



Title	淡中氏ノ双對定理ニ就イテ (M.Kreinノ方法紹介)
Author(s)	大塚位相數學談話會
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 216, p. 197-217
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74857
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

927. 淡中氏ノ双對定理 = 就イテ

(M. Krein / 方法紹介)

大塚位相数学談話會

最近 / C. R. URSS, Vol. 31, No. 1, (1941) デ M. Krein ハ 淡中氏 / 非可換群 / 双對定理 / 別証明ヲ與ヘタ。証明自体ハ寧ロ淡中氏ノヨリモ複雑デアルガ、Gelfand / *normed ring* / 應用ト見レバ極メテ面白い方法デアル様ニ思ハレルノデ、以下ニ出来ルだけ丁寧ニ紹介シタイト思ヒマス。

其ノ方法ハ一ツノ大キキ *normed ring* R / 中ニ三ツノ *normed ring* R_1, R_2, R_3 ヲ embed シテ、 R_3 / 構造 (特ニ *maximal ideal* / 性質) ヲ既知ノ R_1, R_2 / 性質カラ導クトイフノデアル。Krein ハ途中デ *positive functional* = 關スル定理ヲ用ヒテキルガ (定理3), コレハ寧ロ双對定理ノ應用ト考ヘタ方がヨイト思ハレル。(§7 参照) 又一般ニ十分ニ澤山ノ *almost periodic function* ヲ持ツ group ハ結局 *bicompact group* / 場合ニ歸着サレルカラ (§6), 初メカラ *bicompact group* / 場合ニ限ツテ考ヘルコトニスル。

引用文献ハ

- (i) T. Tannaka, Über den Dualitätssatz in nichtkommutativen topologischen Gruppen, 東北, 45 卷 (1938), (本誌, 149, 151 号)

- (ii) I. Gelfand, Normierte Ringe, Res. Math.,
T. 9, no. 1 (1941)

§ 1

G は bicom pact topological group トスル。積空間 $G \times G$ 上デ次、如キ複素数値函数 $\Phi(x, y)$ 全体、集 $\mathcal{P}$ 考ヘル。

- (1) $\Phi(x, y)$ は $G \times G$ 上デ連続,
 (2) $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$,
 (3) Φ は positive definite: 任意 scalar $\xi_1, \dots, \xi_n$ 對シテ

$$\sum_{i,j} \Phi(x_i, x_j) \xi_i \overline{\xi_j} \geq 0$$

先カ $\Phi_1(x, y), \Phi_2(x, y)$ が $\mathcal{P}$ ニ属スルハ, $\alpha \Phi_1(x, y)$ (α : 實正數), $\Phi_1(x, y) + \Phi_2(x, y), \Phi_1(x, y) \times \Phi_2(x, y)$ モ亦 $\mathcal{P}$ ニ属スル。

初メ、二ツノ場合ハ明カ。積ノ場合ハ $\Phi_2(x_i, x_j) \xi_i \overline{\xi_j} = a_{ij}$ トオケベ, $A = (a_{ij})$ ハ positive definite hermitian matrix トナル故, $A = UDU^{-1}$ トアラルサレル。此処ニ U ハ unitary matrix, $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \dots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$, $d_i \geq 0$ トスル。故ニ $(b_{ij}) = U(\sqrt{d_1}, \dots, \sqrt{d_n})$ トオケベ, $A = S \cdot \overline{S'}$ トナル。即チ $\sum_{i,j} \Phi_1(x_i, x_j) \Phi_2(x_i, x_j) \xi_i \overline{\xi_j} = \sum_k \sum_{i,j} \Phi_1(x_i, x_j) b_{ik} \overline{b_{jk}} \geq 0$.

次 = $\Phi(x, y)$ / norm γ (4) 決定する。

$$(4) \quad \|\Phi(x, y)\| = \max_x |\Phi(x, x)|$$

(3) / 条件で特 = $n = 1, 2$ / 場合 = 8

$$(5) \quad \begin{cases} \Phi(x, x) \geq 0 \\ |\Phi(x, y)| \leq \sqrt{\Phi(x, x) \cdot \Phi(y, y)} \leq \|\Phi\|. \end{cases}$$

定理 1. $\square R$ γ $\Phi(x, y) = \Phi_1(x, y) - \Phi_2(x, y)$ (Φ), $\Phi_2 \in P$) / 全体 トシ

$$\|\Phi\| = \inf(\|\Phi_1\| + \|\Phi_2\|)$$

(コ) = inf $\wedge$ Φ / カ・ル・ス・ベ・テ / 分解 = ツイテ考へル)

トスレバ, R $\wedge$ 実係数 / *normed ring* トナル。』

(証) R が実係数ヲ許ス *Ring* γ 作ルコトハ明カデアル。

$$(6) \quad \|\Phi_1 + \Phi_2\| \leq \|\Phi_1\| + \|\Phi_2\|, \quad \|\alpha \Phi_1\| = |\alpha| \|\Phi_1\|,$$

$$\|\Phi_1 \cdot \Phi_2\| \leq \|\Phi_1\| \cdot \|\Phi_2\|$$

中, 例へ心最後ノ関係ヲ驗シテミル。 $\Phi_1, \Phi_2 \in P$ ノトキハ大丈夫デアアル, 故 =

$$\Phi_1 = \Phi'_1 - \Phi''_1, \quad \Phi_2 = \Phi'_2 - \Phi''_2 \quad (\Phi'_1, \dots, \Phi'_2 \in P)$$

ト分解シテ

$$\|\Phi_1\| + \varepsilon \geq \|\Phi'_1\| + \|\Phi''_1\|,$$

$$\|\Phi_2\| + \varepsilon \geq \|\Phi'_2\| + \|\Phi''_2\|$$

トスレバ,

$$\Phi_1 \cdot \Phi_2 = (\Phi'_1 \Phi'_2 + \Phi''_1 \Phi'_2) - (\Phi'_1 \Phi''_2 + \Phi''_1 \Phi'_2)$$

ヨリ

$$\|\Phi_1 \cdot \Phi_2\| \leq \|\Phi'_1 \Phi'_2 + \Phi''_1 \Phi'_2\| + \|\Phi'_1 \Phi''_2 + \Phi''_1 \Phi'_2\|$$

$$\leq (\|\Phi_1'\| + \|\Phi_1''\|)(\|\Phi_2'\| + \|\Phi_2''\|)$$

$$\leq (\|\Phi_1\| + \varepsilon)(\|\Phi_2\| + \varepsilon)$$

この ε は任意であるから, (6) が成立す。

次に R が $\|\cdot\|$ norm で complete となること。 $\{\Phi_n\}$ が $\lim_{m, n \rightarrow \infty} \|\Phi_m - \Phi_n\| = 0$ を満たすものとする。部分列

$$\{r_n\} \text{ をとって } \sum_{n=1}^{\infty} \|\Phi_{r_n} - \Phi_{r_{n+1}}\| < +\infty \text{ とする。}$$

$$\Phi_{r_n} - \Phi_{r_{n+1}} = F_n - F'_n \quad (F_n, F'_n \in P)$$

とすると,

$$\|\Phi_{r_n} - \Phi_{r_{n+1}}\| + \frac{1}{2^n} \geq \|F_n\| + \|F'_n\|$$

$$\text{とする。この時 } \sum_1^{\infty} \|F_n\| < +\infty, \sum_1^{\infty} \|F'_n\| < +\infty \text{ とする。}$$

$$(5) \text{ から } \sum_1^{\infty} F_n(x, y), \text{ 及び } \sum_1^{\infty} F'_n(x, y) \text{ は } G \times G \text{ 上で一様収}$$

斂するから, 其の極限 $F, F' \in P$ とする。

$$\Phi(x, y) = F(x, y) - F'(x, y) \text{ が } \varepsilon \text{ とする limit}$$

となる。 —

又 R 中では

$$(5') \quad |\Phi(x, y)| \leq \|\Phi\|$$

が成立することをもたすことができる。

§ 2

M. Krein の Lemma. $\mathbb{R}$ 実係数, normed ring

ハ必ず複素係数, *normed ring* = 拡大出来る

(証) R を実係数 *normed ring* とし, $F = f + ig$
($f, g \in R$) / 全体を $\mathcal{R}$ とすれば, $\mathcal{R}$ の明か = 複素係数
の *ring* を作れる。此のとき $f = F^+$, $g = F^-$ と書くと
= 出来る。

$$(7) \|F\| = \max_{\theta} \|f \cos \theta - g \sin \theta\|$$

$$= \max_{\theta} \|(e^{i\theta} F)^+\|$$

ときスレバ, $\|F+G\| \leq \|F+G\|$, $\|\alpha F\| = |\alpha| \|F\|$ (α :
complex number) とす。これに $\alpha = i$ を代入すると
/ *norm* = 関して積も亦連続であることは、例へば

$$\|FG\| \leq 2\|F\|\|G\|$$

を証明スレバよい。 $\|FG\| = \|(e^{i\theta} FG)^+\|$ とすれば,

$F_1 = e^{i\theta} F$ とおいて

$$\|FG\| = \|(F_1 G)^+\| = \|F_1^+ G^+ - F_1^- G^-\|$$

$$\leq \|F_1^+\| \|G^+\| + \|F_1^-\| \|G^-\|$$

$$\leq 2\|F_1\| \|G\| = 2\|F\| \|G\| \text{ ---}$$

最後 = $\mathcal{R}$ / *complete* とする。夫々 $+$, $-$ 成分
= ツいて考へれば R / 場合 = 帰着出来るから, *Gelfand*,
Satz 1 = 有り $\mathcal{R}$ の *normed ring* とする, *g.e.d.*

故 = §1 を考へて R を, この *Lemma* = 有り $\mathcal{R}$ を
で拡大する。§3, 4 を $\mathcal{R}$ / *normed subring* $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2,$
 $\mathcal{R}_3$ を考へる。

§ 3

$\mathcal{R}_0$ は G 上の complex valued continuous function 全体 = uniform topology を入れた $\mathcal{R}_0$ である normed ring となる。

(1) $\mathcal{R}_0 \ni f(x)$ から, $F(x, y) = f(x)$ と置けば,
 $F(x, y) \in \mathcal{R}$ となる。

$$\begin{aligned} \text{(証)} \quad F(x, y)^+ &= \frac{1}{2} (F(x, y) + \overline{F(y, x)}) = \frac{1}{2} (f(x) + \overline{f(y)}) \\ &= \frac{1}{4\mu} \{ (\mu + f(x))(\mu + \overline{f(y)}) - (\mu - f(x))(\mu - \overline{f(y)}) \} \\ &\quad (\mu > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{同様} \quad F(x, y)^- &= \frac{1}{2} (F(x, y) - \overline{F(y, x)}) \\ &= \frac{1}{4\mu} \{ (f(x) + i\mu)(\overline{f(y)} - i\mu) \\ &\quad - (f(x) - i\mu)(\overline{f(y)} + i\mu) \} \end{aligned}$$

よって $\mathcal{R} = \mathcal{R}_0$ となるから, 従って $F(x, y) = F(x, y)^+ + i F(x, y)^- \in \mathcal{R}$ —

故に $F(x, y)$ の全体 $\mathcal{R}_1 (\cong \mathcal{R}_0)$ は $\mathcal{R}$ に embed せ

れる。次に norm を与えて

$$(2) \quad \frac{1}{2} \max_x |f(x)| \leq \|F(x, y)\| \leq 4 \max_x |f(x)|$$

$$\text{(証)} \quad \text{定義より} \quad \|F\| \leq \|F^+\| + \|F^-\|$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{4\mu} \{ \max_x |\mu + f(x)|^2 + \max_x |\mu - f(x)|^2 \\ &\quad + \max_x |f(x) + i\mu|^2 + \max_x |f(x) - i\mu|^2 \} \\ &\leq \frac{1}{\mu} \{ \mu + \max_x |f(x)| \}^2 \end{aligned}$$

此処で $\mu = \max_x |f(x)|$ とおけば

$$\|F\| \leq 4 \max_x |f(x)|^2$$

$$\begin{aligned} \|f(x)\| &= \|F(x, y)^+ + iF(x, y)^-\| \leq \|F(x, y)^+\| + \|F(x, y)^-\| \\ &\leq \|F^+\| + \|F^-\| \leq 2\|F\| \quad (\text{ここ = (5') 式ヲ用ヒタ}) \end{aligned}$$

故 = (4) が成立スル。

定理 2. 『 $\mathcal{R}_0 \ni f(x) \leftrightarrow F(x, y) (= f(x)) = \exists y$
ヲ生ジ $\mathcal{R}_1$ normed subring $\mathcal{R}_2$ normed ring
トシテ $\mathcal{R}_0$ ト isomorph = シテ homeomorphic ナル
ル。

$F(x, y) = f(y) \in \mathcal{R}_0$ トル $F(x, y)$ / 全体 / 作ル $\mathcal{R}_2$
ニ関シテモ同様ナル』

次 = $\mathcal{R}$ ト $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ トノ関係

定理 3. 『 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ ハ $\mathbb{C}$ / scalar 倍ヨリナル。
又 $\mathcal{R}$ 中 $\mathcal{R}_1$ ト $\mathcal{R}_2$ トヲ含ム最小ノ normed ring ハ $\mathcal{R}$ 自
身デアイル。』

(証) 前半ハ明カ。後半ハ、 $\mathcal{P}$ が $\mathcal{R}_1$ ト $\mathcal{R}_2$ トノ作ル $\mathcal{R}$
ノ subring / limit トシテ表ハサレルコトヲ示セバヨイ。
 G / invariant integral ヲ $\int d\mu$ ナ示セバ、 $\Phi(x, y)$
 $\in \mathcal{P}$ = 對シテ、

$$\varphi(x) = \lambda \int \Phi(x, y) \varphi(y) d\mu$$

ノ Eigenvalue $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ ハスベテ positive ナ,
Mercer / 定理 (例ヘバ Courant, Hilbert (C. H.)
Mathematische Physik, Bd. 1, p. 117, 参照) カラ,
 λ_n = 對スル Eigenfunction ナ $\varphi_n(x)$ トスレバ

$$(8) \quad \Phi(x, y) = \sum_k \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}$$

ト一樣且ツ絶對=收斂スル。此ノ時 $\varphi_k(x) \in \mathcal{R}_1$, $\overline{\varphi_k(y)} \in \mathcal{R}_2$ ナリ, 且ツ

$$\Phi_n(x, y) = \Phi(x, y) - \sum_1^n \frac{\varphi_k(x) \overline{\varphi_k(y)}}{\lambda_k}$$

ハ又 (1), (2), (3) ノ満足シ, $P = \text{属スル故}$, (4) = $\exists$ ヲテ

$$\|\Phi_n(x, y)\| = \max_x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

ノトナル。 q. e. d.

§ 4

$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{H}_2$, $\mathcal{R}$, normed subring $\mathcal{R}_3$ ノ考ヘル。

$f(x)$ ノ G 上, complex valued continuous function トシテ,

$$(9) \quad f(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

$$(10) \quad \sum_{i,j=1}^n f(x y^{-1}) \xi_i \overline{\xi_j} \geq 0$$

ヲ満足スル $f(x)$, 全体ヲ考ヘル。コレヲ P_G ト書クコトニスル。

bicompact group G , 互ヒ=equivalent $\neq$ + 1 完全既約 unitary 表現系ヲ $\{u_{ij}^{(\alpha)}(x)\}$ トスル。又ソノ matrix, 次数ヲ γ_α トスル。

$$a_{ij}^{(\alpha)} = (f(x), u_{ji}^{(\alpha)}(x)) = \int f(x) \overline{u_{ji}^{(\alpha)}(x)} dx$$

トオケバ, (9) カラ $A^{(\alpha)} = (a_{ij}^{(\alpha)})$ ハ r_α 次, Hermitian matrix トナル。

$$A^{(\alpha)} = U_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\alpha)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)} \end{pmatrix} U_\alpha, \lambda_1^{(\alpha)}, \dots, \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)} \geq 0$$

ト unitary matrix ヲ用ヒテ diagonal form = + ホシテ

$$U_\alpha U^{(\alpha)}(x) U_\alpha^{-1} = V^{(\alpha)}(x) = (v_{ij}^{(\alpha)}(x))$$

ヲ作レバ, $f(x)$, Fourier 式展開ハ次ノ如クニ與ヘラレル。

$$\begin{aligned} (II) \quad f(x) &\sim \sum_\alpha \sum_{ij} a_{ji}^{(\alpha)} u_{ij}^{(\alpha)}(x) = \sum_\alpha \text{Sp} (A^{(\alpha)} U^{(\alpha)}(x)) \\ &= \sum_\alpha \text{Sp} (U_\alpha^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^{(\alpha)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)} \end{pmatrix} U_\alpha U^{(\alpha)}(x)) \\ &= \sum_\alpha \text{Sp} \left(\begin{pmatrix} \lambda_1^{(\alpha)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_{r_\alpha}^{(\alpha)} \end{pmatrix} V^{(\alpha)}(x) \right) = \sum_\alpha \sum_i \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x) \end{aligned}$$

$$\text{一方 } v_{ii}^{(\alpha)}(xy^{-1}) = \sum_{k=1}^{r_\alpha} v_{ik}^{(\alpha)}(x) \overline{v_{ik}^{(\alpha)}(y)} + \text{ル故 (ii) } \exists \text{ 1}$$

$$(f(xy^{-1}), \sqrt{r_\alpha} v_{il}^{(\alpha)}(y))$$

$$= \sum_\alpha \sum_j \lambda_j^{(\alpha)} \sum_k v_{jk}^{(\alpha)}(x) \overline{\left(v_{jk}^{(\alpha)}(y), \sqrt{r_\alpha} v_{il}^{(\alpha)}(y) \right)}$$

$$= \frac{\lambda_i^{(\alpha)}}{r_\alpha} \cdot \sqrt{r_\alpha} v_{il}^{(\alpha)}(x),$$

即チ $\sqrt{r_\alpha} v_{ij}^{(\alpha)}(x)$ ($j=1, \dots, r_\alpha$) ハ

$$(12) \quad \varphi(x) = \lambda \int f(xy^{-1}) \varphi(x) dx$$

＋ル積分方程式ノ Eigenvalue $\frac{r_\alpha}{\lambda_i^{(\alpha)}}$ ニ對スル Eigenfunction ヲ作り, α, i ヲスベテ動かセバ (12) 式ノ Eigenfunction ノ complete system ヲ作ル。

再ビ Mercer ノ定理カラ

$$\begin{aligned} f(xy^{-1}) &= \sum_{\alpha} \sum_{i,k} \frac{\lambda_i^{(\alpha)}}{r_\alpha} \cdot \sqrt{r_\alpha} v_{ik}^{(\alpha)}(x) \cdot \sqrt{r_\alpha} \overline{v_{ik}^{(\alpha)}(y)} \\ &= \sum_{\alpha} \sum_{i,k} \lambda_i^{(\alpha)} v_{ik}^{(\alpha)}(x) \overline{v_{ik}^{(\alpha)}(y)} \quad (\lambda_i^{(\alpha)} \geq 0) \end{aligned}$$

ハ $G \times G$ テ一様且ツ絶對ニ收斂シ, 特ニ $y=e$ トオケバ

$$(13) \quad f(x) = \sum_{\alpha} \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x)$$

ハ G テ一様且ツ絶對ニ收斂スル。故ニ

$$(14) \quad F(x, y) = f(xy^{-1})$$

トシテ P_G テ $\mathcal{R}$ ノ一部ト考ヘレバ, $P_G \subset P$ ナル故

$$(15) \quad \|F(x, y)\| = \max_x |f(x \cdot x^{-1})| = f(e) = \sum_{\alpha, i} \lambda_i^{(\alpha)}$$

トナル。一方 (15) ハ (12) ノスベテノ Eigenvalue ノ逆數ノ和トモテツテナル。

$$(15) \quad \|F\| = \sum_{\alpha, i} \lambda_i^{(\alpha)} = \sum_{\alpha, i} r_\alpha \cdot \left(\frac{r_\alpha}{\lambda_i^{(\alpha)}} \right)^{-1}$$

サテ §1 ト同様ニ, P_G カラ R_G へ $f_1, f_2 (\in P_G)$ ノ差トシテ
アヲハサレル全体トスレバ實係數ノ normed ring ヲ作り,
(14) ノ對應ヲ $R_G \cong R_0 \subset R \subset \mathcal{R}$ トナル。

$R_G \ni f(x)$ カラ作ツタ (12) ナル積分方程式ヲ考ヘレバ,
 (11) ノ展開式ハ $(\lambda_i^{(\alpha)} \geq 0 \text{ トイフコトダケヲ除イテ})$ ノ、マ
 成立スル。此ノ時 $F(x, y) = f(xy^T) =$ 對シテ

$$(16) \quad \|F(x, y)\| = \sum_{\alpha, i} |\lambda_i^{(\alpha)}|$$

ヲ証明スル。

$$R_G \ni f(x) = f_1(x) - f_2(x) \quad (f_1, f_2 \in P_G),$$

$$\text{即} \quad f(xy^T) = f_1(xy^T) - f_2(xy^T)$$

カラ、三ツノ hermitian kernel $f(xy^T), f_1(xy^T), f_2(xy^T) =$ 對シテ C. H. Bd. I p. 113 ノ 定理*ヲ適用スル、
 先ツ

$f_i(xy^T) (i=1, 2) =$ 對スル (12) 式ノ Eigenvalue
 7 $\lambda_1^{(i)}, \lambda_2^{(i)}, \dots, (\lambda_j^{(i)} > 0); \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(i)}} = f_i(e), f(xy^T)$
 ノ (12) 式ノ正及ビ負ノ Eigenvalue 7 夫々 $\lambda_1^\pm, \lambda_2^\pm, \dots,$
 トスレバ (15') 同様 =

$$(17) \quad \begin{cases} \sum_k \frac{1}{\lambda_k^+} = \sum_{\alpha, i} \lambda_i^{(\alpha)} & (\text{コゝ} = \sum \wedge \lambda_i^{(\alpha)} > 0 = \forall i \neq 1 \text{ 和}) \\ \sum_k \frac{1}{\lambda_k^-} = \sum_{\alpha, i} \lambda_i^{(\alpha)} & (\text{コゝ} = \sum \wedge \lambda_i^{(\alpha)} < 0 = \forall (\neq 1 \text{ 和}) \end{cases}$$

トナル。此処ヲ C. H. ノ 定理*カラ

$$(18) \quad \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(1)}} \geq \sum_k \frac{1}{\lambda_k^+}; \quad -\sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} \leq \sum_k \frac{1}{\lambda_k^-}$$

トナル。故ニ (17) ト共ニ =

$$(19) \quad \sum_{i, \alpha} |\lambda_i^{(\alpha)}| \leq \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(1)}} + \sum_k \frac{1}{\lambda_k^{(2)}} = f_1(e) + f_2(e)$$

$$= \|f_1\| + \|f_2\|$$

トナル一方

$$(20) \quad \begin{cases} f_1^0(x) = \sum_{\alpha, i} \lambda_i^{(\alpha)} v_{i,i}^{(\alpha)}(x) \\ -f_2^0(x) = \sum_{\alpha, i} \lambda_i^{(\alpha)} v_{i,i}^{(\alpha)}(x) \end{cases}$$

ト置ケバ, (19) 式ヨリ絶對且ツ一様 = 収斂スル。故 =

$f_1^{(0)}, f_2^{(0)} \in P_G$ トナル, $f = f_1^{(0)} - f_2^{(0)}$ ナルヲ

$$(21) \quad \|f_1^0\| + \|f_2^0\| = f_1^0(e) + f_2^0(e) = \sum_{\alpha, i} |\lambda_i^{(\alpha)}|$$

トナル。 (19) ト (21) トカラ $R_G = \text{オケル } \|f\|$ / 定義 = ヨリ

(16) / 成立スルコトガワカル。

ナテ $R_G \cong R_3$ ナ $M. Krein$ / Lemma ナ complex
coef / normed ring = 拡大シテ $\mathbb{C}$ / $R_3 \subset R$ ト
スル。

§ 5

此処デ R_1, R_2, R, R_3 / スベテ / maximal ideal
ヲ決定スル。先ツ

Lemma 2 (Stone). R_0 ナ bicomact + G 上 /
スベテ / 複素数値連続函数ノ全体 / 作ル normed ring
トスル。 (S3). R_0 / 任意 / maximal ideal $\mathcal{I}_0$ ハ
 G 上 / 一定点 x_0 デ 0 ナル値ヲトル R_0 / 元全体トナル。

(証) $R_0 \rightarrow R_0 / \mathcal{I}_0$ ナル homomorphic con-
tinuous ナ對應ヲ F_0 トスル。先ツ $f(x) \in R_0$ ガ實函
數ナルトキハ $F_0(f) \in \mathbb{R}$ ナ實數トナルコトハ Gelfand,
Saty 15 ヨリワカル。今 G / 各点 x_i = 對シテ $f(x_i) \neq 0$

トル $\mathcal{J}_0$ = 属スル實函数がアルトスレバ, ソノ一ツヲトリ f_{x_1} トスル。即チ $f_{x_1}(x_1) \neq 0$ 。

$U_{x_1} = E_{x_1}(f_{x_1}(x)^2 > 0)$ トスレバ, G $bicomact$ トルコトカラ, カナル有限箇ハ G 全体ヲオホフ。ユノ有限箇 = ツイテノ和 $\sum f_{x_1}(x)^2 = f_0(x) \in \mathcal{J}_0$ ハ G 上至ル所 0 = ナラヌカラ, $f_0^{-1}(x) \in \mathcal{R}_0$ トナル。コレハ矛盾ヲ生ズル。故ニ $\mathcal{J}_0$ = 属スル實函数ハスベテ一点 $x_0 \neq 0$ トナル。

故ニ實函数 f = 對シテハ $F(f) = f(x_0)$ トナル。一般ニ $F(f_1(x) + if_2(x)) = F(f_1) + iF(f_2) = f_1(x_0) + if_2(x_0)$ トナルカラ, Lemma ハ証明セラレタ。

定理4 『§2ノ $normed\ ring\ \mathcal{R} = \mathcal{T}$, 任意ノ $maximal\ ideal\ \mathcal{J} =$ 對シテ $G \ni x_0, y_0$ が定マリ, $\mathcal{J} \cap \Phi(x_0, y_0) = 0$ トル Φ ノ全体トナル。』

(証) $\mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}/\mathcal{J}$ トル $\mathcal{R}$ ノ $continuous\ functional$ $\mathcal{T} F(\Phi)$ トスル。

$\mathcal{J}_i = \mathcal{J} \cap \mathcal{R}_i$ ($i=1, 2$) トスレバ, $\mathcal{R}_i \rightarrow \mathcal{R}_i/\mathcal{J}_i$ トル $continuous\ functional$ ハ夫々 $F(\Phi_i)$ ($\Phi_i \in \mathcal{R}_i$) = 等シイ。Lemma 2ヨリ x_0, y_0 が定マツテ,

$$F(\Phi_1(x, y)) = \Phi_1(x_0, y_0) = \Phi_1(x_0, y_0);$$

$$F(\Phi_2(x, y)) = \Phi_2(x, y_0) = \Phi_2(x_0, y_0)$$

トナル。 F ハ $multiplicative\ continuous\ functional$ ナアルカラ (Gelfand, Satz 7) 定理3ヨリ F ハ $F(\mathcal{R}_1), F(\mathcal{R}_2)$ ニ延長トシテ一致ニ定マル。即

$$F(\Phi) = \Phi(x_0, y_0)$$

が成立スル。 q.e.d.

次、定理5の後に見ル如く = 双対定理 (定理7) ト、等値ナモノデアール。

定理5 『 $\mathcal{R}_3$ 、任意、maximal ideal $\mathcal{I}_3$ ハ、 $\mathcal{P}$ ル $G \ni x_1 \neq 0$ トナル $f(x) \in \mathcal{R}_3$ 、全体デアール』

(証) $\mathcal{I}_3$ $\mathcal{R}$ 、中、maximal ideal $\mathcal{I} = \mathcal{I}_3$ ナラズル (Gelfand, Satz 5) 即チ $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_3$ 。即チ $\mathcal{R}_3 \rightarrow \mathcal{R}_3 / \mathcal{I}_3$ ナル Functional $F_3: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R} / \mathcal{I}$ ナル $\mathcal{R}$ 全体ヲ定義サレヌ Functional $F = \mathcal{I}_3$ ナラズルヲ譯デアール。従ッテ定理4カラ

$F(\Phi(x, y)) = \Phi(x_0, y_0)$ トナル、特ニ $\Phi(x, y) = f(xy^{-1}) \in \mathcal{R}_3 = \mathcal{I}_3$ ナラズルハ

$$F(\Phi(x, y)) = f(x_0 y_0^{-1}) = f(x_1) \quad (x_1 = x_0 y_0^{-1})$$

トナル。 q.e.d.

注意。 $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \times \mathcal{R}_2 \times \mathcal{R}_3$ ナラズル、夫々、maximal ideal、ナル bicomact space $\mathcal{M}_i$ 、 $\mathcal{M}_i (i=1, 2, 3)$ トスレバ、今、場合 $\mathcal{M}_i$ ハ $\mathcal{M}$ カラ "Zerlegungsraum" トシテ作ラレ、 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ トナッタ。一般ニ

『 $\mathcal{R}_1$ 、normed ring $\mathcal{R}$ 、normed subring トスル。(勿論 $\mathcal{R}_1$ 、norm $\mathcal{R}$ 、norm ヨリ定メラル) 夫レ、maximal ideal、ナル bicomact space $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ トスレバ、 $\mathcal{M} \ni \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I} \cap \mathcal{R}_1 = \mathcal{I}_1 \in \mathcal{M}_1$ ナル對應デ、 $\mathcal{M}_1$ 、ハ $\mathcal{M}$ 、Zerlegungsraum トナル』

『 $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ が normed ring $\mathcal{R}$ / normed subring なら, $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ は $\mathbb{C}$ / scalar 倍 / ミヨリ + リ, $\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2$ を含む最小の $\mathcal{R}$ / normed subring が $\mathcal{R}$ 自身 + レトヤハ $\mathcal{M} \cong \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ ト 直積空間トシテ表ハサレル。』

イザレモ証明ハ定義カラ 直チニワカル。——

§ 6

淡中氏 / bicomact group G = 於ケル双対定理ハ次ノ形ヲ言ヒ表ハサレル。 (T. Tannaka, Hilfsatz 4)

定理 6 (淡中) 『 G / 完全既約 unitary 表現系 $\{u_{ij}^{(\alpha)}(x)\}$ カラ, $\forall$ / 成分 $u_{ij}^{(\alpha)}(x)$ / linear combination / 作ル ring $\Gamma_G = \tau$, $\forall$ / 上 / linear functional F :

$$F_G \ni f \rightarrow F(f)$$

ガ

$$(22) \quad \begin{cases} F(fg) = F(f) \cdot F(g) \\ F(\bar{f}) = \overline{F(f)} \end{cases}$$

ヲ満足スルナラバ, 實ハアル $x_0 \in G$ が存在シテ $F(f) = f(x_0)$ トナル。』

(註) (22) 式ヨリ $F(f\bar{f}) \geq 0$ デアル。故ニ

$$F(1) = F\left(\sum_{k=1}^n |u_{jk}^{(\alpha)}(x)|^2\right) = \sum_{k=1}^n F(|u_{jk}^{(\alpha)}(x)|^2)$$

ヨリ

$$(23) \quad F(1) \geq F(|u_{jk}(x)|^2) \geq 0$$

トナル。次ニ (22) ヨリ

$$\begin{aligned} 0 &\leq F(|\lambda + u_{jk}(x)|^2) \\ &= |\lambda|^2 F(1) + 2\lambda \{F(u_{jk})\} + F(|u_{jk}|^2) \end{aligned}$$

カラ例ノ論法デ (23)ヲ用ヒテ

$$|F(u_{jk})|^2 \leq F(1) F(|u_{jk}|^2) \leq F(1)^2$$

即チ

$$(24) \quad |F(u_{jk})| \leq F(1)$$

トナル。(24)ヲ用ヒテ G 上デ def. サレタ F ヲ $\S 4$ デ考
ヘタ R_3 ニマデ拡張スル。ソレニハ $R_3 \ni f(x)$ トスレバ

(20)カラ

$$f(x) = \sum_{d,i} \lambda_i^{(d)} u_{ii}^{(d)}(x)$$

ト絶対且一様収斂級數ニ展開サレ、特ニ $\sum_{i,d} |\lambda_i^{(d)}| < \infty$
デアル。故ニ

$$F(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{d,i}^n \lambda_i^{(d)} F(u_{ii}^{(d)}(x)) \right)$$

トスレバ、(24)式ヨリ確カニ limit ハ存在シテ、其
ノ時

$$\begin{aligned} F(f+g) &= F(f) + F(g), \quad F(\alpha f) = \alpha F(f) \quad (\alpha: \text{実数}), \\ F(fg) &= F(f) \cdot F(g) \end{aligned}$$

ハ確カニ保タレルコトガワカル。然ルトキハ定理5カラ

$F(f) = f(x_0)$ トル $x_0 \in G$ ガ存在スル。即チ定理ハ証

明サレタ。

§ 7

G が *bicompact* デハイ 時ハ、良ク知ラレテキル様
= G ヲ拡大スレバヨイ。今 G ヲ十分 = 澤山、 *almost*
periodic function ヲモツトスル。コノ全体ヲ A_G 。
トスル。 $A_G \ni f = \text{對シテ}$

$$\rho_f(x, y) = \overline{\lim_{a, b \in G}} (|f(axb) - f(ayb)|)$$

デ G ノ *metric* ヲ定メレバ、

$$\rho_f(x, y) = \rho_f(sxt, \Delta yt) = \rho_f(x^{-1}, y^{-1})$$

スベテ、 $f \in A_G = \text{對シテカナル } \rho_f \text{ ヲ作り、其ノ全体}$
 $\{\rho_f\}$ デ定メル *uniform structure* $\tilde{u}$ ヲ考ヘル。

$\rho_f (f \in A_G) = \text{關シテハ } G \text{ ノ } \textit{totally bounded}$
ナル故、 $\tilde{u}$ 自身 *totally bounded*、從ツテ G ヲ $\tilde{u}$
= 關シテ *complete* = 拡大スレバ、 *bicompact group*
 $\overline{G}$ ヲ得ル。(其ノ時 x^{-1} が一様連續デアルカラ)。

又 $\{u_{ij}(x)\}$ ヲ G ノ *unitary* 表現トスレバ、
 $u_{ij}(x) \in A_f \wedge \tilde{u} = \text{ツイテ一様連續デアルカラ } \overline{G} \text{ ニ}$
マデ延長サレル。即チ延長 $\{\bar{u}_{ij}(x)\}$ ハ又 $\overline{G}$ ノ表現ト
ナル。即チ G ノ上ノスベテノ *almost periodic*
function ト $\overline{G}$ ノ上ノスベテノ連續函数トハ一致スル。
又 G ノスベテノ *unitary* 表現系ハ $\overline{G}$ ノ上ノスベテノ連續
unitary 表現系トモ一致スル。

G ハ $\overline{G}$ 中 *everywhere dense* デアルガ、今 G

= topology がアツテ、 $A_G \ni f$ がスベテ G で continuous + ε / τ 考へル + ラバ、 $\exists$ / embedding、 $\wedge$ continuous ト + ル。

其ノタメニ $f = u_{ij} \cdot (x)$ / 場合 =, 與ヘラレタ ε = 對シテ G / 單位元ノ近傍 $\mathcal{U}$ / 決定アリ, $xy^{-1} \in \mathcal{U}$ + ラバ $\rho_f(x, y) < \varepsilon$ + ラシメルコトがイヘレバ十分デアル。一般ノ場合ハ此ノ場合 = 容易 = 帰着サレヌ。サテ $(u_{ij} \cdot (x))$ / 次数ヲ r トスレバ, $xy^{-1} \in \mathcal{U}$ + ラバ

$$|u_{ke}(x) - u_{ke}(y)| < \frac{\varepsilon}{r^2} \quad (k, e = 1, \dots, r)$$

ニナル様ニ $\mathcal{U}$ / 取ルコトが出来ル。ソウスレバ

$$\begin{aligned} \rho_f(x, y) &= \overline{\lim_{a, b}} (|u_{ij} \cdot (axb) - u_{ij} \cdot (ayb)|) \\ &= \overline{\lim} \left(\left| \sum_{k, l} u_{ik}(a) (u_{kl}(x) - u_{kl}(y)) u_{lj}(b) \right| \right) \\ &\leq \sum_{k, l} |u_{kl}(x) - u_{kl}(y)| \leq \varepsilon \end{aligned}$$

トナル。 q. e. d.

故ニ一般ノ G = 関スル双對定理 (Tannaka, Satz 3, Satz 4, Satz 1) ハ定理 6 = 帰着サレル譯デアル。

§ 7

上ノ議論ト關聯シテ, bicom pact group / 上ノ positive definite function (今マデノ意味トハ送ノ) / 特性ヲ持タルコトが出来ル。先ヅ上ノ $u_{ij}^{(x)}(x)$ / ヲスベテ一ツノ番号ヲ書イテ (必ズシモ可算箇デハナイガ)

$u_i(x)$ トスル。

$$(25) \quad \begin{cases} u_i(x) \overline{u_j(x)} = \sum_k a_{ij}^k u_k(x) \\ \overline{u_j(x)} = \sum_k b_{ji}^k u_k(x) \quad (b_{ji}^k = a_{ij}^k) \end{cases}$$

ト有限和 = 分解出来ル。今 G 上ノスベテ、Borel set 上ニ定義サレタ completely additive non-negative measure m ($m(G)=1$) ガアツテ、ソレカラ

$$(26) \quad f_i = F(u_i) = \int_G u_i(x) m(dx)$$

ヲ作レバ

$$(27) \quad \sum_{ijk} a_{ij}^k f_k \overline{\xi_i \xi_j} \geq 0$$

ガ任意ニ與ヘタ有限箇ノ complex numbers $\xi_1, \dots, \xi_n$ ニ對シテ成立スル。何トナレバ

$$\begin{aligned} \sum_{ijk} a_{ij}^k f_k \overline{\xi_i \xi_j} &= \sum_{ij} \int u_i(x) \overline{u_j(x)} m(dx) \xi_i \overline{\xi_j} \\ &= \left| \int \sum_i u_i(x) \xi_i m(dx) \right|^2 \geq 0 \quad \text{—} \end{aligned}$$

定理 7. 『與ヘラレタ f_i ($i=1, 2, \dots$) ナル集リガ

$$f_i = \int_G u_i(x) m(dx) \quad (i=1, 2, \dots)$$

トシテ表ハサレルタメノ必要十餘條件ハ (27) 及ビ

$$(28) \quad \overline{f_j} = \sum_k b_{ji}^k f_k \quad (i=1, 2, \dots)$$

ノ成立スルコトデアル。』

(証) 必要、上 = 見タ十分ナルコト。§ 6ヲ考ヘテ Γ_G
 $\neq$, $\Gamma_G \ni \sum \alpha_i u_i(x) \rightarrow \sum \alpha_i f_i =$ ヨツテ *linear*
functional F ヲ定義スル。 F ノ持ツ性質ハ (27), (28)
 カラ

$$(29) \quad F(f \cdot \bar{f}) \geq 0, \quad F(\bar{f}) = \overline{F(f)}$$

デアル。之レカラ定理 6ノ証明ト同様ニ F ヲ $\mathcal{R}_3$ 全体ニマ
 デ擴張スルコトが出来テ、且ツ (29)ハ其ノマニ保タレル。

サテ $\varphi \in \mathcal{R}_3$ ヲ $\varphi(\lambda) \geq 0 (\lambda \in G)$ トスル。任意ノ正
 数 $\varepsilon =$ 對シテ $\sqrt{\varepsilon + \varphi(\lambda)}$ ヲ考ヘレバ、定理 5ト Gelfand,
 Satz 20トカラ、亦 $\mathcal{R}_3 =$ 属スル。故ニ

$$0 \leq F(|\sqrt{\varepsilon + \varphi(\lambda)}|^2) = \varepsilon F(1) + F(\varphi)$$

故ニ $F(\varphi) \geq 0$ トナル。特ニ $\Gamma_G \subset \mathcal{R}_3$ ナル故、 F ハ Γ_G
 上ニ *positive functional* トナル。

$\mathcal{R}_0$ ヲ G ノ上ノ連続函数全体トスレバ、*uniform*
*topology*ニ關シテ Γ_G ハ $\mathcal{R}_0$ 中 *dense* ナルカラ
 (*almost periodic function*ニ關スル *approximation theorem*ニ依リテ) Γ_G 上ノ *positive*
linear functional F ヲ $\mathcal{R}_0$ 全体ニマテニ擴張シ
 テ

$$(1) \quad F(f+g) = F(f) + F(g)$$

$$(2) \quad f(x) \geq 0 \text{ ナラバ } F(f) \geq 0$$

トスルコトが出来ル。 G ハ *bicompact* ナルカラ

Rieszノ定理カラ $F(f) = \int_G f(x) m(dx)$ ナル

completely additive non-negative measure

が存在スル。

——（河田，森田，宮澤）——