



Title	行列系ノ既約性ト絶対規約性
Author(s)	安倍, 亮
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 217, p. 245-264
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74860
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

930. 行列系ノ既約性ト絶對既約性

号倍 亮(東)

I. P ヲーツノ Körper, K ヲソノ有限次ノ拡大体トスル. 群 \mathcal{O} ノ K = 於ケル g 次ノ matrix = ヨル表現

$$\mathcal{O} \ni a \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1g} \\ \dots & & \dots \\ \alpha_{g1} & \dots & \alpha_{gg} \end{bmatrix} \quad \alpha_{i\ell} \in K \quad (1)$$

ガ興ヘラレテ居ルトスル. matrix ノーツーツノ元 $\alpha_{i\ell}$ ヲ, K ノ P = 於ケル正規表現 = 於テソレ = 對應スル matrix $A_{i\ell}$ ($(K:P) = n$ ナラ n 次ノ行列) テ置換ヘル.

$$a \rightarrow \begin{bmatrix} A_{11} & \dots & A_{1g} \\ \dots & & \dots \\ A_{g1} & \dots & A_{gg} \end{bmatrix} \quad (2)$$

ガ \mathcal{O} ノ P = 於ケル ng 次ノ表現 = ナルコトハ明カデアアル.

Darstellungsmodul = ツイテ云ヘル次ノ標 = 云ヒ表ハサレル;

(1)ノ表現ガ \mathcal{O} - K - Modul

$$\mathcal{M} = u_1 K + \dots + u_g K \quad (3)$$

ヲ vermitteln サレル. 即チ

$$\mathcal{O} \ni a \quad a(u_1, \dots, u_g) = (u_1, \dots, u_g) \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1g} \\ \dots & & \dots \\ \alpha_{g1} & \dots & \alpha_{gg} \end{bmatrix} \quad (3')$$

デアルトスル.

$$K = \kappa_1 P + \dots + \kappa_n P \quad (4)$$

トシテ M は P -Modul トシテ

$$M = u_1 \kappa_1 P + u_2 \kappa_2 P + \dots + u_g \kappa_n P$$

トシテ n 階 / Modul = トシテ。此ノ様 = \mathcal{O}_f - P -Modul ト
考ヘテ M が vermittelt スル $\mathcal{O}_f / P =$ 於ケル n 階 / 表
現ガ (2) = 他ナラナイ。

扱表現 (1) が既約ダトスル。ガウスノト大抵ノ場合ハ表
現 (2) モ既約ニナル。唯 (1) が $K =$ オケル表現デアツテモ、
適當 = 同値ノ表現ニ移ルト、 $P < \mathcal{O} \subseteq K$ ノ中間体 $\mathcal{O} =$ 於
ケル表現ニナツテシマフ、即チ \mathcal{O} ハ既 = $\mathcal{O} \subseteq K =$ 含マレ
テ了フ様ナバアヒニハサウハナラナイ。

$$K = \kappa_1 \mathcal{O} + \dots + \kappa_r \mathcal{O}, \quad \mathcal{O} = \omega_1 P + \dots + \omega_s P$$

トスレバ、 K ノ P -Basis トシテ特別ト

$$K = \underbrace{\kappa_1 \omega_1 P + \dots + \kappa_1 \omega_s P}_{\text{}} + \dots + \underbrace{\kappa_r \omega_1 P + \dots + \kappa_r \omega_s P}_{\text{}}$$

ヲトスレバ、 \mathcal{O} ノ元ヲカケルト $\underbrace{\hspace{10em}}$ デマトマト各部分
ハ夫々ノ中ヘウツル。故ニ $K / P =$ 於ケル正規表現ニ於テ、
特ニ $\mathcal{O} \in \mathcal{O} =$ 對應スル Matrice A_{ik} ノ全部

$$A_{ik} = \begin{bmatrix} A'_{ik} & & & & \\ & A'_{ik} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & A'_{ik} & \\ & & & & A'_{ik} \end{bmatrix} \quad (A'_{ik} \text{ハ } S \text{ 次ノ行列})$$

ノ形ニナル。従ツテ (2) ノ右辺ノ Matrice = 行列ヲ適當ニ
イレカヘテ、同値トモ、ニ移ルト

$$A' = \begin{bmatrix} A'_{11} & \cdots & A'_{1g} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A'_{g1} & \cdots & A'_{gg} \end{bmatrix}$$

ヲ Γ ケ *diagonal* = 並ベタ形 = ナリ, 表現 (2) ハ可約一
ナツテ了フ。

(1) が如何ナル同値表現ニ移ツテモ, 中間体 Ω = 於ケ
ル表現ニナラナイナラバ, (2) モ既約デアルコトが証明サレ
ル。然レ決シテ 絶対既約 = ナラナイ。

上ノ附帯条件ヲ *Darstellungsmodul* = ツイテ云
ヒ表ハセバ次ノヤウニナル: 若シ (3) ノ Basis u_1, \dots
 \dots , u_g ヲ適當ニトツタトキ, 表現 (1) が中間体 Ω = オケ
ル表現ニナルナラバ

$$m = u_1 \Omega + \cdots + u_g \Omega$$

ガ \mathcal{O}_f - Ω -*modul* = ナル。ソレヲ \mathcal{M} ハ單 = \mathcal{O}_f - Ω -*modul*
 m = 於テ基礎体 Ω ヲ K ヲデ拡大シタ。

$$\mathcal{M}_K = m_K$$

= 過ギナイ。即チ條件ハ: \mathcal{M} ハ $P \subset \Omega \subseteq K$ ナルイカナル
中間体 Ω = 於ケル \mathcal{O}_f - Ω -*modul* m ノ擴大 $m_K = m$
ナツテキナイ。

逆 = P = 於テ既約デアアルが絶対既約デナイ表現 \mathcal{O}_f
ガアルトキ, P ノ適當ニ拡大体 K = 於ケル適當ニ 絶対既約 表
現 (1) ガアツテ, (1) カラ上ニ述ベタ手續ヲ (2) ヲ作ルト \mathcal{O}_f ハ
之ニ同値ニナルコトが証明デキル。カウシテ既約表現ハイツ
デモ絶対既約表現ニ帰着サセルコトガデキル。

Darstellungsmodul トシテ云へバ: \mathfrak{g} ヲ ver-
mitteln スル 既約 \mathfrak{g} - P -Modul \mathfrak{M} , トスル, 之
ハアル 絶対既約 \mathfrak{g} - K -Modul $\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{g}$ - P -Modul
トシテ 同型デアアル. 之ガ本談話ノ主ノ目的デアアル.

似々様ノ定理ガ Modul デナク, Lie Algebra 其
他ヲ含ム 一般ノ linear algebra デ成立ツコトガ知ラ
レテ居ル. (Landherr, Jacobson 等) ソレモ上ノ
定理ノ一ツノ應用トシテ証明デキル.

何レモ皆極メテ elementary ナ事實ナリデアアル.

2. 吾々ハ群ノ他ニ環ノ Lie 環等ノ表現モ考ヘルカラ,
「表現サレルモノ」ノ集合 \mathcal{G} ハ 單ニ集合トシテオイタ方ガ
都合ガヨイ. \mathcal{G} ノ元相互ノ間ノ算法ハ吾々ノ現在ノ考察ノ範
圍デハ全然問題ニナラナイ. コノ場合ニ \mathcal{G} ノ Darstel-
lungsmodul ノ定義ヲ述ベルバ (Darstellung ト
云ツテモ, 單ニ \mathcal{G} ノ元 $S = \text{matrix}$ ガ對應サレテ居ル
タケデアアル):

定義. \mathcal{G} ハ一ツノ集合, K ハ單位元ヲ持ツ (必ずシモ
可換デアリ) Ring トスル. \mathfrak{M} ハ有限階ノ K -Modul.

$$\mathfrak{M} = u_1 K + \dots + u_g K \left(\begin{array}{l} u(\lambda + \mu) = u\lambda + u\mu \quad u, v \in \mathfrak{M} \\ (u\lambda + v\mu)\nu = u \cdot \lambda\nu + v \cdot \mu\nu \\ \lambda, \mu, \nu \in K \end{array} \right)$$

デ, K ノ單位元 1 ハ單位演算子:

$$u \cdot 1 = u, \quad u \in \mathfrak{M}.$$

u_1, \dots, u_g ハ K = 關シ一々獨立デアアルトスル. (即チ \mathfrak{M}

$\wedge K$ / 上, Linearformenmodul) 従って特 = $\mathcal{M}K = 0$
 から $\wedge K = 0$ が出ル。^{*} 更 = $S \in \mathcal{Y}, u \in \mathcal{M} =$ 對シ
 $Su \in \mathcal{M}$

$$S(u\lambda + v\mu) = Su \cdot \lambda + Sv \cdot \mu$$

$$u, v \in \mathcal{M}, \lambda, \mu \in K$$

此時 \mathcal{M} が \mathcal{Y} / $K =$ 於ケル Darstellungsmodul, 或ハ
 簡單 = $\mathcal{Y}-K$ -modul ト云フ。

\mathcal{M} が (0) ト \mathcal{M} 自身以外 = $\mathcal{Y}-K$ -Teilmodul 有
 タトキ, \mathcal{M} ハ既約ナ $\mathcal{Y}-K$ -modul デアルト云フ。
 但シ總テ, $S \in \mathcal{Y} =$ 對レテ $S\mathcal{M} = 0$ ナル場合, 即チ既約
 ナ表現ヲ vermitteln スル場合ニハ, \mathcal{M} ハ既約ト
 云ハトイコトニスル。即チ今後既約トハ, (0) ト \mathcal{M} 以外 =
 $\mathcal{Y}-K$ -Teilmodul ヲ含マズ, 且ツ $\mathcal{Y}\mathcal{M} \neq 0$ ナル事ト
 スル。

$K \subset \Omega$ ナルトキ, $\mathcal{Y}-\Omega$ -modul \mathcal{M}_Ω / 定義ハ明
 カデアラウ。 K が可換体デ, K / 任意ノ代數的拡大体 $\Omega =$
 對シ \mathcal{M}_Ω が既約ナルトキ, \mathcal{M} ハ絶対既約ナ $\mathcal{Y}-K$ -modul
 デアルト云フ。

\mathcal{Y} / 元 $a =$ 對シ, 第一節, (3') / 式ニヨツテ K / 元ヲ
 作ツタ g 次ノ matrix が對應スル。コノ對應ガ, \mathcal{M} / ver-
 mitteln スル \mathcal{Y} / 「表現」デアアル。

表現ト云ヘルタメニハ通常

^{*} 換言スレバ, K / ニツノ元ガ相異ナツテキレバ, $\mathcal{M} =$ 對ス
 ル Operator トシテ本質ニ違ツテ居ル。

(1) \mathcal{V} が半群なら, $S_1 S_2 \cdot u = S_1 \cdot S_2 u$ なる条件が

(2) \mathcal{V} が加群なら, $(S_1 + S_2) u = S_1 u + S_2 u$ なる条件が

(3) \mathcal{V} が K の Zentrum = 含まれる Ring P 上の linear set なら

$$(S_1 P_1 + S_2 P_2) u = S_1 u \cdot P_1 + S_2 u \cdot P_2$$

なる条件が

(4) \mathcal{V} が Lie 環なら, $(S_1 \circ S_2) u = S_1 \cdot S_2 u - S_2 \cdot S_1 u$ なる条件が

夫々附加へられなければならない。

3. 定理 I K の Schiefkörper, \mathcal{M} の既約な \mathcal{V} - K -Modul, P の K の Zentrum = 含まれる $(K:P)$ = 有限な様な K の Teilkörper とする。而して $P \subset \Omega \subseteq K$ なる如何なる中間体 Ω = 對して, \mathcal{M} の \mathcal{V} - Ω -Modul m の拡張 = ナッテ居たいとする。コトキ \mathcal{M} の \mathcal{V} - P -Modul トシテ既約デアル。

証明. \mathcal{M} が \mathcal{V} - P -Modul トシテ既約な Teilmodul m ($\neq 0$, $\neq \mathcal{M}$) を含ムとする。 m の P の元ハ Operator トシテ許すが, K の元ハ全部ハ許サナイ。

$\therefore m$ K の \mathcal{V} - K -Teilmodul トナリ, 従ツテ \mathcal{M} の既約性 = ヨツテ $\mathcal{M} = m$ 致シなければならぬカラデアル。其処デ m の Operator トシテ許ス K の元ハ全体ハ $P \subset \Omega \subseteq K$ なる中間体 Ω をナス。 m は既約な \mathcal{V} - Ω -Modul デアル。

扱 K , Ω -Basis γ

$$K = \Omega x_1 + \dots + \Omega x_r$$

トスルト, 既 = 述ベタ様 = $\mathcal{M} = mK$ 故カラ

$$\mathcal{M} = (m\kappa_1, \dots, m\kappa_r) \quad (1)$$

デアアル。右辺ハ $m\kappa_1, \dots, m\kappa_r$ / erzeugen スル
Modul ト云フ意味デアアル。 $\kappa_i^{-1} \Omega \kappa_i = \Omega_i$ ト書ケバ,
 $m\kappa_i$ ハ $\gamma - \Omega_i$ -Modul デアツテ, $\gamma - P$ -Modul
トシテハ $m \ni u \leftrightarrow u \kappa_i \in m\kappa_i$ + 此對應 = ヨツテ iso-
morph 故カラ, 矢張り既約デアアル。従ツテモシ或 $i \neq j$
= 對シテ $m\kappa_i \cap m\kappa_j \neq (0)$ + ラバ, $m\kappa_i = m\kappa_j$ デ
アル。故 =

$$m\kappa = m, \quad \kappa = \kappa_i \kappa_j^{-1} \notin \Omega$$

即チ m ハ Ω = 層シ + イ元 κ γ Operator トシテ許ス
コト = + 且, Ω / 作リ方 = 反スル。 \therefore 必ズ $m\kappa_i \cap m\kappa_j$
= (0) デ

$$\mathcal{M} = m\kappa_1 + \dots + m\kappa_r$$

ハ直和 = + 且。所ガ之ハ正 = \mathcal{M} ガ $\gamma - \Omega$ -Modul m
ノ拡大 = + ツテ居ルコトヲ意味シ, 假定 = 反スル。故 = \mathcal{M}
ハ $\gamma - P$ -Modul トシテモ既約デナケレバナラナイ。

q. e. d.

Matrix トシテ書イタトキノ此ノ定理ノ意味ハ既 =
1 = 述ベタ通りデアアル。拡大デアイト云フ条件ハ / 節,
(1) カラ (2) ノ表現 = 移ツタトキヤハリ既約デアアルタメ =,
定理 / = 述ベタ如ク + 余デアアルバカリデハ + 且, 又必要デ

である。即ち拡大 = ナツテ居レバ, 1節 = 証明シタ様 =

(1) から (2) = 核ル表現が分解スル。即ち

定理1' γ - K - $\text{modul } M$ が γ - P - modul
トシテ既約ナラ M は γ - Ω - modul ($P \subset \Omega \subsetneq K$)
ノ拡大 = ナツテ居 + イ。

証明. M が γ - Ω - $\text{modul } m$ ノ拡大 = ナツテ
ナレバ, $m \subset M$ ト考ヘラレ, 而シテ $M = m\alpha_1 + \dots +$
 $m\alpha_r$ 即ち M は γ - P - modul トシテ既約デ + イ。
q. e. d.

4. 今度ハ第一節ノ表現 (2) から (1)ヲ求メル逆ノ
問題ヲ考ヘル。ソノ方が吾々ノ主ノ目的デアル。始メニ少
シ一般ナ形ヲ考ヘテ置ク。

P ノ1ヲ含ム可換環トスル。 γ - P - $\text{modul } M$,
Endomorphism α , 即ち M ノ内ノ
Operatorhomomorphism

$$(u\beta_1 + v\beta_2)\alpha = u\alpha\beta_1 + v\alpha\beta_2 \quad u, v \in M, \beta_i \in P$$
$$s u \cdot \alpha = s \cdot u \alpha \quad s \in \gamma \quad (1)$$

ハ Ring Δ ヲ作ル。 M ノ元 = $\beta \in P$ ヲ持ケル Operation
ヲソノマデ β トカケバ, P ガ可換デカラ, (3) = 於テ α ノ
代リ = β ヲオイテモ成立ツ。

故ニ $P \subset \Delta$ 。 即ち Δ ハ P ヲ含ム Ring デアル。

次ニ K ハ P ヲ Zentrum 内ニ含ム (必ずシテ可換デ
+ イ) Ring トシ, 且ツ P = 關シ一次独立ノ有限個ノ
Basisヲ持ツテ居ルトスル。 即ち K ハ P ノ上ノ algebra

がトスル。任意, γ - K -modul M' , γ - P -modul
ト考へルコトモ出来ル。以上ノ假定, 下=

定理2 γ - K -modul M' が γ - P -modul
 $M = (\gamma$ - P -modul トシテ) 同型トテ, M ノ Endo-
morphismering Δ ノ K ト同型ト Teilring \bar{K}
ヲ含ム。 M ハ γ - \bar{K} -modul トモ考へラレ, γ - K -
modul M' ト γ - \bar{K} -modul M トハ, K ト \bar{K} ノ 對應
スル元ヲ同一視スレバ作用同型デアアル。

証明. $M' \ni m' \leftrightarrow m = \varphi(m') \in M$ ヲ 與へラレ
タ (γ - P -) 作用同型トスル。 $x \in K$ ハ M' ノ 元ニ對ス
ル Operation トシテ (1)ノ α ト同シ條件ヲ満足スル。^{*}
即チ γ - P -modul トシテ, M' ノ Endomorphis-
mus デアル。 對應 $\varphi = \text{ヨツテ}$ 之レカラ γ - P -modul
 M ノ Endom. \bar{x} ガ 決ル。 即チ $m = \varphi(m') =$ 對
シ $m \bar{x} = \varphi(m' x)$ ト 定義スレバヨイ。 明カニ \bar{x} ハ
 M ノ 元ニ對シ式 (1)ノ α ト同シ條件ヲ満足。 即チ $\bar{x} \in \Delta$ 。
 $x \rightarrow \bar{x}$ ハ isomorph ト 對應テ而テ $P \subset K =$ ハ
 P 自身ガ 對應スル: $\bar{p} = p$. ヲレハ

$$\varphi(m' p) = \varphi(m') p$$

即チ φ ガ P -作用同型デカラ デアル。 $\therefore P \subset \bar{K} \subset \Delta$.

M' ノ K -Basis $u'_1, \dots, u'_g = \varphi$ ガ 對應スル M
ノ 元 u_1, \dots, u_g ガ M ノ \bar{K} -Basis ヲトス。 $x \leftrightarrow$
 \bar{x} ナル 對應ニヨツテ, K ト \bar{K} ヲ 同シモ, ト見レバ

$P \subset K \subset \Delta$ ト 考へラレル。 \bar{x} ノ 定義カラ 明カニ $\varphi =$ M'

\mathcal{M} は γ - K -Modul として作用同型である。

f. e. d.

結論. 従って今後 \mathcal{M} = 作用同型 + γ - K -Modul
ヲ考へル = \mathcal{M} 自身ダケヲ考へルバ十分である。而して $K \subset \Delta$
トしてよい。

或る意味で定理 2 の逆が成立す。

定理 2' γ - P -Modul \mathcal{M} , Endomorphismenring Δ / 部分環 K ($P \subset K \subset \Delta$) = 関し
 \mathcal{M} が一次独立 + Basis を持てば, \mathcal{M} は γ - K -Modul
ト考へられり。 γ - K -Modul として, \mathcal{M} , Endo-
morphismenring Δ / 元ノ中 K へ elementweise
ニ可換 + ϵ / 全体 (Δ 内 = 於ける K , Kommutator-
algebra) である。特ニ K が Schiefkörper + γ Basis
ニ関する条件ハ何時でも成立す。

証明. $K \subset \Delta$ 故に $K \ni \kappa \wedge s u \cdot \kappa = s \cdot u \kappa$ ヲ
満足スル、 γ 上 \mathcal{M} が K -Basis を持てば, 定義 = ヨリ \mathcal{M}
ハ γ - K -Modul である。

又 α が γ - K -Modul \mathcal{M} , Endomorphismus
ナリ, 任意 γ - P -Modul として, \mathcal{M} , Endom. であ
るか $\alpha \in \Delta$, γ 上 $u \kappa \cdot \alpha = u \alpha \cdot \kappa$ 故に $\kappa \alpha = \alpha \kappa$
がスベテ, $\kappa \in K$ = 就て成立す。 f. e. d.

5. P へ今後常ニ可換体トスル。更ニ γ - P -Modul

* 前頁脚註: $\gamma = \epsilon$, P が K の Zentrum = 含まれるコトが用ヒラレル。

M は既約なトスル。コノ時 M Endomorphismenring Δ の Schiefkörper である。(所謂 Schur, Lemma) $(M: P) = g$ トスレバ $P \subset \Delta \subset P_g$ であるから Δ は P 上ノ Divisionsalgebra である。 $P \subset K \subset \Delta$ ナル K は又ハリ Divisionsalgebra 従ッテ 定理 2' の 假定ハ何時ヲモ満足サレヲ 弁ル。コノ場合ニ 定理 2 ト 2' ヲマ トメテ云ヘバ:

定理 3 M は既約ナ γ - P -Modul であるトスル。 K が P 上ノ Zentrum 内ニ含ム Ring だトシテ, M が γ - K -Modul トモ考ヘラレルナラ, K 上 $P \subset K \subset \Delta$ ナル 多元体である。 従ニ $P \subset K \subset \Delta$ 上ノ任意ノ K 上ニ於テ M 上ノ γ - K -Modul ト考ヘラレ。 勿論 γ - K -Modul トシテモ既約である。

Δ 上ノ M 上ノ γ - K -Modul トシテ考ヘ得ル maximal ナ K である。

結論。 K 上ノ P -Basis ヲモツカラ, K/P = オケル正 規表現ガアル。 γ - K -Modul トシテ, M が vermitteln スル K ノ行列 = ヲル表現 = 於テ, K ノ元ヲ 正規表現ノ行列ヲ 置換ヘテ得ラレル P = 於ケル表現ガ, 與ヘラレタ 既約表現 である。

$M = v_1 \Delta + \dots + v_r \Delta$, 従ッテ $(M: \Delta) = r$ トスル。 又 Δ ノ Zentrum $\ni Z$, $(\Delta: Z) = j^2$ (j 上ノ Δ ノ Index), $(Z: P) = m$ トスレバ, 始メノ表現ノ 次数 g 上ノ

$$g = rj^2 m$$

5'. Δ / 中で違ッタ K ヲ取ツテ来ラモ essential = Δ 同ジ表現が収テ来テ了フコトガアル。

\mathcal{Y} - P -Modul Δ 既約, Δ, Z 前節ノ意味トスル。
 Z \supset Δ Δ / \supset \mathcal{Y} / Teilschiefkörper K_1, K_2 / 間 =
 Z / 元ハソレ自身 = 對應サセル Isomorphismus $\mathcal{X}_1 \leftrightarrow \mathcal{X}_2$
 ガアツタトスル。良ク知ラレテ居ル様 = 此ノトキ $\mathcal{X}_2 = \delta^{-1} \mathcal{X}_1 \delta$
 + $\delta \in \Delta$ ガアル。 \mathcal{Y} - K_1 -Modul ト考ヘ \mathcal{M} ト
 \mathcal{Y} - K_2 -Modul ト考ヘ $\bar{\mathcal{M}}$ トハ, $m \leftrightarrow \bar{m} = m \delta + \nu$
 對應 \Rightarrow 作用同型デアアル; 但シ Operator / $\sigma \in S \leftrightarrow S$,
 $\mathcal{X}_1 \leftrightarrow \mathcal{X}_2$ デ對應サセルノデアアル。實際

$$\overline{S m} = S m \cdot \delta = S \cdot m \delta = S \bar{m}$$

$$\overline{m \mathcal{X}_1} = m \mathcal{X}_1 \cdot \delta = m \delta \cdot \mathcal{X}_2 = \bar{m} \cdot \mathcal{X}_2$$

$\therefore K_1$ ト K_2 / 對應スル元ヲ區別シナケレバ, \mathcal{Y} - K_1 -Modul
 \mathcal{M} ト \mathcal{Y} - K_2 -Modul $\bar{\mathcal{M}}$ トハ同値 + 表現ヲ vermitteln
 スル。

6. Lemma. K Δ 可換体トスルトキ既約 + \mathcal{Y} - K -
 Modul \mathcal{M} が絶対既約 + 必要 + 十分條件ハ \mathcal{M} / Endo-
 morphismenring が基礎体 K 自身デアアルコトデア
 アル。

証明. 條件ハ, 與ヘラレタ Matrix / System 全
 体ト可換 + Matrix が $\mathcal{M} \in E$ / 形ニナルコトデアツテ, ソ
 レが必要條件デアアルコトハ Schur, Lemma / 系トシテ

良ク知ラレテ居ル。十餘ノ方ハ例ヘバ Weyl: Classical
 group p. 92 Theorem (3.4.C). γ ノ元ガ $\mathcal{M} =$
 惹起ス一次変換ノ集合ノ enveloping algebra $\Rightarrow [\gamma]$
 トスレバ, $[\gamma]$ ハ既約ノ matrix algebra. $(\mathcal{M}:K) = g$
 トスルト, $K_g = \text{Center } [\gamma]$ ノ commutatorノ com-
 mutatorハ $[\gamma]$ 自身デアアル。^{*}所ガ $[\gamma]$ ノ com-
 mutatorガ K 自身ダト云フ假定デアアルカラ $[\gamma] = K_g$.
 故ニ $[\gamma]$ シタガ γ ガ 絶対既約デアアル。 q. e. d.

7. 定理4 P : 可換体, 既約ノ γ - P -modul \mathcal{M}
 ガ 絶対既約ノ γ - K -modul (K : 可換)ト考ヘ得ルヲラ,
 K ハ \mathcal{M} ノ Endomorphismring Δ ノ一ツノ maximal
 ノ可換部分デアアル。逆ニ此様ノ K ヲトレバ, \mathcal{M} ハ γ - K -
 modulトシテ 絶対既約デアアル。 K ハ一般ニ一意的ニ決
 ラナイガ $(K:P) = jm$
 ハ一定デアアル。

*) 通常ノ algebrasノ理論ノ知識ヲ多少共必要トスルノハ,
 本談話中此処ガケデアアル。併シ commutatorノ com-
 mutatorガ元ヘテルコトノ一般論ハ不必要トノデアラツテ,
 K_g ノ 既約ノ Teilalgebra $\mathcal{O} = \text{一ツイテタケ云ヘレバ}$ ヨ
 イ。ソレニハ Weylノ本ニアリガ、一番近道デアラウ。 \mathcal{O} ノ正規
 表現ガ \mathcal{O} ヲ幾ツカ並ベタ形ニナル事(云ヘ換ヘレバ \mathcal{O} ガ mini-
 malノ左 Idealノ直和ニナルコト)ガケハドウシテモ得ル。
 此 Lemmaノモット elementaryノ証明ハ出来ナイモノデアラウカ。

証明: M が γ - K -Modul たら當然既約デ, 而
 定理 2 = ヨリ $K \subset \Delta$ 考へラレル. γ - K -Modul M
 / Endomorphismenring の定理 2' = 述べた様 =,
 K, Δ = オケル Kommutatoralgebra K^* デアル.
 K が可換デカラ $K \subset K^*$. 扱テ M が γ - K -Modul
 トレテ絶対既約 + $\gamma = \delta$ Lemma = ヨリ $K = K^*$ が
 必要十分. ソレ = K が maximal + 可換部分体 デアルコ
 トが必要十分 デアル. (實際 $K \subsetneq K'$ + K' 可換体 ガアレバ,
 $K' \subset K^*$ デカラ $K \neq K^*$, 逆 = $K \neq K^*$ たら $K^* - K \ni \alpha^*$
 フトリト, $K(\alpha^*)$ の K 上 echt = 含ム可換体)

f. e. d.

系 特 = Δ が可換 たらバ, $K = \Delta$. 即チ $P =$ 於ケル 既
 約表現ヲ $P \subset K =$ オケル 絶対既約表現ト考へル考へ方ハ一意
 的 = キマル.

8. 例. $P =$ 實數体トスル. コノトキ $\Delta = P$ 又ハ
 $P(i)$ 又ハ四元環体 Q デアル. 始メノ = ヅノ場合ハ可換デ
 カラ前節系 = ヨリ, 定理 4 / 絶対既約表現ハ一意的 = 決ル.
 $\Delta = Q$ デモ, ソノ最大可換部分体ハ何レモ $P(i) =$ 同型デカ
 ラ, 5' = ヨリ, 又ハリ一意性が成立ツ. 即チ

(A) 「實數体 = オケル既約表現 = 對シテハ定理 4 = 云ツ
 々絶対既約表現ハ一意的 = 決ル。」

實數体 = 於ケル既約表現ハ一般論 = ヨリ次ノ手續ヲ得ラ
 レル: 先ガ複素體 = 於ケル表現ガ全部分ツタトスル. ソノ

一ツヲ取り, 適當ト行列ヲ *transform* シテ, 總テノ行列
 ノ元ガ實數ニナレバ, ソレヲ實數體ニ於ケル (絶対) 既約表
 現ガ出來ル. モシドウ *transform* シテ $\in \text{real}$ = ナラ
 ナレバ, 行列ノ各々ノ複素數 $\alpha = a + bi$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$
 ナル *matrix* ガ置換ヘルト實數體ニオケル (絶対ナリ)
 既約表現ガデキル. ソノ際ニツノ同値ナリ複素表現カラ
 出發シテ同ク實表現ガ出來ルヤウナコトガナリト保証スル
 ノガ(A)ナリ.

i) $\Delta = P, K = P$ 始メカラ絶対既約

ii) $\Delta = P(i), K = P(i)$ K ナリ, 同値ナリニツノ表
現ニ分レル.

iii) $\Delta = Q, K = P(i)$ K ナリ, 同値ニツノ表現ニ
分レル.

9. 定理4ヲ, *Lie algebra*等ヲ含ム一般ノ *algebra*
ニ應用スル.

[定義] P ノ可換體, \mathcal{M} ノ有限階ノ P -*modul*

$$\mathcal{M} = u_1 P + \dots + u_g P$$

ナリツテ, \mathcal{M} ノ任意ノニツノ元ニ乘法ガ定義ナリ, 其ノ乘
法ハ

$$u(v_1 \rho_1 + v_2 \rho_2) = uv_1 \cdot \rho_1 + uv_2 \cdot \rho_2 \quad u, v_1, v_2 \in \mathcal{M} \quad (1)$$

$$(v_1 \rho_1 + v_2 \rho_2)u = v_1 u \cdot \rho_1 + v_2 u \cdot \rho_2 \quad \rho_1, \rho_2 \in P.$$

ヲ満足スルトスル. コノ時 \mathcal{M} ヲ P ノ上ノ (*linear*)

algebra 又ハ簡單ニ P -*algebra* ト云フ. $u_i u_j = \sum u_k \gamma_{ij}^k$

ヲ全然勝手 = 與へれば, (1) カラ \mathcal{M} ノ任意ノ元ノ積
 が決り, \mathcal{M} ハ *linear algebra* = ナル。

\mathcal{M} ノ P -Teilmodul \mathcal{M}_α が $\mathcal{M}_\alpha \subset \mathcal{M}$, $\alpha \mathcal{M} \subset \mathcal{M}_\alpha$
 ヲ満足スルトキ, \mathcal{M}_α ヲ \mathcal{M} ノ (P -) Ideal ト云フ。 (0), \mathcal{M} ,
 \mathcal{M}_α ハ必ず Ideal ナル。 P -Algebra \mathcal{M} が (0) ト
 \mathcal{M} 以外 = P -Ideal ヲ含マナイトキ \mathcal{M} ハ (P -) einfach
 ナルトイフ。

\mathcal{M} が 一階 $\mathcal{M} = u, P$ ナ $u, u, = 0$ トシテ \mathcal{M} , \mathcal{M} ノ定義
 ナハ \mathcal{M} ハ einfach ナルガ, 之レヲ除クタメ =, ein-
fach ノ定義ノ中一條件 $\mathcal{M}\mathcal{M} \neq 0$ ヲ附加ヘルコト = ス
 ル。 今ウスレバ自然 = $\mathcal{M}\mathcal{M} = \mathcal{M}$ トナル。

K ヲ P ノ 拡大体トスルトキ, $\mathcal{M}_K = u, K + \dots + u, K$ が
 普通ノ通 K -Algebra トシテ定義ナレル。 K ヲドウトツテ
 \mathcal{M}_K が einfach ナトキ, \mathcal{M} ハ normal einfach
 ナルト云フ。

(2) $v = uv, (u)'v = vu$ ト書キ, (u) ノ 全体ヲ
 (\mathcal{M}) , (u)' ノ 全体ヲ $(\mathcal{M})'$ $\gamma = (\mathcal{M}) + (\mathcal{M})'$ トスレバ,
 \mathcal{M} ハ (1) = 依ツテ γ - P -Modul ナル。 \mathcal{M} ノ P -Ideal
 ハ γ - P -Teilmodul = 也ナラナシ。 $\therefore \mathcal{M}$ が P -ein-
fach トハ \mathcal{M} が γ - P -Modul トシテ既約ナコトナ
 ル。 又 \mathcal{M}_K ハ γ - K -Modul ト考ヘラレル。 \mathcal{M}_K が K -
einfach ナ事ト, γ - K -Modul トシテ既約ナコトト
 同シナル。 故 = \mathcal{M} が normal einfach ナコトト,
 \mathcal{M} が γ - P -Modul トシテ 絶対既約 ナコトト同シナ

アイル。

10. Lemma. K が P の有限次拡大, \mathcal{M} が K 上の algebra となる。 \mathcal{M} は γ - K -modul として γ - Ω -modul m ($P < \Omega \subseteq K$) の Erweiterungsmodul \mathcal{M}_K である。

証明. 若し \mathcal{M} が γ - K -modul m の Erweiterungsmodul \mathcal{M}_K であるならば、 $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}_K$ である。 m は γ -modul であるから $(\mathcal{M}_K)m \subset m$, 即ち $\mathcal{M}_K m \subset m$. 然し $\mathcal{M}_K m = \mathcal{M}_K \cdot m = \mathcal{M}_K \cdot \mathcal{M}_K = \mathcal{M}_K^2 = m$, 之は矛盾。 q. e. d.

定理 1 の条件は自然に満足される。

定理 5 K が P の有限次拡大として \mathcal{M} が simple K -algebra であるならば、 \mathcal{M} は P -algebra として simple である。^{*}

例. 複素数、二次元、unimodular group である。複素 parameter である。之は real parameter である。群として Lorentz 変換群として local = 同型である。 \therefore Lorentz 群は simple である。之は normal simple である。(全部 local である)

* associativ の時、 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_K =$ 単位元がある。 Ideal は自然に K -Ideal であるから、 K -Ideal として P -Ideal として区別される必要はない。定理の内容は trivial である。 Lie 環の時、之は程 trivial である。

11. Lemma. \mathcal{M} は einfach + P-Algebra
 とす。 \mathcal{M} は \mathcal{Y} -P-Modul として Endomorphis-
 menring Δ は可換である。

証明. $\alpha \in \Delta$ は \mathcal{Y} -Modul \mathcal{M} の Endomorphis-
 mus であるから $(u)v \cdot \alpha = (u) \cdot v\alpha$, $(v)'u \cdot \alpha = (v)' \cdot u\alpha$,
 即ち $uv \cdot \alpha = u\alpha \cdot v = u \cdot v\alpha$. α は積を operate
 する, β は積を operate して $\beta \alpha$ である。 $\alpha, \beta \in \Delta$ ならば

$$(uv) \cdot \alpha\beta = (u\alpha \cdot v)\beta = u\alpha \cdot v\beta = (u \cdot v\beta)\alpha \\ = (uv)\beta\alpha$$

$$(uv)(\alpha\beta - \beta\alpha) = 0 \quad \mathcal{M}\mathcal{M}(\alpha\beta - \beta\alpha) = 0$$

$\mathcal{M}\mathcal{M} = \mathcal{M}$ であるから $\alpha\beta - \beta\alpha = 0$.

f. e. d.

(注意) \mathcal{M} は einfach であるから $\mathcal{M}\mathcal{M} = \mathcal{M}$ である
 ことがわかる。 Lie環の性質は "vollkommen"
 と名付けられる。

上, Lemma) 故に定理 4 の系, 仮定が成立する:

定理 6 einfach + P-algebra \mathcal{M} は, \mathcal{Y} -P-
 modul $(\mathcal{Y}(\mathcal{M}) + (\mathcal{M})')$ として, \mathcal{M} は Endomorphis-
 menkörper Δ 上の normal-einfach + alge-
 bra と考へる事が出来る。 逆 = \mathcal{M} が normal-
 einfach + K-algebra と考へられれば, $K = \Delta$ である。
 又 Δ は, \mathcal{M} を K-algebra と考へ得る最大 K
 である。(此の最後, 意味は, Landherr の Δ を \mathcal{M} の
 Zentrum と名付けた。)

12. 定理6の萌芽は既 = Cartan: Les groupes réels simples, finis et continus, [Ann. École Norm. (3) 31 (1914)] = アル。即ち實係数 / 単純 Lie 環は normal-einfach デアルカ、若レクハ複素係数 / 単純 Lie 環ヲソノマデ parameter / 數ガ = 倍ノ實 Lie 環ト考ヘタメノデアレ。 Landherr ハ über einfache Liesche Ringe (Hamburg 11) ノ冒頭デ、定理6ガ標數 0 / 体ノ時ニハ一般ニ成立チ、而モ \mathcal{M}_0 ガ常ニ完全可約トイフ條件ガアレバ、Lie 環デナクテモ成立ツコトヲ示シタ。

彼ノ証明ヲヨク見レバ、基礎体ガ vollkommen ト云フ事以外無條件デヨイコトガ分ル。更ニ Jacobson ハ a note on non-associative algebras (Duke 3) = 基礎体ノ制限ナシニ此ノ定理ヲ述ベラ居ル。 Jacobson ハ $\gamma = (m_e) + (m_e)'$ ナル行列系ノ enveloping P-algebra $[\gamma]$ ヲ考ヘル。 \mathcal{M} ガ einfach ナキニハ associative algebra $[\gamma]$ ガ einfach ナコトガ必要且ツ十分デアアル。

又 normal-einfach ナキニハ $[\gamma]$ ガ P_g トナルコトガ必要且ツ十分デアアル。之レカラ \mathcal{M} ガ einfach ナバアヒ、 $[\gamma]$ ノ Zentrum ヲ K トスレバ、 \mathcal{M} ハ K -algebra ト考ヘラレ、且 normal-einfach デアルト書イテアル。然レ 11, Lemma カラ分ルマデニハ \mathcal{M} ガ單純ナトキ $[\gamma]$ ハ單 = 單純ナノミデナク、アル可換体 (即チ

$[\gamma]$ (Genetrum K) 上ノ Matrizenring デアル。
ソレヲ云ハズ = 定理 6ノ 結論ガ出テ居ル、ハ少シ妙ダト
思フ。

本談話デハ $[\gamma]$ ノ 代リ = 専ラソノ Kommutator-
algebra, 即チ Endomorphismenring Δ ヲ 考ヘ
タ。 (唯第 6 節ノ Lemma, 証明ニハ $[\gamma]$ ヲ 持チ 出
サケレバ ナラナク ナツテ, 甚カ不徹底ナコトニ ナツテ了ッ
タガ)。 既約ナ Systemヲ 問題ニシテ ホル 限り, Δ ヲ 考
ヘル 方が 便利ナ様 デアル。

モット一般ナ バアヒニハ, $[\gamma]$ ハ 必ズ シモ Δ ノ Kom-
mutator トシテ, Δ カラ 逆 = characterize 出来 + イ。
カラ, $[\gamma]$ 自身ヲ 考ヘル 方が 一般的 デアラウ。

表現ノ 場合ノ 定理 4ハ E. Bannow: Die Auto-
morphismsgruppe der Cayley-Zahlen
(Hamburg 13), 250頁ノ 下ノ 方 = 書イテアル。 共
知 = 「 K ハ (bis auf Isomorphie) 一意的 = 定マル」
ト 書イテアルノハ, Algebraノ 場合カラノ 類推 デウツカ
リ 書イテ了ッタノ デアラウガ, 明カニ 誤リ デアル。