



Title	單葉函數ノ除外値ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 216, p. 239-244
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74859
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

929, 單葉函數ノ除外値ニ就キテ

春 木 博 (神戸高等
商船学校)

$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ が $|z| < 1$ 正則
單葉ナルトキ、ソノ除外値 α ノ絶対値ノ評價ヲシテミル。
 $|\alpha| \geq \frac{1}{4}$ ナルコトハヨク知ラレテキル。

$$(A) \quad |\alpha| \geq \frac{1}{2 + |a_2|}$$

$$(B) \quad |\alpha| \geq \frac{-|a_2| + \sqrt{3 + |a_2|^2 + |a_3|}}{3 + |a_3|}$$

(証明) $|z| < 1$ 正則ナル故

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - \alpha}$$

ハ $|z| < 1$ 正則ナル。シカモ $f(z)$ が $|z| < 1$ 正則

棄ナルコトカラ $g(z)$ 是亦 $|z| < 1$ = テ 單葉デアルコトハ
明カデアル。 $g(z)$ ヲ展開スレバ

$$g(z) = -\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2} z - \frac{a_2 \alpha + 1}{\alpha^3} z^2 - \frac{a_3 \alpha^2 + 2a_2 \alpha + 1}{\alpha^4} z^3 + \dots$$

故ニ $h(z) = -\alpha^2 (g(z) + \frac{1}{\alpha})$ トオケバ

$$h(z) = z + \frac{a_2 \alpha + 1}{\alpha} z^2 + \frac{a_3 \alpha^2 + 2a_2 \alpha + 1}{\alpha^2} z^3 + \dots$$

$h(z)$ ハ $|z| < 1$ = テ 正則單葉デアル。故ニ Bieberbach
ノ定理及ビ Löwner ノ定理ニヨリ

$$\left| \frac{a_2 \alpha + 1}{\alpha} \right| \leq 2, \quad \left| \frac{a_3 \alpha^2 + 2a_2 \alpha + 1}{\alpha^2} \right| \leq 3$$

之レヨリ (A) 及ビ (B) ヲ得ル。

$$(\text{注意}) \quad \frac{1}{2+|a_2|} > \frac{-|a_2| + \sqrt{3+|a_2|^2+|a_3|}}{3+|a_3|} \quad \text{ナルトキ,}$$

即チ $|a_2|^2 + |a_3| > 1$ ナルトキハ (A) ノ評價ガヨク,

$$\frac{1}{2+|a_2|} < \frac{-|a_2| + \sqrt{3+|a_2|^2+|a_3|}}{3+|a_3|} \quad \text{ナルトキ, 即チ}$$

$|a_2|^2 + |a_3| < 1$ ナルトキハ (B) ノ評價ガヨク、 $|a_2|^2 + |a_3|$
= 1 ナルトキハ (A), (B) ハ同ジ評價トナル。

(A) = ヨリ、 $f(z)$ ガ絶対値 $\frac{1}{4}$ ノ値、即チ $\frac{1}{4} e^{i\theta}$ (θ
ハ實數) ナル値ヲトラナケレバ

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{-i\theta} z)^2}$$

ナルコトガ証明サレル。

何者、(A) = 於テ $\alpha = \frac{1}{4} e^{i\theta}$ トスレバ

$$|a_2| \geq 2$$

又一方 Bieberbach / 定理ニヨリ $|a_2| \leq 2$ ナル故、

$|a_2| = 2$ テ得ル。アトハ、Bieberbach / 定理 $|a_2| \leq 2$ テ証明シタト同様ノ方針ニヨリ

$$f(z) = \frac{z}{(1 + e^{-i\theta} z)^2}$$

ナルコトヲ証シ得ル。

次ニ $f(z)$ がニツノ除外値 α, β ラモツ場合ヲ考察シヨウ。

(結果) $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ ガ $|z| < 1$ デ正則且ツ單葉ニシテ、シカモ $|z| < 1$ デ $f(z) \neq \alpha, f(z) \neq \beta$ ナリトスレバ (但シ $\alpha + \beta \neq 0$ ナリトス)

$$(C) \quad |\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + a_2(\alpha + \beta)\alpha\beta| \\ \leq 2|\alpha\beta| \{ |\alpha + \beta| + 1 + \sqrt{2|\alpha + \beta| + 1} \}$$

$$(D) \quad |\alpha + \beta| |(\alpha + \beta)(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2) \\ - 2a_2\alpha\beta(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - a_3\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)| \\ \leq 3|\alpha\beta|^2 \{ |\alpha + \beta| + 1 + \sqrt{2|\alpha + \beta| + 1} \}^2$$

(証明) $f(z) \neq \alpha, f(z) \neq \beta$ ナル故

$$g(z) = \frac{1}{(f(z) - \alpha)(f(z) - \beta)}$$

ハ $|z| < 1$ =テ正則デアル。シカモ $g(z)$ ハ

$$|z| < \rho = \frac{|\alpha + \beta| + 1 - \sqrt{2|\alpha + \beta| + 1}}{|\alpha + \beta|}$$

ニテ單葉デアール。

柯者、 $|z_1| < \rho, |z_2| < \rho, g(z_1) = g(z_2)$ トスレバ

$$(f(z_1) - \alpha)(f(z_1) - \beta) = (f(z_2) - \alpha)(f(z_2) - \beta)$$

$$\therefore (f(z_1) - f(z_2))(f(z_1) + f(z_2) - (\alpha + \beta)) = 0$$

シカル = $f(z)$ ハ $|z| < 1$ =テ單葉ナル故

$$|f(z_1)| \leq \frac{|z_1|}{(1 - |z_1|)^2}, \quad |f(z_2)| \leq \frac{|z_2|}{(1 - |z_2|)^2}$$

$|z_1| < \rho, |z_2| < \rho$ ナル故

$$|f(z_1)| < \frac{|\alpha + \beta|}{2}, \quad |f(z_2)| < \frac{|\alpha + \beta|}{2}$$

$$\therefore |f(z_1) + f(z_2)| < |\alpha + \beta|$$

$$\therefore f(z_1) + f(z_2) \neq \alpha + \beta$$

從テ $f(z_1) \neq f(z_2)$. 從テ又 $z_1 = z_2$ テ得ル。

故ニ

$$h(z) = \frac{1}{(f(p_2) - \alpha)(f(p_2) - \beta)}$$

トオケバ $h(z)$ ハ $|z| < 1$ =テ正則單葉デアール。 $h(z)$

ヲ展開スレバ

$$\begin{aligned} h(z) &= \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{\alpha + \beta}{\alpha^2\beta^2} \rho z + \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + a_2(\alpha + \beta)}{\alpha^3\beta^3} \rho^2 z^2 \\ &\quad - \frac{1}{\alpha^4\beta^4} \{ (\alpha + \beta)(\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \alpha^2 - \alpha\beta - \beta^2) \\ &\quad - 2a_2\alpha\beta(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - a_3\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta) \} \rho^3 z^3 + \dots \end{aligned}$$

$$\text{故ニ } t(z) = \frac{\alpha^2\beta^2}{\rho(\alpha + \beta)} \left(h(z) - \frac{1}{\alpha\beta} \right) \text{ トオケバ}$$

$$t(z) = z + \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + a_2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta(\alpha + \beta)} \rho z^2$$

$$- \frac{1}{\alpha^2 \beta^2 (\alpha + \beta)} \left\{ (\alpha + \beta)(\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 - \alpha^2 - \alpha \beta - \beta^2) \right. \\ \left. - 2a_2 \alpha \beta (\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2) - a_3 \alpha^2 \beta^2 (\alpha + \beta) \right\} \rho^2 z^3 + \dots$$

$t(z)$ は $|z| < 1$ 上正則 單葉 なる故 Bieberbach の定理及び Löwner の定理より

$$\left| \frac{\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + a_2(\alpha + \beta)}{\alpha\beta(\alpha + \beta)} \rho \right| \leq 2$$

$$\left| \frac{\rho^2}{\alpha^2 \beta^2 (\alpha + \beta)} \left\{ (\alpha + \beta)(\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 - \alpha^2 - \alpha \beta - \beta^2) \right. \right. \\ \left. \left. - 2a_2 \alpha \beta (\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2) - a_3 \alpha^2 \beta^2 (\alpha + \beta) \right\} \right| \leq 3$$

之より (C), (D) を得る。

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots \quad \text{for } |z| < 1 \text{ is regular}$$

單葉トスルトキ、以上ノ結果ヨリ

$$|\alpha| < \frac{1}{2 + |a_2|} \quad \text{and} \quad |\alpha| < \frac{-|a_2| + \sqrt{3 + |a_2|^2 + |a_3|}}{3 + |a_3|}$$

が成立スレバ $f(z)$ は α ナル値ヲ取ルコトが判ル。

要ニ、 $\alpha + \beta \neq 0$ ナル α, β 對シテ

$$|\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + a_2(\alpha + \beta)\alpha\beta| \\ > 2|\alpha\beta| \left\{ |\alpha + \beta| + 1 + \sqrt{2|\alpha + \beta| + 1} \right\}$$

又ハ

$$|\alpha + \beta| |(\alpha + \beta)(\alpha^2 \beta + \alpha \beta^2 - \alpha^2 - \alpha \beta - \beta^2) \\ - 2a_2 \alpha \beta (\alpha^2 + \alpha \beta + \beta^2) - a_3 \alpha^2 \beta^2 (\alpha + \beta)|$$

$$> 3|\alpha\beta|^2\{|\alpha+\beta|+1+\sqrt{2|\alpha+\beta|+1}\}^2$$

が成立スレバ $f(z)$ ハ α カ β カ何レカ $-\frac{1}{2}$ 値ヲ取
ルコトガ判ル。

———— (完) ————