



Title	標數 p ノ係數体ニ於ケル Gruppen ring ニツイテ I
Author(s)	大島, 勝
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 218, p. 290-297
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74866
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

936. 標数 p の係数体 = 於ける *Gruppen ring* ニツイテ I

大 島 勝 (高知高校)

Dr. Brummond の *dissertation* = 於て、同
ジ表題、下 = 群 G' が アーベル群、 p -*gruppe* 及び G の
Sylowgruppe が *normalteiler* ナルトキ G の
Gruppen ring Γ の構造ヲ研究シ、*Sylowgruppe*
が *normalteiler* ナルトイフ假定ノ下ニ、 Γ が *Primär*
zerlegbar ナルタメノ必要 = シテ十分ナル條件ヲ得テキ
ル。

ソノ証明ハ相當面倒ナリテ Brauer の *modular*
darstellung ノ理論 = ヨリ簡單ニ証明出来ルカロウト思
ツテ少シ考ヘテキマシタ所、近着ノ *Annals* (Vol. 42. NO. 2)
ノ Brauer 及び Nesbitt ノ論文ヲ見テ、*Sylowgruppe*
が *normalteiler* トイフ條件ナシニ、一般ノ場合ニ於
テ Γ が *Primär zerlegbar* ナルタメノ必要 = シテ
十分ナル條件ヲ得タ、即チ

定理 I. 標数 $q = p^a q'$ 、 $(p, q') = 1$ ナル *Gruppe* G
ノ標数 p ノ *Körper* = 於ける *Gruppen ring* Γ ハ G
ガ標数 q' ノ *normalteiler* ヲ持ツトキ = 限り *Primär*
zerlegbar ナル。更ニ *Sylowgruppe* が *zyklisch*
ナル時且ツソノ時 = 限り Γ ハ *einreihig* ナル。

以下コノ定理ノ証明及び *Primär zerlegbar* ナ

Gruppen ring, 表現の問題ニツイテ少し述べさせて頂
キマス。

記号ハスベテ Brauer / 論文ニ従フ。即チ代數体 $K =$
於ケル O_f / 既約表現ヲ

$$Z_1, Z_2, \dots, Z_n$$

トスル。コニ $= K$ ハ O_f / 絶対既約指標ヲ含ンデキルモノト
スル。從ツテ K ハ O_f / 共軛類 $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \dots, \mathcal{G}_n$ / 個數
 $= n$ 。 p -regular Element ヲ含ム共軛類ヲ $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2,$
 $\dots$; $\mathcal{G}_{k'}$ トスレバ $K =$ 於ケル modular irreduci-
ble Darstellung / 個數ハ丁度 k' 個デ、ソレヲ

$$F_1, F_2, \dots, F_{k'}$$

トシ。 $F_k =$ 對應スル直既約表現ヲ $\cup_k$ デ表ス。又 F_k ($k=1,$
 $2, \dots, k'$) カ S 個 / Block

$$B_1, B_2, \dots, B_S$$

$=$ 命スレタトスル。從ツテ Z_i ($i=1, 2, \dots, n$) $\in S$ 個,
Block $=$ 命ケラレル。

[1] 定理 1, 証明。

Gruppen ring Γ カ Primär Zerlegbar
ナルコトト各 Block B_i ガ又 $\cup_k F_k$ ヲ含ンデキルコ
トトハ äquivalent デアル。從ツテ 特ニ最初 / Block
 B_1 カ Einsdarstellung F_1 / ミヲ含ムコトカヲ Q カ
位數 g' / Normalteiler ヲ持タナクテハ $+1$ 。

(Brauer P. 587)

即チ必要條件ナルコトハ分ツ。 $\Gamma = O_f$ カ位數 g' /

normalteiler q' を持つ q' の p -regular Element の全部より成る F_k の個数 k' は q' を含
 まれた q の共軛類の個数に等しく、従って又 q を含
 む q' の相似表現類 $\bar{R}_k$ の個数に等しくなる (q' の位
 数 h が素数 p であるから相似表現類は modular darstel-
 lung = 移ってモ変らない). 故に F_k と $\bar{R}_k$ = ヨツテ
 一意的に決定される. 又 $\bar{R}_k$ = 對應する K に於ける q の
 既約表現 $\{Z_\lambda, Z_\mu, \dots, Z_\nu\}$ とスルトキハ
 $\{\bar{Z}_\lambda, \bar{Z}_\mu, \dots, \bar{Z}_\nu\}$ ハスベテ既約成分トシテ
 F_k にミテ持つ.

従って F_k にミテ γ の Block を作ルカラ Γ は
 Primär zerlegbar デアル! (コレデ定理1の前半
 の証明ハ終ツタ、後半の証明ハ最後ニ証明シマス)

上ノ對應ヲ示セバ次の如クナル.

$$\bar{R}_k \longleftrightarrow F_k \longleftrightarrow U_k \longleftrightarrow (Z_\lambda, Z_\mu, \dots, Z_\nu) \\ \longleftrightarrow B_k$$

$\bar{R}_k$ = 属スル q' の表現ヲ $F'_{k1}, F'_{k2}, \dots, F'_{ks}$
 トスレバ

- (1) K デ定理ヲ証明シテオケバ、下ノ Körper = 於テモ
 定理1が成立スルコトハ準單純環ノ時ト同様デアル.
 コレハ einreihig の場合ニモ云ヘルコトデアル.

$$F_n(\mathcal{O}') \sim \left[\begin{array}{c} \overbrace{F'_{k1} \cdots F'_{k1}}^{a_k \text{ 個}} \\ \vdots \\ \overbrace{F'_{k2} \cdots F'_{k2}}^{a_k} \\ \vdots \\ \overbrace{F'_{kd} \cdots F'_{kd}}^{a_k} \end{array} \right]$$

但し後で $a_k = 1$
ナルコトヲ証明
スル

$$Z_n(\mathcal{O}') \sim \left[\begin{array}{c} \overbrace{F'_{k1} \cdots F'_{k1}}^{b_k \text{ 個}} \\ \vdots \\ \overbrace{F'_{k2} \cdots F'_{k2}}^{b_k} \\ \vdots \\ \overbrace{F'_{kd} \cdots F'_{kd}}^{b_k} \end{array} \right]$$

以上ニ依リ次ノ定理ヲ得ル。

定理2. Primär zerlegbar + Gruppen-
ring Γ = 於テ $\wedge = \vee$ ノ完全可約表現 $W_1, W_2, \dots, W_1(\mathcal{O}'),$
 $W_2(\mathcal{O}')$ ガ äquivalent ナルトキニ限り äquivalent
ナル。

標数 0ノ Körper = 於ケル $\mathcal{O}'$ ノ halblinéare
Transformation = ヨル Darstellungノトキ
 $\in \mathcal{O}'$ ノ既約表現 ($\mathcal{O}' \cdot T = \mathcal{O}'$)ノ相似表現類
ニヨツテ一意的ニ決定サレル故、後ヲ述ベル如ク色々類似ノ
定理ガ得ラレル。定理2ハソノ一例ナル。

(2) Primär zerlegbar + Gruppenring
 Γ 表現.

$\bar{\rho}_k$ = 属スルーツ表現 F'_k / Charakter $\chi_{k_1}(G')$
 が表ハセバ, スベテ $g' \in G' = \text{等シテ}$

$$\chi_{k_1}(G') = \chi_{k_1}(p_j^{-1} G' p_j)$$

ヲ満足スルヤウ + Sylowgruppe p , 元 $p_j \in p$,
 部分群 p_{k_1} ヲツクル. $\bar{\rho}_k$ = 属スル既約表現 / 個數ハ
 $(p : p_{k_1}) = \text{等シキ故}$

補助定理 1. $\bar{\rho}_k$ = 属スル既約表現 / 個數ハ $p^{a_k} (0 \leq a_k \leq a) = \text{等シ}$.

次 = 相似ナル表現ヨリ induzieren シタ g / 表現ハ
 äquivalent ナル故, F'_k ヲヨリ induzieren シタ
 g / 表現ハ U_k ト äquivalent ナラレ.

従ツテ U_k , F_k / 次數ヲ U_k , f_k トスレバ

$$\text{I. } \begin{cases} U_k = f'_k p^a \\ f_k = f'_k p^{a_k} \end{cases} \quad \text{但シ } f'_k \in \bar{\rho}_k = \text{属スル表} \\ \text{現 / 次數}$$

定理 3. U_k , F_k / 次數ヲ U_k , f_k トスレバ U_k , f_k
 ハイザレモ g / 約數ナラレ.

$f'_k \in g'$ / 約數ナル故明ラカデアレ.

定理 4. 既約表現 F_k ハ $\bar{\rho}_k$ = 属スル相似表現ヲ丁
 度ニツツ含ム.

次 = Cartan Invariants / 作ル matrix ヲ
 考ヘルト (I) ヲヨリ

$$C = \begin{pmatrix} p^a & & \\ & p^{a-d_1} & \\ & & \ddots \\ & & & p^{a-d_{k-1}} \end{pmatrix}$$

従って次ノ定理ヲ得ル。(Brauer P. 568)

定理5. α -typeノ既約表現ノ個数ハ q' = 含マレル q ノ共軛類デ、ソノ含ム元ノ数ガ丁度 p^α デ割り切レルモノノ個数ニ等シ。

従ってスベテノ既約表現ガ lowest kind ナルトキハ q' = 含マレル q ノ共軛類ノ含ム元ノ数ガ、スベテ p ト素トナルカラ q' ノ元ハスベテ Sylowgruppe p ノ元ト kommutativ トナル。故ニ p ハ q ノ normalteiler トナル。又特ニ既約表現ノ次数ガスベテ1ナルトキハ q' ガアーベル群トナラナクテハナラナイ。

定理6. q ガ位数 q' ノ normalteiler q' ヲ有スルトキハ Sylowgruppe p ガ normalteiler ナルトキニ限り、スベテ q ノ既約表現ガ lowest kind トナル。従テコノトキハ $q = q' \times p$

定理7. $q = q' \times p$ ニシテ且ツ q' ガアーベル群ナルトキニ限り q ノスベテノ既約表現ノ次数ハ1ニ等シ。

(q ガ normalteiler q' ヲ有スルコトハ勿論假定シテ)

定理6ガ一般ノ場合ニ成立スルカドウカハコト未解決デアル。(Brauer P. 587)

(3) $\mathcal{G}$ の既約表現 / Konstruktion.

ρ_k - 属スル $\mathcal{G}$ の既約表現 $F'_k =$ 對シテ ρ_k
ハ前ト同ジク

$$\chi_k(G') = \chi_k(P^{-1}G'P)$$

ヲ満足スル元 P ヨリ出来ヌ ρ / 部分群トスル。

$$\rho = Q_0 \rho_k + Q_1 \rho_k + \dots + Q_{i-1} \rho_k \quad (Q_0 = E)$$

トラバ

$$\mathcal{G} = Q_0 \mathcal{G}_k + Q_1 \mathcal{G}_k + \dots + Q_{i-1} \mathcal{G}_k$$

且ツ $F'_k =$ 於テ $\mathcal{G}'$ / 元 $G' =$ matrix $V(G')$ が對應シ
テキルトキ $\mathcal{G}_k$ / 既約表現ヲ、 $\mathcal{G}'$ / 元 $G' =$ 對應スル
matrix が $V(G')$ + ル如キモ、ハ只一ツアル。コレヲ Σ_k
トシ、 $\mathcal{G}_k$ / 元 $G_k =$ 對シテ matrix $W(G_k)$ が對應シ
テキルトスル。勿論 G_k が $\mathcal{G}'$ / 元 + ルトキハ $W(G_k) = V(G_k)$
デアアル。 Σ_k ヨリ induzieren シタ $\mathcal{G}$ / 表現ハ $F_k =$
äquivalent デアル。

尚 halblinear Transformation 又ハ Kol-
lineation = ヨル $\mathcal{G}$ / 表現 / トキモ大体 parallel =
行クト思ヒマス。

$$\Sigma_k(\mathcal{G}) : G \rightarrow \begin{pmatrix} W(Q_0 G Q_0^{-1}) & W(Q_0 G Q_1^{-1}) & \dots & W(Q_0 G Q_{i-1}^{-1}) \\ W(Q_1 G Q_0^{-1}) & W(Q_1 G Q_1^{-1}) & \dots & W(Q_1 G Q_{i-1}^{-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ W(Q_{i-1} G Q_0^{-1}) & W(Q_{i-1} G Q_1^{-1}) & \dots & W(Q_{i-1} G Q_{i-1}^{-1}) \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \exists Q, G, Q^{-1} \in G_K \text{ s.t. } \\ W(Q, G, Q^{-1}) = 0 \end{cases}$$

$F_K \vdash \Sigma_K(q) \Rightarrow q'$, 元 = 對應スルモノヲ考ヘレバ, *äquivalent* + q' / 表現トナリ、 F_K が既約ナルコトヨリ

$$F_K \sim \Sigma_K(q)$$

Gruppen ring Γ が *einreichig* = ナルトキ / 事 = ツイテハ次ノ機會ニ述ベマス。

尚 *halblineare Transformation* 又ハ *Kollineation* = ヨル q / 表現 / 時ニ大体 *parallel* = 行クト思ヒマス。 —以上—