OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	函數方程式　f(x+y)＋f(x-y)＝2f(x) φ (y) ／(1-k2f2(x) f2(y)) (1≧k≧0) ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 214, p. 175-178
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74853
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

923. 函數方程式 $f(x+y)+f(x-y)=\dfrac{2f(x)\varphi(y)}{1-k^2f^2(x)f^2(y)}$ $(1\geqq k\geqq 0)$ ニ就イテ

春木　博(神戸高商船)

上記ノ函數方程式ニ於テ $k=0$ トルトキ即チ

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\varphi(y)$ トルトキハ、ソノ可測解トシテ

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} f(x)=ax+b \\ \varphi(x)\equiv 1 \end{cases}$$

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} f(x)=a\cos\alpha x+b\sin\alpha x \\ \varphi(x)=\cos\alpha x \end{cases}$$

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} f(x)=a\cosh\alpha x+b\sinh\alpha x \\ \varphi(x)=\cosh\alpha x \end{cases}$$

ヲ得ルコトハ、ヨリ知ラレテヰル。茲ニ a, b, α ハ任意ノ實數デアル。コノ場合ノ形式的ー拡張トシテ

$$(\mathrm{F})\quad f(x+y)+f(x-y)=\frac{2f(x)\varphi(y)}{1-k^2f^2(x)f^2(y)} \qquad (1\geqq k\geqq 0)$$

ノ原点ノ近傍ニ於ケル連続解ヲ求メテ見ヨウ。コゝニ注意スベキコトハ(F)ニ於テ $k=0$ ノトキト $1\geqq k>0$ ノトキトハ模様ガ少シク違ッテ来ルト云フコトデアル。ソレハ $k=0$ ノトキハ $f(0)$ ハ不定デアルガ $1\geqq k>0$ ノトキハ常數解ヲ除ケバ $f(0)=0$ トナルトイフ点ニアル。

(F)ニ於テ $x=0$, $y=0$ トオケバ $(f(0)=a, \varphi(0)=b)$

$a=0$ ノトキハ $1-a^4k^2=b$

$a=0$ ノトキハ (F) ニ於テ $y=0$ トオクコトニヨリ $f(x)\neq 0$ ナラバ $b=0$ ヲ得ル。

$1-a^4k^2=b$ ナルトキハ (F) ニ於テ $y=0$ トオケバ

$$f(x)\{1-a^2k^2f^2(x)\}=bf(x)$$

今 $a\neq 0$ ノトキ即チ $f(0)\neq 0$ デ、シカモ $f(x)$ ハ連続ナル故、原点ノ適當ナ近傍デ

$$1-a^2k^2f^2(x)=b$$

ガ成立スル。

$k\neq 0$ ナル故 $\quad f^2(x)=\dfrac{1-b}{a^2k^2}=a^2$

$f(0)=a$ ナル故 $\quad f(x)\equiv a$

故ニ $f(x)$ ハ常數トナル。故ニ常數解ヲ除ケバ $f(0)=0$, $\varphi(0)=1$ デアル。之ヨリ $f(-x)=-f(x)$, $\varphi(-x)=\varphi(x)$ ナルコトハ容易ニ判ル。

次ニ積分ヲ用ヒルコトニヨリ、(F) ヨリ $f(x)$, $\varphi(x)$ ガ連續ナラバ微分可能ナルコトヲ証明シ得ル。

(F) ヲ x ニ關シテ微分シテ

$$f'(x+y)+f'(x-y)=2\varphi(y)\frac{f'(x)+k^2f^2(x)f'(x)f^2(y)}{\{1-k^2f^2(x)f^2(y)\}^2}$$

$x=0$ トオケバ $f'(y)=f'(-y)$, $f(0)=0$ ナル故

$$\varphi(y)f'(0)=f'(y)$$

$f'(0)=\alpha$ トオケバ $f(x)$ ガ恒等的ニ常數トナル以外ハ

$\alpha \neq 0$ ナルコトガ上式ヨリ判ルカラ　$\varphi(x) = \frac{1}{\alpha} f'(x)$

之ヲ (F) ヘ代入スレバ

$$(1)\quad f(x+y) + f(x-y) = \frac{2f(x)f'(y)}{\alpha\{1 - k^2 f^2(x) f^2(y)\}}$$

(1) ニ於テ x ト y トヲ入レカヘレバ　$f(y-x) = -f(x-y)$

ナル故

$$(2)\quad f(x+y) - f(x-y) = \frac{2f(y)f'(x)}{\alpha\{1 - k^2 f^2(x) f^2(y)\}}$$

(1) + (2) ヲ作レバ

$$f(x+y) = \frac{f(x)f'(y) + f(y)f'(x)}{\alpha\{1 - k^2 f^2(x) f^2(y)\}}$$

$f(x)$ ハ何回デモ微分可能ナルコトハ (1) カラ証明シ得ルカラ、上式ヲ y ニ関シテ二度微分シ $y = 0$ トオケバ，結局 $(\beta = f'''(0))$

$$\alpha f''(x) = 2\alpha^3 k^2 f^3(x) + \beta f(x)$$

$f'(x)$ ヲ両辺ニカケテ積分スルコトニヨリ結局

$$f'^2(x) = \alpha^2 k^2 f^4(x) + \frac{\beta}{\alpha} f^2(x) + \alpha^2$$

之レヲ解イテ結局

$$(\mathrm{I}) \begin{cases} f(x) = \lambda\, sn[\alpha x;\ \lambda^2 k] \\ \varphi(x) = cn[\alpha x;\ \lambda^2 k]\, dn[\alpha x;\ \lambda^2 k] \end{cases}$$

$$(\mathrm{II}) \begin{cases} f(x) = \lambda\, tn[\alpha x;\ \sqrt{1-\lambda^4 k^2}] \\ \varphi(x) = \dfrac{dn[\alpha x;\ \sqrt{1-\lambda^4 k^2}]}{cn[\alpha x;\ \sqrt{1-\lambda^4 k^2}]} \end{cases}$$

(III) $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{k}} tn\alpha x \, dn\alpha x \quad (母数 K 任意) \\ g(x) = \dfrac{dn^2\alpha x}{cn^2\alpha x} - K^2 sn^2\alpha x \end{cases}$

α ハ任意ノ実数，λ ハ $|\lambda| \leqq \dfrac{1}{\sqrt{k}}$ トル実数 K ハ $1 \geqq K \geqq 0$ トル実数トスル。

——（完）——