OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Teilweise geordneter Modul ノ連續性ニ就イテ（訂正）
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 215, p. 186-190
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74855
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

925. Teilweise geordneter Modul ノ連續性ニ就イテ（訂正）

中野　秀五郎(東大)

此前ノ訂正ニ於テ、連續函數ヲ Schnitt ニテ擴張スルト任意ノ函數ヲ得ルト書イタガ、數日前ニ河田君カラ $x=0$ ニテノミ、他ノ点ニテ0ナル函數ニツイテハ連續函數ノ Schnitt ハ出來ナイト注意サレマシタノデ、連續函數ヲ Schnitt デ擴張スルト何ニナルカ考ヘテ見マシタ。兎ニ角連續函數ノ總テハ separable デスカラ、Schnitt デ擴張シテモ亦 separable 從ツテ總テノ函數ニナラヌコトハ明デス。

$f(x)$ ヲ今連續函數ニヨル Schnitt ヨリ得ル函數トス。即チ $f(x) \leqq \varphi(x)$ ナル連續函數ノ全体ヲ A, $f(x) \geqq \psi(x)$ ナル連續函數ノ全体ヲ B トシタトキ，(A, B) ニテ Schnitt ヲ得タトスル。$f(x)$ ノ上半連續函數ヲ $\overline{f}$, 下半連續函數ヲ $\underline{f}$ トスレバ，明カニ

$$\overline{f}(x) = \underset{\varphi \in A}{l.u.b.}\ \varphi(x)$$

$$\underline{f}(x) = \underset{\psi \in B}{g.l.b.}\ \psi(x)$$

然ルニ (A, B) ハ Schnitt ナルニヨリ $\varphi(x) \geqq \underline{f}(x)$ ナル $\varphi(x)$ ハ A ニ屬スル。故ニ

$$\overline{(\underline{f}(x))} = \underset{\varphi \in A}{l.u.b.}\ \varphi(x) = \overline{f}(x)$$

同様ニ　$\underline{f}(x) = \underline{(\overline{f}(x))}$

ヲ得ル。此ノ如キ函数ノ regular function ト云フコトニスル。逆ニ又 regular function ハ Schnitt ヲ作ルコトモ以上カラ明カデアル。

$g(x)$ ヲ Baire ノ function トスルト，多クトモ erste Kathegorie ノ集合ヲ除イテ $f(x) = g(x)$ ナル regular function $f(x)$ が存在スル。如何トナレバ erste Kathegorie ノ集合ヲ除イテ $g(x)$ ハ連続トナルコトが次ノ如クニシテ証明サレル。α_n ヲ rational number ノ全体トスレバ、適当ナル erste Klasse ノ集合ヲ除イタ残リノ集合 M ニ対シテ、$f(x) > \alpha_n$，$f(x) < \alpha_n$ ナル x ノ集合が M ニテ open ナラシメ得ル。然ルトキハ任意ノ実数 α ニ対シ、$f(x) > \alpha$，$f(x) < \alpha$ ナル集合が共ニ M ニテ open トナル。即チ $f(x)$ ハ M ニテ連続デアル。x_0 ヲ任意ノ点トシ

$$\varphi(x_0) = \overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) \qquad (x \in M)$$

$$\psi(x_0) = \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) \qquad (x \in M)$$

ト置ケバ，明カニ

$$\overline{\psi}(x) = \varphi(x), \qquad \underline{\varphi}(x) = \psi(x)$$

トナル。故ニ $\varphi(x)$，$\psi(x)$ ハ共ニ regular デアル。

点集合 M ニ対シ、其ノ点ノミノ集合ヲ M^0，closure ヲ M^* ニテ表ハスコトトスル。

$$M^{\circ *} = M^{*}, \quad M^{* \circ} = M^{\circ}$$

ナルガ如キ集合Mヲ *regular set* ト呼ブコトニスル。Mガ *regular* ナルトキ，其ノ *complement* M′モ亦 *regular* トナル。

$$((M)^{\circ} = (M^{*})', \ (M')^{*} = (M^{\circ})')$$

又 $M^{\circ *}$, $M^{* \circ}$ ハ常ニ *regular* デアル。如何トナレバ，先ヅ $M^{* \circ *} \supset M^{* \circ}$ ヨリ $M^{* \circ * \circ} \supset M^{* \circ}$，又 $M^{* \circ *} \subset M^{*}$ ヨリ $M^{* \circ * \circ} \subset M^{* \circ}$ トナルヲ以テナリ。$M^{\circ *}$ モ亦同様ナリ。

Baire ノ函数 $f(x)$ ガ *regular function* ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ任意ノ実数 α ニ對シ，$f(x) \geqq \alpha$ $(\leqq \alpha)$ ナル x ノ集合 $M(\bar{M})$ ニ對シ M° $(\bar{M}^{\circ})$ ガ *regular* ナルコトデアル。先ヅ $f(x)$ ヲ *regular* トスル。

$f(x) \geqq \alpha$ ナル x ノ全体ヲ M，$\bar{f}(x) \geqq \alpha$ ナル x ノ全体ヲ H，$\underline{f}(x) \geqq \alpha$ ナル x ノ全体ヲ Kトスル。

然ルトキハ，先ヅ $M^{\circ} = K^{\circ}$ デアル。如何トナレバ $f(x) \geqq \alpha$ *in* M° ヨリ $\underline{f}(x) \geqq \alpha$ *in* M° トナリ，従ッテ $M^{\circ} \subset K^{\circ}$. 又 $f(x) \geqq \underline{f}(x) \geqq \alpha$ *in* K° ヨリ $K^{\circ} \subset M^{\circ}$ トナルヲ以テナリ。

次ニ $M^{*} \subset H$ ハ明カナリ。又上ト同様ノ論法デ $(\underline{\bar{f}(x)}) = \underline{f}(x)$ ナルニヨリ，$H^{\circ} = K^{\circ}$ デアル。故ニ $M^{* \circ} \subset K^{\circ} = M^{\circ}$. 従ッテ $M^{* \circ} = M^{\circ}$ デアル。

故ニ M° ハ *regular* ナリ。

同様ニシテ $f(x) \geqq \alpha$ ナル x ノ全体ヲ $\tilde{M}$ トスレバ，$\tilde{M}^{\circ}$

が regular ナルコトモ証明シ得ル。

逆ニ $f(x)$ が以上ノ如キ性質ヲ有スル Baire ノ函数トスル。前ニ述ベタルコトニヨッテ $f(x)$ ハ erste Kathegorie ノ集合ヲ除イテ regular function $g(x)$ トー致スル。$f(x) \geqq \alpha$ ナル x ノ全体ヲ M. $g(x) \geqq \alpha$ ナル x ノ全体ヲ N トスル。然ルトキハ M^0, N^0 ハ erste Kathegorie ノ集合ヲ除イテ一致シ、然カモ共ニ regular ナルヲ以テ、$M^0 = N^0$ ナリ。然ルトキハ、$\underline{f}(x) > \alpha$ ナル任意ノ x ハ M^0 ニ含マレ、従ッテ $g(x) \geqq \alpha$ トナル。故ニ $\underline{f}(x) \leqq g(x)$ ナリ。同様ニシテ $\underline{f}(x) \geqq g(x)$ ヲ得ル。故ニ $\underline{f}(x) = g(x)$ ナリ。又 $f(x) \leqq \alpha$, $g(x) \leqq \alpha$ ナル x ノ集合ヲ考ヘルコトニヨリ $\overline{f}(x) = \overline{g}(x)$ ヲ得ル。故ニ $f(x)$ ハ regular ナリ。

以上ニヨリ，連続函数ヲ Schnitt ニテ擴張スレバ、regular function ヲ得ル。regular function ハ bounded variation ナル function ノ擴張ト考ヘラレルモ、未ダ何等ソノ性質ニ就イテハ研究セラレテヰナイ様デアル。

Vector lattice $\mathfrak{M}$ ヲ Schnitt ニテ擴張スルニ就イテ lattice ノ條件，$a \smile b$, $a \frown c$ ノ存在ヲ假定シタガ、之レハ次ノ條件デ置換ヘラレル：

$\underline{c \geqq a, \geqq b,\ \ d \leqq a, \leqq b \text{ ナル } c, d \text{ ノ存在}}$

又，$\mathfrak{M}$ ガ Ring ナルトキハ，Schnitt ニテ擴張シタトキモ矢張リ Ring トナルコトモ此処ニ注意

シテ置ク。