



Title	イデヤル論ノ基本定理ニ就イテノ注意
Author(s)	東大代數談話會
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 214, p. 170-174
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74852
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

922. イデアル論ノ基本定理ニ就イテノ注意

東大代數談話會

單位元ヲ持ツ *Integritätsbereich* $\mathcal{O}$ ㊦, 任意ノ *Ideal* α ($\mathcal{O}$ 及ビ $\mathcal{O}$ -ideal ハ 除ク) が *Primideal*, 積トシテ *eindeutig* = 表ハサレルタメノ十分條件トシテ, 次ノ三ツノ條件がヨク知ラレテキル。

(1) $\mathcal{O}$, *Ideal* = 就イテ *Teilerkettensatz* が成立ツ。

(2) *Primideal* ハ *maximal* ㊦アル。

(3) $\mathcal{O}$ ハ ヲノ *Quotientenkörper* ㊦ ganz abgeschlossen ㊦アル。

之ノ時ハ次ノ (4) が又成リ立ツ。

$$(4) \quad \alpha = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}, \quad b = p_1^{f_1} \cdots p_n^{f_n} \quad (e_i, f_i \geq 0)$$

トスルトキ, $\alpha \supset b$ ナルタメノ必要十分條件ハ $e_i \leq f_i$

($i=1, \dots, n$) ナルコト㊦アル。

逆 = van der Waerden ハ *moderne Algebra* II ㊦任意ノ *Ideal* が *Primideal* ノ積トシテ一義ニ表ハ

サレ、且ツ (4) が成立ツナラベ (1), (2), (3) の條件が必要デアルコトヲ証明シテキル。

然シ (4) の條件ナシニ (1), (2), (3) が必要ナルコトヲ最近久保氏が証明サレ (*Über die Noetherschen fünf Axiome in kommutativen Ringen*, 廣島文理大紀要十卷), 更ニ今春ノ数物年會デ小林氏が簡單ニ証明ヲ與ヘラレタ。

(但シ遙カニ一般ノ場合が取扱ハレテキル。)

更ニ素イデヤルヘノ分解ノ一義性ヲ假定シナイデモ (*allgemeine Z. P. I. — Integritätsbereich*) (1), (2), (3) が必要ニナルコトハ、森氏ノ論文 (*allgemeine Z. P. I. — Ringe*, 廣島文理大紀要十卷) デ與ツタ形デモツト一般ノ場合カラ証明サレテキル。

此処カハ小林氏ノ方法ノ紹介傍ニ、コノ簡單ニ証明ヲ與ヘテ見ヨリ。

定理 『 Φ ヲ單位元ノアル整域トスル。 Φ ノ任意ノイデヤル α ($\neq \Phi, \alpha$) が素イデヤルノ積トシテ表ハサレルタメニハ、(表ハシオノ一義性ヲ假定シナイデモ), (1), (2), (3) ノ條件ハ必要デアル。』

(証明)

(i) 先ツ小林氏ノ方法ヲ一部分紹介スル。 $\mathfrak{p}$ ヲ任意ノ素イデヤルトシ、 $a \notin \mathfrak{p}$ トスル。

$$(b) \quad (\mathfrak{p}, a)^2 = (\mathfrak{p}, a^2)$$

ヲ証明スル。 $(\mathfrak{p}, a) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_m$, $(\mathfrak{p}, a^2) = \mathfrak{p}'_1 \cdots \mathfrak{p}'_m$ ト

スレバ、 $p \in (p, a)$ カラ $p_1, \dots, p_m$ ハスベテ p ヲ含ム。
 $p'_1, \dots, p'_m$ 同様に。

$$(p, a)^2 = p_1^2 \dots p_m^2, \quad (p, a^2) = p'_1 \dots p'_n$$

デ共通部分ニヲマシメテ

$$\left. \begin{aligned} (p, a)^2 &= c \cdot a, & a &= a_1 \dots a_r \\ (p, a^2) &= c \cdot b, & b &= a'_1 \dots a'_s \end{aligned} \right\}$$

$$a_i \neq a'_j \quad (i=1, \dots, r; j=1, \dots, s)$$

トスル。又カラ a/p へ移レバ、 $p_i, a_i, \dots, p$ ヲ含ムカ
 ラ、 $\bar{p}_i$; etc. ハ a/p ノ素イデヤルトナリ、又 $\overline{p_1 \dots p_n}$
 $= \bar{p}_1 \dots \bar{p}_n$ 等成立スル。(コノ $\overline{} = \pmod{p}$ クラ
 スヲトルコトヲ意味スル。)

$$\left. \begin{aligned} \overline{(p, a)^2} &= \overline{(p, a)}^2 = (\bar{a})^2 = (\bar{a}^2) = \bar{c} \cdot \bar{a} \\ \overline{(p, a^2)} &= (\bar{a}^2) = \bar{c} \cdot \bar{b} \end{aligned} \right\}$$

カラ $\bar{c} \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} = (\bar{a}^2) \bar{a} = (\bar{a}^2) \bar{b}$, 即チ $\bar{a} = \bar{b}$ トナ
 ル。

$a_1, \dots, a_r, a'_1, \dots, a'_s$ が全然ナケレバ (5) ハ
 成立スルカラ、例ヘバ $r \geq 1$ トシテ矛盾ニ導カウ。

$\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r$ 中ノ Min ナーツヲ例ヘバ $\bar{a}_1$ トスル。

$$\bar{a}_1 \supset \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_r = \bar{a}'_1 \dots \bar{a}'_s$$

カラ $\bar{a}_1 \supset \bar{a}'_1$ トナル。同様ニ $\bar{a}'_1 \supset \bar{a}_1$ 。即チ $\bar{a}_1 \supset \bar{a}'_1 \supset \bar{a}_1$ 。

$\bar{a}_1$ Min カラ $j=1$ トナリ、 $\bar{a}_1 = \bar{a}'_1$ トナル。 $a_1, a'_1 \supset p$
 カラ、 $a_1 = a'_1$ トナリ、假定ニ反スル。即チ (5) が成立
 スル。

次 = (5) カラ

$$(6) \quad \mathfrak{p} \cdot (\mathfrak{p}, a) = \mathfrak{p}$$

ヲ証明スル。先ヅ $(\mathfrak{p}, a^2) = (\mathfrak{p}, a)^2 = (\mathfrak{p}^2, a\mathfrak{p}, a^2)$ カラ

$\pi \in \mathfrak{p}$ ハ

$$\pi = \pi_1 + \xi a^2 \quad (\pi_1 \in (\mathfrak{p}^2, a\mathfrak{p}))$$

トナリ, $\xi a^2 \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ トナル。 $a \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ カラ

$\xi a \equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ トナリ, 之レハ $\mathfrak{p}((\mathfrak{p}^2, a\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}(a, \mathfrak{p})$ ヲ

示ス。即チ (6) トナル。

(ii) 之レカラ先キハ最早簡單デアアル。

(1) スベテノ素イデヤル $\mathfrak{p}$ ハ *maximal* デアル。

何トナレバ $\mathfrak{p}$ ヲ π ヲトリ, $(\pi) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ ト分解スル。 $\mathfrak{p} \supset (\pi)$ カラ例ヘバ $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1$ トナル。 $\mathfrak{p}$ が *maximal* デナイトスレバ $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_0 \supset \mathfrak{p} \quad (\mathfrak{p}_0 \neq \mathfrak{p})$ ヲトリ,
 $\mathfrak{p}_0 \ni a, \mathfrak{p}_1 \nmid a$ ヲトル。(6) ヨリ

$$\mathfrak{p}_1(\mathfrak{p}_1, a) = \mathfrak{p}_1$$

両辺 = $\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n$ ヲ掛ケレバ, $(\pi)(\mathfrak{p}_1, a) = (\pi)$, 即チ $(\mathfrak{p}_1, a) = \mathfrak{O}$ トナル。

之レハ $\mathfrak{O} \neq \mathfrak{p}_0 \supset (\mathfrak{p}_1, a)$ ト矛盾スル。即チ $\mathfrak{p}$ ハ *maximal* デアル。

(ii) 次 = $\mathfrak{p}^{-1} \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{O}$ が成立スル。

何トナレバ, $\pi \in \mathfrak{p}$ ヲトリ $(\pi) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_n$ トスレバ, 例ヘバ $\mathfrak{p} \supset \mathfrak{p}_1$ トナルが, (1) カラ $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1$ トナル。コ
ノデ $\alpha = \frac{1}{\pi} \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_n$ ナル分数イデヤルヲ考ヘレ
バ

$$a < p^+, \quad a p = 0$$

デアルカラ $0 \supset p^{-1} \cdot p \supset a p = 0$ トナル。即チ $p^+ p^+ = 0$

(i) 0 ノイテヤル a, b が夫々 $a = p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n}$,
 $b = p_1^{f_1} \cdots p_n^{f_n}$ ($e_i, f_i \geq 0$) ト表ハサレルトキニ,
 $a \supset b$ ナレバ $e_i \leq f_i$ ($i=1, \dots, n$) トナル。何トナレバ
 例ヘバ $e_1 > f_1$ トスレバ, 順次 $= p_1^{-1}$ ヲ f_1 回 a, b ニ乗ズレバ

$$p_1 \supset p_1^{e_1-f_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n} \supset p_2^{f_2} \cdots p_n^{f_n}$$

トナリ, $p_1 \supset p_i$ ($i \neq 1$) デナケレバナラヌ。コレハ (i) =
 矛盾スル。

(ii) $a = p_1 \cdots p_n$ トスル表ハシ方ハ一義ニ定マル。

証明ハ (i) ト同様。

(i), (ii) がアルカラ, 後ハ *moderne Alg.* II ニツヅケレ
 ヲヨイ。(証明完)

16. 4. 23 (河田)