト可換デアアル。

3) 此事ハ小生ノ談話「Lie algebra = 関スル Leviノ定理」(本誌第204号)ノ最後ノ脚註14) = 豫想トシテ著イラオイタガ實際 Whitehead: Certain equations in the algebra of semi-simple infinitesimal group, Quart. J. of Math. 8 (1937)ヲ後カラ讀ンデ見タ所カ、其ノ第二節ノ内容ハ正ニ此事デアッタ。

$\mathfrak{A}$ は完全可約デアルカラ, (2.6) を満足スル S の全体ハ P 上 $halbeinfach + algebra$ $\mathfrak{A}$ となス。其ノ逆デアル元 S を任意ニ取レバ, ソレカラ (2.5) = 依ツテ定義シタ A^S ハ $\mathfrak{A}$ Autom. デアル。故ニ $algebra$ $\mathfrak{A}$ ノ逆ノアル元全体ノ乗法群ヲ (S) トセバ

$$(2.7) \quad (A^0)/(A^{00}) \cong (S)$$

デアル。

$\mathfrak{A}$ ハ Schiefkörper 上ノ Matrizenring ノ幾ツカノ直和デアルカラ, (S) ハ Schiefkörper 上ノ volle lineare Gruppe ノ幾ツカノ直積デアル。(特ニ $\mathfrak{A}$ が既約ナラ $\mathfrak{A}$ ハ P 上ノ Divisionsalgebra デ, (S) ハソノ 0 以外ノ元ノ乗法群, $\mathfrak{A}$ が絶対既約ナラ $\mathfrak{A} = P$ デアル)

結局 Autom. A^0 7, $u_1, \dots, u_r; v_1, \dots, v_g$ 7 Basis トシテ行列トシテ書クト次ノ様ニナル。(2.3), (2.5), (2.5) ヨリ

$$(2.8) \quad A^{00} = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ T & E_g \end{bmatrix}, \quad T = [t_1, \dots, t_r] = \begin{bmatrix} t_1^1, \dots, t_r^1 \\ \dots \dots \dots \\ t_1^g, \dots, t_r^g \end{bmatrix}$$

$$A^S = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ 0 & S \end{bmatrix}, \quad \text{一般ノ } A^0 \wedge A^0 = \begin{bmatrix} E_r & 0 \\ T & S \end{bmatrix}$$

(II) $\bar{A} \neq E$ ナル Automorphism.

$(A)/(A^{00})$ ノ各 Klasse ノ代表 $\hat{A}$ 7 $\hat{A}f' = f' + \text{ル様ニ}$ 取ルコトが出来る。

$\therefore$ 一般 = Autom. A を取ッタトキ, $A\mathcal{G} = \mathcal{G}^*$,
 $AS = S^*$, $S \in \mathcal{G} = \text{トッタトスル}$. $\mathcal{R} = \mathcal{G} + \text{モテアル}$
 カラ, $S^* \equiv S^0(\mathcal{R})$ ナル $S^0 \in \mathcal{G}$ が唯一ツキマシ。
 $\mathcal{R} = \mathcal{G}^* + \text{モテモアルカラ}$, $S^* \rightarrow S^0$ / 對應ハ一對一,
 従ッテ S^* を通ッテ S ト S^0 / 對應ハ一對一デアアル。
 若シ $S_1\alpha_1 + S_2\alpha_2 = S_3$ ($S_i \in \mathcal{G}$) ナラ $S_1^*\alpha_1 + S_2^*\alpha_2$
 $= S_3^*$ 従ッテ $S_1^0\alpha_1 + S_2^0\alpha_2 \equiv S_3^0(\mathcal{R})$. 然ルニコノ合同式ノ
 両辺共 $\mathcal{G}$ へ属シ, 而ニ $\text{mod } \mathcal{R}$ / 代表ハ $\mathcal{G}$ /
 中デ一意的ナカラ $S_1^0\alpha_1 + S_2^0\alpha_2 = S_3^0$. 全ク同様ニ
 $S_1 \circ S_2 = S_3$ ナラ $S_1^0 \circ S_2^0 = S_3^0$ デアル。従ッテ $S \rightarrow S^0$
 ハ $\mathcal{G}$ / Autom. をナス。

(2.9) $\hat{A}$: $\hat{A}S = S^0$, $\hat{A}v = Av$, $S \in \mathcal{G}$, $v \in \mathcal{R}$
 ト定義スレバ, $\hat{A}$ ハ $\mathcal{R}$ / Autom. = ナル。 $\mathcal{G}$ / Autom.
 = ナルコトハ既ニ云ツタカラ, $\hat{A}(S \circ v) = \hat{A}S \circ \hat{A}v$ を
 云ヘバヨイ。 $S \circ v \in \mathcal{R}$, $S^* \equiv S^0(\mathcal{R})$ ナカラ

$\hat{A}(S \circ v) = A(S \circ v) = AS \circ Av = S^* \circ Av = S^0 \circ Av$
 $= \hat{A}S \circ \hat{A}v$ 即チ $\hat{A}$ ハ Autom.

ソコデ $A = A^{00}\hat{A}$ トオケバ, $A^{00} \in \text{Autom.}$ ナラ $A^{00}S^0$
 $= S^* \equiv S^0(\mathcal{R})$, $A^{00}v = v$.

即チ A^{00} ハ $\text{mod } \mathcal{R}$ / Klasse を変ヘズ, $\mathcal{R}$ を
 elementwise = 変ヘタイカラ $A^{00} \in (A^{00})$. $\therefore$ 任意
 A ハ $\hat{A}\mathcal{G} = \mathcal{G}$ ナル $\hat{A} = \text{mod } (A^{00})$ デ kongruent
 デアル。 g. e. d. ((A^{00}) ハ normalteiler デアル
 カラ $A = \hat{A}A^{00}$ / 形ニモ書ケル)

故 $= \hat{A} \phi = \phi + \text{ル} \hat{A} \text{ヲ考ヘヨウ。}$

$$(2.9) \quad \hat{A}: \quad \hat{A}S = \bar{A}S = S^*, \quad S \in \phi; \quad \hat{A}v_\alpha = v_\beta l_\alpha^\beta \\ = v_\alpha^*$$

($\bar{A}$ ハ元來 $\mathcal{R}/\mathcal{N}$ Autom. デアルが, 幾デハ $\mathcal{R}/\mathcal{N} \leftrightarrow \phi$ 対応 = ヨリ ϕ Autom. トシテ考ヘテ居ル。)

$$S \circ v_\alpha = v_\beta \alpha_\alpha^\beta, \quad [\alpha_\alpha^\beta] = \vartheta(S) + \text{ル} S^* \circ v_\alpha^* \\ = v_\beta^* \alpha_\alpha^\beta = \text{ル答デアル。} \quad S^* \circ v_\alpha^* = S^* \circ v_\beta l_\alpha^\beta \\ = v_\alpha \vartheta(S^*) \gamma_\beta l_\alpha^\beta, \quad v_\beta^* \alpha_\alpha^\beta = v_\alpha l_\beta^\gamma \alpha_\alpha^\beta \text{ カカラ,} \\ L = [l_\alpha^\beta] \text{ ト書ケル}$$

$$(2.10) \quad \vartheta(\bar{A}S)L = L\vartheta(S), \quad |L| \neq 0$$

(2.10) カ $L =$ 就テ解ケル様ナ $\bar{A}$, 即チ $\vartheta^{\bar{A}} \sim \vartheta + \text{ル} \bar{A}$ ハ ϕ Autom. / 全体 / 中デ Untergruppe ヲナス。夫ヲ ($\bar{A}$) トスル。解ケル場合ニハ L ハ表現 / スベテノ行列ト可換ナ行列 $S \in (S)$ ヲ除イテ一意的ニ決ル。即チ $L\bar{A}$ ヲ一ツノ解トスレバ $(S)L\bar{A} = L\bar{A}(S)$ カ総テノ解ヲアラハス。 $\text{mod}(A^0)$ 代表 $\bar{A}$ ハ Matrix トシテ書イテ

$$(2.11) \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ 0 & SL_{\bar{A}} \end{bmatrix}$$

結局, $\mathcal{R}$ / 一般 Autom. A ハ Matrix トシテ書イテ ((2.8), (2.11) ヨリ)

$$(2.12) \quad A = A^0 \hat{A} = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ T\bar{A} & SL_{\bar{A}} \end{bmatrix}$$

コトニ

a) $\bar{A}$ ハ $\vartheta^{\bar{A}} \sim \vartheta + \text{ル如キカ}$ Autom

b) $SL_{\bar{A}} \wedge a^{\mathcal{J}}(\bar{A}S) = L a^{\mathcal{J}}(S) L^{-1}$ を満足スル任意
 L .

$$c) T = [t_1, \dots, t_r] = \begin{bmatrix} t'_1 & \dots & t'_r \\ \vdots & & \vdots \\ t''_1 & \dots & t''_r \end{bmatrix} \wedge$$

$$D_i t_j - D_j t_i = t_k C_{ij}^k, \text{ 解.}$$

c) = 就イテハ次節ヲ, a) = ツイテハ第4節ヲ考ヘル。

[定理] 2. $\mathcal{R}$ ハ可換 + Radikal ヲ有シ voll-
 kommen ($\mathcal{R}' = \mathcal{R}$) + Lie 環トスル。

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(f; a^{\mathcal{J}})$$

$\mathcal{R}$ / Automorphismen 全体 / 群 (A) / 中ヲ

(A⁰): mod $\mathcal{R}$ / 剰餘類ヲ変ヘ + Automorphis-
 men / 作ル Normalteiler

(A⁰⁰): $\mathcal{R}$ / 元ヲ elementweise = 変ヘ + (A⁰) /
 Automorphismen / 作ル Normalteiler

トスルト:

i) $(A)/(A^0) \cong (\bar{A}) = a^{\mathcal{J}\bar{A}} \sim a^{\mathcal{J}} + \mathcal{R} f'$ / Autom. $\bar{A}$
 / 群.

ii) $(A^0)/(A^{00}) \cong (S) =$ 表現 $a^{\mathcal{J}}$ ト可換 + matrix /
 準單純環 $\mathcal{R}$ / 中, 逆 / 有ル元 / 乘法群 (Schief-
 körper / 上, volle lineare Gruppen
 / 直積)

iii) $(A^{00}) \cong \mathcal{R}$ ト同次元 / Vektor 群。

$$3. \text{ 方程式 } D_i t_j - D_j t_i = t_k C_{ij}^k$$

次ノ定理ハ Whitehead, l.c. (附註 8) 参照) =
アル⁹⁾:

定理 [3.1] $\mathfrak{g} = (u_1, \dots, u_r)$ が単純 Lie 環
デ, $\alpha^j: u_i \rightarrow D_i$ が其ノ g 次元表現+ルトキ, g 次元
ノ vectors, $t_1, \dots, t_r$ = 関スル一次方程式

$$(3.1) \quad D_i t_j - D_j t_i = t_k C_{ij}^k, \quad 1 \leq i < j \leq r$$

ノ総テノ解ハ

$$(3.2) \quad t_i = D_i w, \quad 1 \leq i \leq r$$

デ與ヘラレル。コノ w ハ任意ノ g 次元 Vektor デアル。

[証明] 先ヅ (3.2) ノ解デアルコトハ $D_i D_j - D_j D_i = D_k C_{ij}^k$ ヲ左カラ Vektor w ニ作用サセテ見レバ明
カデアル。次ニ t が (3.1) ヲ満足スルトスル。

$D^i = g^{il} D_l$ ($g_{il} = C_{ij}^k C_{lk}^i$, g^{il} ハソノ逆行列) ヲ
左カラ (3.1) = 書ケルト $D^i D_i = C$ ハ表現 α^j ノ所謂
「Casimir 行列」デアッテ

$$\begin{aligned} C t_j &= D^i D_j t_i + C_{ij}^k D^i t_k \\ &= (D_j D^i + C_{kj}^i D^k) t_i + C_{kj}^i D^k t_i \\ &= D_j D^i t_i + (C_{kj}^i + C_{ki}^j) D^k t_i = D_j D^i t_i \end{aligned}$$

故ニ若シ $|C| \neq 0$ ナラ, C 從ッテ C^{-1} ハ表現ノ matrix
ト可換ガカラ

$$(3.3) \quad t_j = C^{-1} D_j D^i t_i = D_j (C^{-1} D^i t_i)$$

9) Whitehead ハ「 w = 関スル方程式 (3.2) が解ケル處ニハ, (3.1) ナル條件
ガ必要且十分デアル」ト云フ形ヲ述ベラ居ル。内容ハ同ジデアアル。

即ち $t_j = D_j \cdot W$ の形 = ナッテ居ル。 q が零表現以外、
既約表現ナルトキハ $C = cE_g$, $C \neq 0$ の形 = ナルカラ、
 q が零表現ヲ既約成分トシテ含マナケレバ $|C| \neq 0$ デ從
ッテ定理ハ成立ツ。又 q が零表現ノトキハ、(3.1) ハ
 $t_k C_{ij}^k = 0$ トナリ之ハ $t_k = 0$, $k = 1, \dots, r$ 以外ニ
解ヲ持タナイ。(夫レハ例ヘバ次ノ様ニシテ分ル: $\sigma \circ \sigma$
 $= \sigma$ カカラ任意ノ u_l ハ $u_i \circ u_j = u_k C_{ij}^k$ ノ一次結合ト
シテ表ハセラル。即ち

$$u_l = u_k C_{ij}^k a_l^{ij} \quad \text{或ハ} \quad S_l^k = C_{ij}^k a_l^{ij}$$

ナル a_l^{ij} がアル。 $t_k =$ 掛ケテ t_k デ加ヘ、 $t_l = t_k C_{ij}^k a_l^{ij}$ 。
從ッテ $t_k C_{ij}^k = 0$ ナラ $t_l = 0$ デアル) 即ち此ノ場合ニ
(3.2) ノ形ノ解シカナイ。一般ノ場合ハ、 q が完全可約
ナコトヲ使ッテ、 q ヲ零表現 q_1 ト、零表現ヲ含マヌ
表現 q_2 ノ和ニ分ケ、其レニ相應シテ Vektor $t_i \in$
ニッノ Vektor = 分ケレバ、(3.1) ハ夫々ノ表現ニ就イ
テノ式ニ分レ、從ッテ定理ノ証明ハ上ノニッノ場合ニ歸
スル。q. e. d.

〔注意〕 Whitehead ハ完全可約性ヲ假定シナイ
デ直接コノ定理ヲ証明シ、コノ定理ヲ使ッテ完全可約性ヲ
証明シテ居ル。 Branner ノ証明ト違ッテ(此処カラ先ハ
ハ)既約表現ト可換ナ行列ガ入 E ノ形ニナルト云フ事實ヲ
使ハナイカラ、基礎体ニ関係シナイ點ガ氣持ガヨイ。即ち
「零デナイ既約表現ノ Casimir 行列ハ逆ガアル」ト云

フ事実がケカラ、後ハ全然基礎体カラ外ニ出ル事ナシニ、
完全可約性が証明サレル。

勿論代数的閉体ノ場合ノ完全可約性カラ一般ノ場合ハ容易ニ出ルカラ、Brannerノ証明モ一般性ヲ欠ク訳デハナイ。爰デハ(標数0ノ基礎 P ノ上ノ準單純 Lie環 P ニ於ケル表現)ノ完全可約性ハ(例ヘビ Brannerノ証明ニ依テ)既ニ知ラレテ居ルモノトシタ。

既ニ述べタ様ニ $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{g}; \mathfrak{a})$ ノ Autom.ヲ考ヘル上ニハ、 $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$ ノ場合ヲ考ヘルバ十分デアッタ。 $\mathfrak{a}$ ハ零表現ヲ含マズ、従ツテ其ノ Casimir 行列 $C = g^{ij} D_i D_j$ ハ逆ヲ持ツ。此ノトキ(3.1)ノ解 $t_i = D_i w$ 、 w ハ一意的デアアル。

$$\therefore t_j = D_j w = D_j w' + \tau D_j (w - w') = 0, \\ j = 1, \dots, r.$$

$$\therefore C(w - w') = g^{ij} D_i D_j (w - w') = 0$$

C ハ逆ガアルカラ之レヨリ

$$w - w' = 0 \quad \text{g. e. d.}$$

従ツテ

定理[3.2] $\mathfrak{a}$ ガ零表現ヲ含マナイナラ

$$(3.1) \quad D_i t_j - D_j t_i = D_k C_{ij}^k$$

ノ任意ノ解ハ $t_i = D_i w$ ノ形ニ唯一通りニ表ハセラル。

故ニ(3.1)ノ独立ノ解ハ丁度ノ表現 $\mathfrak{a}$ ノ次數がケアル。

本節ノ定理ハ 第二節ヲ証明+シニ使ツタ。