



Title	標數 p ノ係數体ニ於ケル Gruppen ring ニツイテ II
Author(s)	大島, 勝
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 218, p. 297-308
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74867
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

937. 標数 p の標数体 = 於ける *Gruppenring*
= 就て II

大島 勝 (高知高校)

4 *einreihig* + *gruppenring*

定理 I, 後半. 即ち位数 $g \Rightarrow g' p^2$, 群 G の標数 p
 たる Körper $K =$ 於ける *Gruppenring* I' は g の位
 数 g' の *normalteiler* g' である, 且つ *Sylow-*
gruppe が *zyklisch* たるトキ = 限り *einreihig*
 = なるコトヲ証明シマス. $K =$ 於て G の既約表現がスベテ絶

對既給ナルトキニ証明シテオケバ十分デアル。

必要ナルコト。

q が位数 q' の Normalteiler q' であるコトノ必要ナルコトハ $I = \bigcap I_i$ により明カデアル。

然ルトキハ Gruppenring Γ は primär zerlegbar デアルカラ。

$$(1) \quad \Gamma = I_1 + I_2 + \dots + I_k$$

Einsdarstellung = 發展スル vollständig primär + Ideal I_i は Sylowgruppe ϕ_i の Gruppenring と isomorph デアルカラ、 I_i が einreihig ナルタメニ ϕ_i が zyklisch ナルコトが必要デアル。(Brummond)

十分ナルコト。

次ニ ϕ_i が zyklisch ナルトキハ primär + Ideal I_k がすべて einreihig ナルコトヲイヘバヨイワケデスガ、 F_k が highest kind ナルトキハ I_k は einfach デスカラ F_k が highest kind ナイモノノミヲ考ヘレバヨイ。ソノタメニ準備トシテ補助定理ヲ先ニ証明スル。

以下略ク Γ は primär zerlegbar ナリ、 ϕ_i ナリ $P = \bigcap P_i$ であるナリ ϕ_i は zyklisch + Sylowgruppe トスル。

(1) ナル分解ニ對シテ q' の Gruppenring

$$(2) \quad \Gamma' = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_k$$

ナレ分解が對應スル。相シ

$$(3) \Delta_k = \Gamma'_{k1} + \Gamma'_{k2} + \dots + \Gamma'_{ks}$$

ナ、 Γ'_k = 属スル G' の既約表現 F_k = 對應スル G' の相似表現 $F'_{k1}, F'_{k2}, \dots, F'_{ks}$ トスルトキ $\Gamma'_{k\lambda}$ の $F'_{k\lambda}$ = 對應スル單純イデアルデアアル。

$$(4) \Gamma_k = \Delta_k + P\Delta_k + P^2\Delta_k + \dots + P^{m-1}\Delta_k, \\ (m = p^a)$$

デアアル。

以下簡單ノヌメ F'_{k1} ヲ F'_k ト書クコトニスル。 F'_k の Character ヲ χ'_k デ表ハストキ

$$(5) \chi'_k(G') = \chi'_k(P^{-1}G'P)$$

ガ成立スルトキハ相似表現類ハ只一ツノ既約表現 F'_k ヲ含
ミ、従ッテ

$$\Delta_k = \Gamma'_k$$

トナレ。

補助定理 I.

$$F_k = \text{對應スル } F'_k \text{ ニツイテ } \chi'_k(G') = \chi'_k(P^{-1}G'P)$$

ガ成立スルトキハ Γ_k の Radikal ハ

$$(6) N_k = (E - P)\Gamma_k = \Gamma_k(E - P)$$

トナレ。

(証明) Γ_k ハ次ノ如ク表ハサレレ。

$$\Gamma_k = \Gamma'_k + P\Gamma'_k + \dots + P^{m-1}\Gamma'_k$$

$$= P'_k + P'_k P + \dots + P'_k P^{m-1}$$

$$= P'_k + P'_k (E - P) + P'_k (E - P^2) + \dots \\ \dots + P'_k (E - P^{m-1})$$

(5) = ヲリ $P^{-1} P'_k P = P'_k$ が成立スル故

$$T = P'_k (E - P) + P'_k (E - P^2) + \dots \\ \dots + P'_k (E - P^{m-1})$$

ハ P'_k にイデアルトナル。

今 P'_k / T , P'_k / N_k ヲ k 々 $\mathcal{O}'$ / Darstellungsmodul ト考ヘレバ共 $= P'_k = \text{isomorph}$ ナル。

$$(9) \quad P'_k / T \cong P'_k / N_k \cong P'_k$$

(P'_k ハ lowest kind ナル故 $F_k(\mathcal{O}') \cong F'_k$ ナル)

故 $= P'_k / T$ ト $P'_k / N_k =$ ヲル $\mathcal{O}'$ / 表現ハ $\mathcal{O}' =$ 對應スル matrix / ミヲ考ヘレバ $\mathcal{O}'$ / 表現トシテ äquivalent ナル故、同じ既約成分ヲ有ス、 N_k ト T / Rang が相等シキ故 $N_k = T$ トナル。

$$N_k = P'_k (E - P) + P'_k (E - P^2) + \dots + P'_k (E - P^{m-1})$$

同様ニ右イデアルニツイテ考ヘレバ

$$N_k = (E - P) P'_k + (E - P^2) P'_k + \dots + (E - P^{m-1}) P'_k$$

が成立スル。

$$E - P^i = (E - P) + P(E - P^{i-1})$$

＋ル故、上式ノ右辺ハ夫々 $\Gamma_k(E - P)$, $(E - P)\Gamma_k$ ト＋
ル。故＝

$$N_k = \Gamma_k(E - P) = (E - P)\Gamma_k$$

補助定理 2.

Γ_k = 對應スル $F'_k = \psi \text{ イテ } \chi'_k(G') = \chi'_k(P^{-i}G'P^i)$
ヲ満足スル i ノ中最小ナル i ノヲ p^{d_k} トスレバ Γ_k ノ
Radikal ハ

$$(8) \quad N_k = \Gamma_k(E - P^{p^{d_k}}) = (E - P^{p^{d_k}})\Gamma_k$$

(証明) $p^{d_k} = 1$ トキハ補助定理 1 ナル故 $p^{d_k} \neq 1$
トシ且ツ $P^{p^{d_k}} = Q$ ヲ表ハスコト＝スル。 $Q^{p^{a-d_k}} = E$
ヲアル。

今 Q = ヲツテ erzeugen サレル p ノ部分群ヲ ϕ_k
トスレバ $G' \phi_k = \psi \text{ イテ補助定理 1 が適用出来ル。即チ}$

$$\Gamma_k^* = \Gamma'_k + Q\Gamma'_k + \dots + Q^{(p^{a-d_k}-1)}\Gamma'_k$$

トスレバ Γ_k^* Radikal ハ $\Gamma_k^*(E - Q) = (E - Q)\Gamma_k^*$
ヲアル。

Sylowgruppe ϕ ハ zyklisch ナル故 F'_k ト相似
ト既約表現 $F'_{k\lambda} = \lambda$ スベテ同一ノ元 Q が對應スル。

従ツテ

$$\Delta_k^* = \Delta_k + Q\Delta_k + \dots + Q^{(p^{a-d_k}-1)}\Delta_k$$

1. Radikal ∇N_k^* トスレバ

$$N_k^* = \Delta_k^* (E - Q) = (E - Q) \Delta_k^*$$

次 =

$$P_k = \Delta_k^* + P \Delta_k^* + \dots + P^{(p^{d_k} - 1)} \Delta_k^*$$

及び

$$\begin{aligned} P_k / N_k^* &= \Delta_k^* / N_k^* + P \left(\Delta_k^* / N_k^* \right) + \dots \\ &\dots + P^{(p^{d_k} - 1)} \left(\Delta_k^* / N_k^* \right) \end{aligned}$$

(既約表現, Konstruktion 参照)

ナル故, Rang ∇ 比較スルコト = ヲリ

$$\begin{aligned} N_k &= N_k^* + P N_k^* + \dots + P^{(p^{d_k} - 1)} N_k^* \\ &= (\Delta_k^* + P \Delta_k^* + \dots + P^{(p^{d_k} - 1)} \Delta_k^*) (E - Q) \\ &= P_k (E - Q) \end{aligned}$$

即チ

$$N_k = P_k (E - Q) = (E - Q) P_k$$

補助定理 1, 2 = ヲリ Sylowgruppe が zyklisch
ナルトキハ primär ∇ Ring P_k ! Radikal $\wedge$
! Hauptideal ∇ アルコトが分ツタ。従ッテ P_k $\wedge$ ein-
reihig ∇ アル (浅野, über verallgemeinerte
Abelsche Gruppe mit -----, P. 234)

以上 = ヲリ 定理 1 $\wedge$ 完全 = 証明出来タ。

5. ツマラナイ問題デスガ、 G の既約表現 $Z_i (i=1, 2, \dots, n)$ が modular field = 移ッタトキモ、スベテ既約デアルヤウナ群ハドンナモノカ 調べテ見マシタ。

コノ様ナ群トシテハ、位数ガ p ト素ナル群、位数ガ p ト素ナル群ト Abelsch + p -Gruppe トノ直積 = ナ ヲテキル群及ビ Sylowgruppe が Normalteiler デナイ例トシテハ、 $p=3$ ナルトキノ交代群 A_4 等デアリ コス、得ラレタ結果ハ

定 理

位数 $g = g' p^a$ ノ群 G ノ既約表現 $Z_i (i=1, 2, \dots, n)$ ガ標数 p ノ Körper = 於テモ、スベテ既約ナルタメノ 必要且ツ十分ナル條件ハ G ガ位数 g' ノ Normalteiler g' ヲ有シ、 $G' =$ 含マレド G ノ共軛類ノ中ノノ含ンデ キル元ノ個数ガ $p^i =$ テ丁度割レルモノノ個数ヲ m_i トス レトキ

$$(9) \sum_{i=0}^a m_i p^{a-i} = n, \quad n \text{ ハ } G \text{ ノ共軛類ノ個数}$$

ガ成立スルコトデアル。

注意1. (9) ノ左辺ハ丁度 Cartan Invariants ノ ヱケル Matrix C ノ Spur ナル数 (9) ハ $S_p(C) = n$ トモ書ケル。

注意2. G ノ Gruppenring Γ ガ Primär zerlegbar ナルトキハ

$$S_p(c) = \sum_i m_i p^{a-i} \geq n$$

が成立スル。 Γ が *primär zerlegbar* デタイ
トキモ、コノ式が成立スルト面白イノデスガ、

先ヅ最初ノ Z_i が *modular field* = 移ッテモ
スベテ既約ナルタメニハ q が位数 q' ノ *normal-*
teiler テモツコトが必要ナルコトヲ証明スル。ソレ
ニハ次ノ補助定理ヲ証明スレバ十分デアル。尚 Z_i が
modular field = 移ッタトキノ表現ヲ $\overline{Z_i}$ テ表ハス
コトニスル。

補助定理3.

Einsdarstellung Z_i ヲ含ム Block B_i = 属スル
既約表現 $Z_i = \gamma_i \overline{Z_i}$ ガスベテ既約ナルタメニハ、 q
が位数 q' ノ *normalteiler* q' ヲ有シ、 *Sylow-*
gruppe p が *Abelsch* ナルコトが必要且ツ十分
デアル。

(証明) 十分条件ナルコトハ明カデアル。

B_i = 含マレバ 既約表現ノ中 $\overline{Z_i} \cong F_i$ ナルモノヲ
 $Z_1, Z_2, \dots, Z_t$ トスル。 *decomposition*
number ヲ考ヘレバ

$$\begin{aligned} d_{i,1} &= 1 \quad (1 \leq i \leq t) \\ &= 0 \quad (t < i) \end{aligned}$$

故ニ *Cartan Invariant* C_{ii} ヲ考ヘレバ

$$C_{ii} = \sum_{i=1}^n d_{ii} d_{ii} = t$$

即ち直既約表現 U_i は F_i を t 個含んでゐる。

Q の標数 0 の Körper = 於ける正規表現 S , S を完全可約な形 = transform して $\bar{S}$ とすれば $\bar{S}$, $\bar{T}$ は同じ既約成分を有し、且つ $\bar{S}$ は Q の正規表現で、且つ B_i = 属する Z_{λ} にツイテ、 Z_{λ} はすべて既約であるから $\bar{S}$ の既約成分として F_i を t 個含んでゐる。然るに U_i は F_i を既 = t 個含んでゐるから他の直既約表現 U_k は F_i を含まない。即ち B_i は F_i のみを持つるから Q の位数 g の normalteiler Q' をもたせたい。このとき $Z_i \cong F_i$ なる既約表現 Z_i はすべて Sylowgruppe ρ を表現であるから Z_i の次数が 1 なることから ρ は Abelsch なることが要す。

以下、又 g の Gruppenring Γ は Primär zerlegbar となる。

g の既約表現 Z_k が 対応する相似表現 $F_{k\lambda}$ を U_k 個含んでゐるとすれば、 Z_k の既約成分として U_k 個の F_k を含むから Z_k が既約なるときは必要十分条件は $U_k = 1$ である。この U_k は所謂 decomposition number である。

次に α -type の Block B_k = 属する既約表現 Z_{ki} ($i=1, 2, \dots, s$) とすれば

$$p^{a-\alpha} = \sum_{i=1}^s U_{ki}^2$$

従って $\overline{Z}_{\alpha i}$ がすべて既約ナルタメノ必要十分条件ハ、
 すべて $U_{\alpha i} = 1$ ナルコト即チ $p^{a-\alpha} = S$ が成立スル
 コトデアル。 $U_{\alpha i}$ ノ中少クとも一ツノヨリ大ナルモ、ガ
 アルトキハ $p^{a-\alpha} > S$

補助定理 4.

α -type ノ Block $B_{\alpha} =$ 属スル既約表現ガ modular field = テ、すべて既約ナルタメ=必要且十分
 ナル条件ハ

$$p^{a-\alpha} = S,$$

S ハ $B_{\alpha} =$ 属スル既約表現 $Z_{\alpha i}$ ノ個数 が成立スルコ
 トデアル。

すべてノ Block = ツイテ考ヘレバ

$$(40) \sum_{\alpha=0}^a m_{\alpha} p^{a-\alpha} = n,$$

$$\begin{cases} m_{\alpha} \text{ ハ } \alpha\text{-type ノ Block ノ 個数.} \\ n \text{ ハ 既約表現 } Z_i \text{ ノ 個数.} \end{cases}$$

が成立スルトキ=限り、すべてノ $\overline{Z}_i$ ハ既約デアル。 m_{α}
 ハ $q' =$ 含マレル q ノ共轭類ノ中、ソノ含ム元ノ個数が
 $p^{\alpha} =$ テ丁度割リ切レルモノノ個数=等シキ故、以上述べ
 タコトト、補助定理 3 ヨリ始め=述べ* 定理ヲ得ル。

尚定理ニ於ケル (q) ノ Sylowgruppe p が Abelsch
 ナルコトヲ含ンデキルヲケデス。

6. 順序が逆=ナリマシタガ Γ が Primär zerlegbar
 ナルトキ各 Γ_{α} ノ Radikal ヲ求メテ見マシタノデ書

キ加ヘテオキマス、方針ハ *einreihig* + 場合ト殆ンド
同様デスカラ、結果タケアゲテオキマス。

$$\Gamma_k = \Delta_k + P_1 \Delta_k + P_2 \Delta_k + \dots + P_{m-1} \Delta_k, \\ (m = p^a)$$

$$\Delta_k = \Gamma'_{k1} + \Gamma'_{k2} + \dots + \Gamma'_{ks}$$

トシマス。又

$$\Gamma_k^* = \Gamma'_k + P_1 \Gamma'_k + \dots + P_{m-1} \Gamma'_k \\ (\Gamma'_k \text{ヲ } \Gamma'_k \text{ト書クコトニスル})$$

トスレバ Γ_k^* ハ Γ_k ノ左イデアルデアル。

今 $F_k =$ 對應スル ϕ ノ部分群ヲ ϕ_k トシ ϕ ノ
 $\phi_k =$ ニル分解ヲ

$$\phi = \phi_k + Q_1 \phi_k + \dots + Q_{l-1} \phi_k$$

トスレバ Γ_k ノ Radical N_k ハ次式ヲ與ヘヲレシ。

$$(11.) \quad N_k = \Gamma_k^* \tilde{N}_k + Q_1^{-1} \Gamma_k^* \tilde{N}_k Q_1 + \dots \\ \dots + Q_{l-1}^{-1} \Gamma_k^* \tilde{N}_k Q_{l-1}$$

但シ $\tilde{N}_k$ ハ ϕ_k ノ Gruppenring ノ Radical
ヲ表ハス。

特ニ ϕ_k ガ ϕ ノ Normalteiler トルトキハ

$$N_k = \Gamma_k^* \tilde{N}_k + Q_1^{-1} \Gamma_k^* Q_1 \tilde{N}_k + \dots + Q_{l-1}^{-1} \Gamma_k^* Q_{l-1} \tilde{N}_k \\ = (\Gamma_k^* + Q_1^{-1} \Gamma_k^* Q_1 + \dots + Q_{l-1}^{-1} \Gamma_k^* Q_{l-1}) \cdot \tilde{N}_k \\ = \Gamma_k^* \tilde{N}_k$$

更 = P_k が normalteiler であり、zyklisch となる
 とき、 γ は Erzeugend γ P_k をスレバ

$$N_k = \Gamma_k (E - P_k) = (E - P_k) \Gamma_k$$

となる。故 = Γ_k が einseitig となるため、必要且
 つとなる条件は P_k が ϕ 、normalteiler であり、
 zyklisch となることである。