



Title	Radon-Nikodymノ定理ニ就テ
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 217, p. 274-281
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74864
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

934. Radon-Nikodym / 定理 = 就テ

吉田耕作 (阪大)

以下 = ~~本~~ ヲルヤ $\rightarrow$ = maximal method ヲ使ハ
、 Saks / 本 Theory of the integral = 於ケル

ヨリモ早く R-N / 定理 / 証明が得ラレル様デス。ノミ
 ナラズ、コノヤリオダトソノマコ lattice 論的 = for-
mulate デキテ Riesz, Freudenthal, 角谷等
 ノ結果が割合 = direct = 扱ヘル様デス。

§ 1. Concrete case

X ヲ任意ノ空間, $\mathcal{X}$ ヲ X ノ部分集合 E ノ作ル count
ably additive class トスル。即チ (i) 空集合 $\in \mathcal{X}$,
 (ii) $E \in \mathcal{X}$ ナラ E ノ餘集合 $C E \in \mathcal{X}$, (iii) E_n ト共一
 和集合 $\bigvee_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{X}$ 。 $\mathcal{X}$ デ定義サレタ實數値ノ finite
 函數 $F(E)$ ハ、互ニ相素ナ集合列 $\{E_n\} \in \mathcal{X}$ ニ對シテ

$$F\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} F(E_n)$$
 が成立ツトキ countably
additive ト呼ブ。 $\mathcal{X}$ デ c. a. 且 $\forall$ non-negative
 $\varphi(E)$ フーツトリ之ガ X ノ上ニ 測度ヲ定義スルモノト
 考ヘル。 $\varphi(E) = 0$ ナラ $F(E) = 0$ ナル如キ c. a. ナ F
 ハ 絶對連續, $\varphi(E_0) = 0$ ナル如キ $E_0 \in \mathcal{X}$ ガ存在シ
 テ $E \subset E_0$ ナラ $F(E)$ ナル如キ c. a. ナ F ハ 特異デアール
 ト呼ブ。 X ノ上デ定義サレタ實數値函數 $f(x)$ ハ全テノ實
 數 $\alpha =$ 對シテ $E_{\alpha}(f(x) > \alpha) \in \mathcal{X}$ ナルトキ 可測デアールト
 云フ。 $\mathcal{X}$, φ 及ビ可測函數ガ定義サレタ上ニ Lebesgue
 型ノ積分 $\int_X f(x) \varphi(dx)$ —— Radon-Stieltjes 積分

ハ例ノ通り定義サレル譯デス。(コノトキ可測函数 $f(x)$ ハ可積分デアルト云フ)。不定積分 $F(E) = \int_E f(x) \varphi(dx)$ が c. a. 且ツ絶対連續ナコトハ周知デス。

以上念ノタメニ復習シマシタガ

Radon-Nikodym ノ定理 ハ任意ノ c. a. f $F(E)$ ハ unique - 不定積分ト特異函数ノ和トシテ表ハサレルト云フノデアアル。

Maximal method ニヨル証明。 $F(E)$ ハ non-negative トシテ一般性ヲ失ハナイ。 $[F]$ ヲモツテ $F(E) \geq \int_E f(x) \varphi(dx)$ ノ全テノ $E \in \mathcal{X}$, が成リ立ツ様ナ non-negative , 可積分ナ $f(x)$ ノ全体ヲ表ハシマス。

$$\mu = \text{l.u.b.} \int_X f(x) \varphi(dx) \\ f \in [F]$$

ト置クト $f_n(x) \in [F]$ 且ツ $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n(x) \varphi(dx) = \mu$ ナル如キ列 $\{f_n\}$ が存在スル。然ラバ $\bar{f}_n(x) = \sup_{m \geq n} f_m(x) \in [F]$

且ツ $f(x) = \sup_{n \geq 1} \bar{f}_n(x) \in [F]$, $\int_X f(x) \varphi(dx) = \mu$ ナル

コト直チニワカル。吾々ノ証明スベキコトハ $G(E) = F(E) - \int_E f(x) \varphi(dx)$ ノ特異函数ナコトデアアル。コレヲ証明スルタメニ

補助定理 1. non-negative, c. a. ナ $G(E)$ が特異デナイナラ有理数 $\alpha > 0$ 及ビ $\varphi(E_\alpha) > 0$ ナル $E_\alpha \in \mathcal{X}$

が存在して $E \subset E_\alpha$ かつ $G(E) \geq \alpha \varphi(E)$.

が云へる。ヨイ。何者、 E_α の特性函数 $\frac{1}{\alpha} C_\alpha(x)$ とス
ると $\{f(x) + C_\alpha(x)\} \in [F]$

且つ $\int_X \{f(x) + C_\alpha(x)\} d\mu > \mu + \mu$ の定義 = 矛盾

スル結果ヲ得ルカラ。

補助定理 1' の証明. Hahn の定理 (Saks: loc.
cit. 32) = より任意、(有理数) $\alpha > 0$ = 對し $E_\alpha \in \mathcal{X}$
が定マテ

$$E \subset E_\alpha \text{ かつ } G(E) \geq \alpha \varphi(E),$$

$$E \subset C E_\alpha \text{ かつ } G(E) \leq \alpha \varphi(E).$$

ヨツテ全テ、有理数 $\alpha > 0$ = 對して $\varphi(E_\alpha) = 0$ とスル
 $E_0 = \bigcup_{\alpha > 0} E_\alpha$ 亦 $\varphi(E_0) = 0$ 且つ $E \subset C E_0$ かつ $G(E)$

$= 0$ とナツテ G の特異函数ニナツテ了フ。

§ 2. 空間 (A)

$\mathcal{X}$ が c. a. かつ $F(E)$ の全体 (A) の vector lattice
= ナル。即ちスベテ、 $E \in \mathcal{X}$ = 於て $F(E) \geq 0$ かつ
 $F \geq 0$ ($F \geq 0$ 且つ $F \neq 0$ かつ $F > 0$ と書ク) とスレ
バ

$$(1) F \geq 0, \alpha \geq 0 \text{ かつ } \alpha F \geq 0,$$

$$(2) F \geq 0, -F \geq 0 \text{ かつ } F = 0,$$

$$(3) F \geq 0, G \geq 0 \text{ かつ } F + G \geq 0,$$

$$(4) \text{semi-order} \geq = \text{ヨツテ (A) の lattice}$$

ヲ作ル。

$$\text{(實際 } F^+ = F \vee 0 = \sup(F, 0), F^- = F \wedge 0 = \inf(F, 0) \text{ へ夫々 } F^+(E) = \sup_{E' \subset E} F(E'),$$

$$F^-(E) = \inf_{E' \subset E} F(E') = \text{ヨリ定義サレル})$$

良ク知ラレテルヤウ $F = F^+ + F^-$, $|F| = F^+ - F^- = \sup(F, -F)$. 今 $\|F\| = |F|(X) = F$, X = 於ケル全度分トヲクト

(5) $\text{norm } \|F\| = \|(|F|) \| = \text{ヨリ } (A) \text{ へ Banach 空間ヲ作り且ツ}$

$$F \geq 0, G \geq 0 \text{ 十 } \|F + G\| = \|F\| + \|G\|$$

以下 (1) - (5) ヲ満足スル抽象空間 $(A) = \text{對シテモ上, max. method ヲマデ Radon-Nikodym 定理が formulate サレルコトヲ示サウ。任意} = \varphi > 0 \text{ ヲ撰ビ } (A) \text{ ノ } \underline{\text{unit}} \text{ ト呼ビ / ヲ表ハス。}$

$\alpha \cdot /$ ヲ簡單ノタメ $= \alpha$ ト書ク。 $E \geq 0$ が $E \wedge (1-E) = 0$ ヲ満足スルトキ E ヲ quasi-unit, quasi-units

E_i ノ一次結合 $\sum_{i=1}^n \alpha_i E_i$ ヲ 階段要素, 階段要素列

strong limit ト表ハサレル如キマデ, ヲ 絶對連續要素 ト呼バ。又 $|G| \wedge / = 0$ ナル如キ G ヲ 特異要素 ト云フ。然ラバ

定理 1 任意ノ要素 $E \in (A)$ へ unique = 絶對連續要素 ト 特異要素 ノ和トシテ表ハサレル。

(注意) 上ノ結果ハ Freudenthal, spectral theorem (Proc. Acad. Amsterdam, 39 (1936), 641—651) ヲ使ッテ出レタ 角谷君ノ 抽象
L空間 (Ann. of Math., 42 (1941), 523—537)
ト本質的ニ同ジコトデアルカ, spectral theorem ヲ
使ハズ § 1 ト同ジ idea ヲ出セル所ガ簡單カト思ヒマス。
(勿論 Freudenthal, idea ハ使ヒマスガ)

補助定理 2. (1) — (4) ヲ満足スル vector-lattice
ハ distributive

$$\text{即チ } (A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C), \\ (A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C).$$

証明. 例ヘハ G. Birkhoff: Lattice theory, p. 108

補助定理 3 階段要素ノ全体 $\mathcal{T}$ ハ (A), sub-lattice ヲ作ル。

証明 Freudenthal ノ示シタ如ク quasi-unit E ノ全体 E ハ Boole 代数 ヲ作ルコトハ直ガ
ワカル。故ニ任意ノ $T_1, T_2 \in \mathcal{T}$ ハ

$$T_1 = \sum_{i=1}^n \alpha_i E_i, \quad T_2 = \sum_{i=1}^n \beta_i E_i, \quad E_i \wedge E_j = 0$$

($i \neq j$), $E_i \in E$ ト書ケル。ヨツテ

$$T_1 \vee T_2 = \sum_{i=1}^n \max(\alpha_i, \beta_i) E_i,$$

$$T_1 \wedge T_2 = \sum_{i=1}^n \min(\alpha_i, \beta_i) E_i.$$

補助定理 4 $0 \leq F_1 \leq F_2 \leq \dots$ 且 $\{ \|F_n\| \}$

が有界ナラ $\sup(F_1, F_2, \dots) = F$ が存在シ且

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|F - F_n\| = 0$. 之レカラ特ニ (A) の σ -complete

(A) の上カラ (下カラ) 押ヘラレタ点列ハ (A) 内 $= \sup(\inf)$ ナラスル。

(証明) ¹⁾ 良ク知ラレタ不等式 $|F| - |G| \leq |F - G|$

カラ (5) = ヨリ

$$\|F\| - \|G\| \leq \|(|F| - |G|)\| \leq \|F - G\|$$

ヲ得ルカラ (A) の non-negative 要素ノ全体ハ strongly closed.

次ニ $\|F_n - F_m\| = \|F_n\| - \|F_m\|$, $n \geq m$ が $m \rightarrow \infty$ ノトキ $\rightarrow 0$ ナカラ F_n ハ strong = 7ル F = 収斂スル。ヨツテ $F_n - F_m \geq 0$, $n \geq m$, ニ於テ $n \rightarrow \infty$ ナラシタ $F \geq F_m$ ($m = 1, 2, \dots$), 又ニ $G \geq F_m$ ($m = 1, 2, \dots$) ナラ $m \rightarrow \infty$ ナラシタ $G \geq F$ ヨツテ $F = \sup(F_1, F_2, \dots)$.

(A) の分解 $F > 0$ トシテ一般性ヲ失ハス。 $[F]$

ヲ以テ $T \in [F]$ ナル如キ階段要素全体ノ集合トスル。

$$\mu = \sup_{T \in [F]} \|T\| \quad \text{トヲク} \quad T_i \in [F], \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \|T_i\| = \mu$$

1) F. Riesz: Acta Szeged, 10 (1940), 1-20 = ヨル。

ナル如キ $\{T_n\}$ がアル。 $\bar{F}_n = \sup_{m \leq n} T_m \in [F]$ (補

助定理3ヲ使ツタ)。補助定理4ニヨリ $\bar{F} = \sup_{n \geq 1} \bar{F}_n$

$= \text{strong limit}_{n \rightarrow \infty} F_n$ 且ツ $\|\bar{F}\| = \mu$ 。 $F - \bar{F} = G \geq 0$

が singular ナイトスルト 有理数 $\alpha > 0$ 及ビ

quasi-unit $E_\alpha > 0$ が存在シテ $G \geq \alpha E_\alpha$ (次

ノ補助定理1') 然ラバ $\bar{F} + \alpha E_\alpha \in [F]$ ノ数列,

strong limit, 従ツテ μ ノ定義カラ

$$\|\bar{F} + \alpha E_\alpha\| = \|\bar{F}\| + \alpha \|E_\alpha\| \leq \mu.$$

之ハ $\|\bar{F}\| = \mu$, $\|E_\alpha\| \neq 0$ ニ反スル。²⁾

補助定理1'. $G \geq 0$ が特異ナイト ($G \wedge 1 \neq 0$)

ナラ 有理数 $\alpha > 0$ ト $E_\alpha > 0$, $E \in \mathcal{E}$ が存在シテ

$G \geq \alpha E_\alpha$

証明. 全テノ $\alpha > 0 = \text{對シ}$ ($G - \alpha$)⁺ $\wedge 1 = 0$

ナイト。然ラズンバ補助定理2ニヨリ

$$0 \leq (G - \alpha)^+ \wedge 1 = ((G - \alpha) \wedge 1)^+ = ((G \wedge (1 + \alpha) - \alpha)^+$$

$= 0$ 即チ $0 \leq G \wedge (1 + \alpha) \leq \alpha$ ヲ得テ $G \wedge 1 = 0$

トナルカラ、ヨツテ今 $(G - \alpha)^+ \wedge 1 \neq 0$ 即チ $(G/\alpha - 1)^+$

$\wedge 1 \neq 0$ ($\alpha > 0$) トスルト補助定理4デ

$$E_\alpha = \sup_{n \geq 1} (n(G/\alpha - 1)^+ \wedge 1) \text{ 存在シ且ツ } > 0$$

2) 上ノ証明カラ F ノ絶対連続部分 $\bar{F}$ ハ單調増加ノ階段要素列ノ $\sup$ デモヤリ strong limit デモアル。