



Title	確率法則ノ組類別Ⅱ（補正）
Author(s)	國澤，清典
Citation	全国紙上数学談話会．1941，217，p. 283-289
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74865
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

935. 確率法則ノ組類別II (補正)

國澤清典 (阪大)

談話 9/0 デコノ問題ヲ述ベマシタガ代表法則ノ
取方ニ面白クナイ所ガアツテ氣ニカコツテイマシタ所、
近着ノ *Studia Math.* ヲ見ルト Doeblin ハ
dispersion (收幅度) ヲ使ツテ代表法則ヲ作ツテ
イマス。然レ Doeblin ノ考ヘタノハ意外ニモ對稱律ノ
成立シナイ *écart* ヲ作ル場合デアツテ問題ハ簡單ヲ殆
ンド *trivial* トナリマス。然レ *dispersion* (收
幅度) ノ考ヘ面白イノデ、此レヲ使ツテ再ビ對稱律ノ
成立スル *écart* ヲ作ル問題ヲ述ベ、次ニコレニ關係
シテ何ノマデナ場合ニ $F_n(a_n x + b_n) \rightarrow F(x)$ カ
ラ $a_n \rightarrow 1$, $b_n \rightarrow 0$ ガ出テクルカラ主トシテ述ベマ
ス。(定理3)

代表法則ヲ次ノ様ニ取ル。先ヅ *median* ハ *zero*
デ $F(x) = \frac{1}{2}$ ナル x ガ澤山アレバ此レ x ノ中央ヲト
ル事ニシテ $d(x)$ ヲ $F(x)$ ノ *Probability* x =
對スル收幅度ヲ示ス事トスレバ

$$d\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = 1$$

ナル様ニ法則ヲ *class* カラ選ブ。

此処ニ β ハ

$$\beta = \max_x (F(x+0) - F(x-0))$$

($F(x)$ は class 1 任意、法則ヲ良イ。)

談話 9/0 / 定理 1 及び定理 2 / 前半ハ代表法則ノ取方ニハ無關係ナルカラ定理 2 / 後半ヲ証明スレバ良イ。

即チ $\{K_n\}$ が $K = \text{Khintchine}$ ノ意味ヲ組別収斂スルト écart ノ意味デモ $K =$ 収斂スル部分系列 $\{K_{n_i}\}$ が存在スルコトヲ証明スレバ良イ。

假定ヨリ $K_n \ni F_n(a_n x + b_n) \quad n=1, 2, 3, \dots$ が存在シテ

$$F_n(a_n x + b_n) \rightarrow F(ax + b)$$

ナルガ此レハ最初カラ

$$F_n(a_n x + b_n) \rightarrow F(x)$$

トシテ良イ。此処ニ $F_n(x)$, $F(x)$ ハソレゾレ K_n, K ノ代表法則ヲ表ハス。

先ツ β_n ヲ $F_n(x)$ ノ最大ノ jump。 β ヲ $F(x)$ ノソレトシタ時 $= \beta_n \rightarrow \beta$ ナルコトヲ証明スル。

$F_n(a_n x + b_n) \rightarrow F(x)$ ナルカラ $\varepsilon > 0$ ヲ任意ノ正數トシ充分大キナ $n =$ ツキ $\sqrt{2} \varepsilon$ ノ幅ヲモツ或區間デシクトモ $\beta - \sqrt{2} \varepsilon$, Probability ヲモツ。 $\varepsilon > 0$ ハ任意ナルコトカラ

$$\lim \beta_n \geq \beta$$

デアル事がワカル。次 $= (n, \varepsilon_n); n \rightarrow \infty, \varepsilon_n \rightarrow 0$
ヲ選ンデ

$$(F_n(a_n x + b_n), F(x)) \leq \varepsilon_n$$

が成立スル様ニスルコトが出来ル。

故 $= F(x)$ ハ $\sqrt{2} \varepsilon_n$ ノ幅ヲモツ或ル區間デ Probability $\beta_n - \sqrt{2} \varepsilon_n$ ヲモツ。故 $= n \rightarrow \infty$ ナ
ヲシトルト

$$\overline{\lim} \beta_n \leq \beta$$

故 $=$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \beta$$

故 $=$ 充分大ナル $n =$ ヲキ

$$\begin{aligned} \frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon + \sqrt{2}\varepsilon &\leq \frac{1+\beta_n}{2} \\ &\leq \frac{1+\beta}{2} + \varepsilon \end{aligned}$$

次 $= \frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon =$ 對スル $F(x)$ ノ收幅度 $d(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon)$ ナ
モツ區間 (x_1, x_2) ナトルト

$$F_n(a_n x + b_n) \rightarrow F(x)$$

ナル故 $= X_n$ ナ $F_n(x) =$ 從テ確率變數トスレバ充分大キ
ノ $n =$ ヲキ

$$P_r \left\{ x_1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \leq \frac{X_n}{a_n} - \frac{b}{a_n} \leq x_2 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right\}$$

$$\leq \frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon + \sqrt{2}\varepsilon$$

故 =

$$\begin{aligned} \frac{d_n\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon + \sqrt{2}\varepsilon\right)}{a_n} &\geq (x_2 - x_1) - \sqrt{2}\varepsilon \\ &= d\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon\right) - \sqrt{2}\varepsilon \end{aligned}$$

故 =

$$\begin{aligned} \frac{d_n\left(\frac{1+\beta_n}{2}\right)}{a_n} &\geq \frac{d_n\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon + \sqrt{2}\varepsilon\right)}{a_n} \\ &\geq d\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon\right) - \sqrt{2}\varepsilon \end{aligned}$$

然ル =

$$\frac{d_n\left(\frac{1+\beta_n}{2}\right)}{a_n} = \frac{1}{a_n}$$

デアルカラ

$$\frac{1}{a_n} \geq d\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon\right) - \sqrt{2}\varepsilon$$

故 =

$$\lim \frac{1}{a_n} \geq d\left(\frac{1+\beta}{2} - 2\varepsilon\right) - \sqrt{2}\varepsilon$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ + ラシメルト $d(\alpha)$ ハ下半連続デアルカラ

$$\lim \frac{1}{a_n} \geq d\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = 1$$

$$1 \geq \overline{\lim} a_n$$

一方又 $F_n(a_n x + b_n) \rightarrow F(x)$ ナルコトヨリ任意, $\varepsilon > 0$

= 對シ充分大キイ n ヲ取ルト

$$\Pr\left\{l_1 - \varepsilon \leq \frac{X_n}{a_n} - \frac{b_n}{a_n} \leq l_2 + \varepsilon\right\}$$

$$\geq \frac{1+\beta}{2} - \varepsilon$$

但シ此処 = (l_1, l_2) ナル區間ハ $\frac{1+\beta}{2}$ = 對スル 收幅度

$d\left(\frac{1+\beta}{2}\right) = 1$ ナモツ區間トスル。

依ツテ

$$\frac{d_n\left(\frac{1+\beta}{2} - \varepsilon\right)}{a_n} \leq (l_2 - l_1) + 2\varepsilon$$

$$= 1 + 2\varepsilon$$

故 =

$$\frac{d_n\left(\frac{1+\beta_n}{2} - 2\varepsilon\right)}{a_n} \leq \frac{d_n\left(\frac{1+\beta}{2} - \varepsilon\right)}{a_n} \leq 1 + 2\varepsilon$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ ナラシメタルト

$$\frac{d_n\left(\frac{1+\beta_n}{2}\right)}{a_n} \leq 1$$

故 =

$$\overline{\lim} \frac{1}{a_n} \leq 1$$

$$\underline{\lim} a_n \geq 1$$

以上デ

$$1 \geq \overline{\lim} a_n \geq \underline{\lim} a_n \geq 1$$

故 =

$$\lim a_n = 1$$

又 $b_n \rightarrow 0$ デアルコトヲ示ス。

代表法則ノ作り方カラシテ $(-1, 1)$ ナル區間 $= F(x)$

ハ少クトモ Probability $\frac{1}{2}$ ヲ有シテイルコトカラ充分
大キイ $n = \gamma$ キ

$$\left| \frac{b_n}{a_n} \right| \leq 1$$

又 $F_n(a_n x + b_n) \rightarrow F(x)$ ナル故 = 如何 = 大キナ正数

α = 對シテモ

$$F_n(\alpha a_n x + \alpha b_n) \rightarrow F(\alpha x)$$

此レヨリ

$$\left| \frac{\alpha b_n}{\alpha a_n} \right| = \left| \frac{b_n}{a_n} \right|$$

ハ如何程ニテモ小ナラシメル事ガ出來ル。

以上デ

$$a_n \rightarrow 1$$

$$b_n \rightarrow 0$$

ト云フコトガ分ツタ。此レガワカルト前談話同様ニシテ

Khintchin の意味で収斂シテオレバ $\acute{e}cart$ 𠬞モ
亦収斂スルコトが云ヘル。

$F_n(x)$ 𠬞 $class$ の代表法則ト限ラナケレバ

$$F_n(a_n x + b_n) \rightarrow F(x)$$

が成立シテモ $a_n \rightarrow 1$, $b_n \rightarrow 0$ ハ勿論成立シナイ例ハ澤
山アル。ソコデ定理 3 トシテ

定理 3 $F_n(x)$ $n = 1, 2, 3, \dots$ 𠬞上述ノヤウナ
代表法則ニトレバ若シ $F_n(a_n x + b_n) \rightarrow F(x)$ ナラバ
 $a_n \rightarrow 1$, $b_n \rightarrow 0$

が成立スル。

$\acute{e}cart$ 𠬞導入シタコトニヨリ空間 R ノ位相的性質ヲシ
ラベル時ニ幾分便利ニナツタ様ニ思ヒマス。此レニツイテハ
ソノ中述ベテミタイト思ヒマス。