



Title	無限次元空間ノ積分定理ニ就イテ
Author(s)	深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 215, p. 190-196
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74856
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

926. 無限次元空間ノ積分定理ニ就イテ

深 宮 政 範(阪大)

1. $\mathcal{B}$ ノ数列 $X = (X_1, X_2, \dots)$ 全体カラ成ル無限次元ノ空間トスル。但シ各々ノ X_i ハ $0 \leq X_i \leq 1$ ナル任意ノ数デアアル。集合

$$I = E_{X \in \mathcal{B}} (a_i < X_{n_i} < b_i, \quad i=1, 2, \dots, n), \quad \text{但シ}$$

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k, \quad 0 \leq a_i < b_i \leq 1,$$

$$i=1, \dots, k$$

ヲ $\mathcal{B}$ ノ区間ヲ定義シ、区間 I ノ測度ヲ

$$mI = \prod_{i=1}^k (b_i - a_i)$$

ト定義スレバ、 $\mathcal{B}$ = 完全加法的デ、且ツ $m(\mathcal{B}) = 1$ ナル測度 (Carathéodory ノ意味) が導入出来ル。

此際可測集合ノ全体測度 0 ノ集合ヲ除ケバ凡ユル区間ヲ含ム最小ノ Borel 体デアアル。

測度 $m(A)$ ヲ用ヒテ $\mathcal{B}$ ノ上ノ Lebesgue 積分ヲ普通ト全様ニ定義出来ル。 $f(x)$ が可測デ、積分可能ナ

ラバ $f(x) \in L'(\Omega)$ ト表ス事ニスル。

2. B. Jessen, 無限次元ノ空間ノ積分理論ノ論文¹⁾
ノ中デ次ノ3定理ヲ証明シタ。何レモ積分理論デ基礎定理ト
ナルモノデアイル。

定理1. $\{D_n\}_{n=1,2,3,\dots}$ $\supset \Omega$ ノ sets トシ,

區間 $I_n \in D_n$ ガ $I_n \supset I_{n+1} \supset \dots$ 且 $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{I_n} = X_0$ トスル。

($I_n = I_n(X_0)$ ト表ハス)

$f(x) \in L'(\Omega)$ ナルトキ, 殆ンド凡ベテノ $X_0 \in \Omega$
ニ對シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m(I_n(X_0))} \int_{I_n(X_0)} f(x) dX = f(X_0)$$

定理2. $f(x) \in L'(\Omega)$ ナル時

$$f_n(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) dx_1 \dots dx_n$$

(但シ $X = (x_1, x_2, \dots)$)

トスレバ殆ンド凡ベテノ $X \in \Omega$ ニ對シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \int_{\Omega} f(x) dX$$

定理3. $f(x) \in L'(\Omega)$ トシ,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_{\Omega_{n,\infty}} f(x) dX_{n,\infty} \\ &= \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots) dx_{n+1} dx_{n+2} \dots \end{aligned}$$

¹⁾ B. Jessen, Acta Math., 63 (1934)

$$\left(= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots, x_{n+p}, \dots) dx_{n+1}, \dots, dx_{n+p} \right),$$

$$(X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots))$$

トスレバ、殆んど凡テ、 $X = (x_1, x_2, \dots) =$ 對シテ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(X) = f(X)$$

B. Jessen / 以上ノ定理ノ証明法ハ、夫々別々デ、定理1ヲ等可測変換デ *one-dimensional case* = 帰着サセ、定理2ハ下ノ補助定理2及ビ定理5カラ、定理3ハ定理1ヲ使ツテ証明スルノデアアル。

然シ定理2ノ証明法ヲ改良スレバ、之レ等ノ定理ハ相互ニ関係サセズニ、同ジ方針デ統一的ニ出來ルノデアアル。

夫レハ例ヘバ定理2ニ於テ補助定理ヲ証明シ、夫レニ依レバ有限次元ノ函数 $f(x) = f(x_1, \dots, x_n) =$ 對シテ先ツ直ガニナルカラ、近似定理ヲ用フレバ凡テノ函数ニ對シテト云フ方針デ夫レガ又凡テノ場合ニ對シテ當テハマルノデアアル。

吉田耕作氏ハ之レニツイテ早速K切十注意ヲシテ下サツタ。夫レハ下ニ基本定理4トシテ掲ゲタモノデアアル、同ジコトデアアルガ、ソノ方が分り易イ。同氏ニ感謝シマス。

3.

補助定理1. $f(x) \in L'(\Omega)$ トスル、 $\{D_n\}_{n=1,2,\dots}$

Ω の細分 $\mathcal{T}_n$ を作るとする。区間列 $\{I_n\}_{n=1,2,\dots}$ が

$$I_n \in \mathcal{D}_n, I_n \supset I_{n+1}, \prod_{n=1}^{\infty} I_n = \{c\} = \text{一点}$$

と出来るようにする。 $A > 0$ に対して

$$\text{l.u.b.}_{1 \leq n < \infty} \frac{1}{m(I_n(x_0))} \int_{I_n(x_0)} f(\xi) d\xi \geq A$$

とれる点 $x \in \Omega$ 、集合 E 、測度 μ

$$\mu(E) \leq \frac{1}{A} \int_E f(x) dx$$

補助定理 2. $f(x) \in L'(\Omega_\infty)$

とする。

$$f_n(x) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \cdots, x_n, \cdots) dx_1 \cdots dx_n,$$

$$(x = (x_1, \cdots, x_{n+1}, \cdots))$$

とすれば $\text{l.u.b.}_{1 \leq n < \infty} f_n(x) \geq A \ (A > 0)$ とれる点 x 、集合 E

、測度 μ

$$\leq \frac{1}{A} \int_E f(x) dx$$

補助定理 3. $f(x) \in L'(\Omega)$ とする。

$$f_n(x) = \int_{\Omega_{n,\infty}} f(x) dX_{n,\infty} \quad (x = (x_1, \cdots, x_n, \cdots))$$

とすれば $\text{l.u.b.}_{1 \leq n < \infty} f_n(x) \geq A \ (A > 0)$ とれる点 x 、集合

E / 測度 μ

$$\equiv \frac{1}{A} \int_E f(x) d\mu$$

証明ハ Jensen, loc. cit. を参照サレタイ。

4. 基本定理 4. $L^1(\Omega)$ で定義サレタ operators

$\{T_n\}_{n=1,2,\dots}$ / 各 T_n が, $f \in L^1(\Omega)$ 7 可測函数

$f^{(n)}(x) = T_n f$ = 寫シ,

i) additive homogeneous,

ii) $|f^{(n)}(x)| \leq |f(x)|^{(n)}$

トスル。若シ

iii) $E = E \left\{ \begin{array}{l} \text{l. u. b. } f^{(n)}(x) \geq A \\ 1 \leq n < \infty \end{array} \right\}$,

$$\mu E \leq \frac{1}{A} \int_E f(x) d\mu, \quad (A > 0)$$

iv) $f_1(x) = f_1(x_1, \dots, x_m)$ = 對シテ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_1^{(n)}(x) = f_1^*(x) = T^* f_1(x),$$

(殆ンド凡テ X = 對シ)

ナラバ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = T^* f(x) \quad (\text{殆ンド凡テ } X = \text{對シ})$$

証明ハ容易デス、 $f(x) \in L^1(\Omega)$ ハ有限次元ノ函数デ

近似出来ルカラ

$$\int_\Omega |f(x) - f_1(x_1, \dots, x_m)| d\mu \leq \varepsilon^2,$$

$F(x) = f(x) - f_1(x_1, \dots, x_m) = 0$ 7 apply. して
 $m \in \mathbb{N}$ 集合ヲ省ケル

$$\text{l.u.b. } |f^{(n)}(x) - f_1^{(n)}(x_1, \dots, x_m)| \leq \varepsilon$$

$1 \leq n < \infty$

従ッテ同ジ処デ

$$\left| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) - f_1^*(x) \right| \leq \varepsilon$$

ε ハ任意デアルカラ, 殆ンド凡テノ X ニ對シテ

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = f^*(x)$$

系1. 定理1ハ補助定理1カラ出ル. ($f_1^*(x) = f_1(x)$)

系2. 定理2ハ " 2カラ出ル. ($f_1^*(x) = \int f_1^*(x) dx$)

系3. 定理3ハ " 3カラ出ル. ($f_1^*(x) = f_1(x)$)

5.

定理5. 可測集合 $S \subset \Omega$ が性質: 有限箇, 坐標ガケ
 果ル任意ノ2点 $X = (x_1, x_2, \dots)$, $Y = (y_1, y_2, \dots)$
 ハ同時 $\in S$ カ同時 $\in \bar{S}$ デアル, 7有テハ $m(S) = 0$
 又ハ / デアル.

証明. S ノ特性函数ヲ $f(x)$ トスル. S ハ明ラカ =
 $S = (\Omega_n - N_n, S_{n, \infty})$ デ表ハサレルカ, $X \in S = (M_n,$
 $S_{n, \infty})$ ノ形デアル, 但シ $m(N_n) = 0$, $m(M_n) = 0$
 且 n ハ任意ノ整数、従ッテ

$$f^{(n)}(x) = \int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, x_2, \dots) dx_1 \dots dx_n$$

$$= 1 (X \in S), = 0 (X \in \bar{S})$$

定理2カラ $\lim_{n \rightarrow \infty} f^{(n)}(x) = \int_{\Omega} f(x) dx = m(S)$ (殆

んど凡テ、 $x \in S$). 故ニ $m(S) = 1$ 又ハ 0 .

定理6. E ヲ可測集合, $\varphi_E(x)$ ヲソノ特性函数トスレバ

$$\varphi_E^n(x) = \int_{\Omega_{n,\infty}} \varphi_E(x_1, \dots) dx_{1,\infty}$$

ハ殆んど凡テノ x デ收斂シ, 殆んど凡テノ点デ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_E^n(x) = \varphi_E(x)$$

証明. 定理3カラ.