



Title	連続関数ノRing 及ビ Vector-lattice ニ就テ
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 218, p. 308-316
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74868
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

938. 連続函数 / Ring 及 $\mathbb{E}$ Vector-lattice
ニ就テ

中野 秀五郎 (東大)

1940 年 / *Annals* ニテ M. Eidelheit が次ノ
定理ヲ証明シテキル。

定理. *compact metric space* T = 於ケル
連続函数 / *Ring* E が unit Element $x(t) \equiv 1$ ヲ
含ミ且ツ *norm*

$$|x| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

= 關シテ *closed* + *レバ*、 E ハ茲ル *compact metric space* = 於ケル 總テ / 連続函数 / *Ring* ト *equivalent* ナリ。

此、如キ定理ハヨク知ラレテキルモノトバカリ思ツテキ
タ処、此度、Zentralblattニテ紹介シテアルノデ
意外ニ思ハレタ。然レ未ダ他ノ如何ナル文献ニアルカ私ハ知
ラナイノデ、モット拡張シタ然カモ詳シイ形ヲ証明シテ
見タ。

定理 I 或ル *bicompact Hausdorff*
space T ニ於ケル連続函数ノ *Ring* E ガ *unit Element*
 $x(t) \equiv 1$ ヲ含ミ且ツ *norm*

$$|x| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

ニ関シテ *complete* ナレバ

$$x(t) = x(t_0) \quad (\text{for all } x(t) \in E)$$

ナルカ如キ t ヲ *identify* シテ得ル *Zerlegungsraum* T' ニ於ケル總テノ連続函数ノ *Ring*ト *equivalent* ナアル。

又、次ノ定理ニ同時ニ証明シテ見タ。

定理 II 或ル *bicompact Hausdorff*
space T ニ於ケル連続函数ノ *Vector-lattice*
 E ガ *unit Element* $x(t) \equiv 1$ ヲ含ミ *norm*

$$|x| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

ニ関シテ *complete* ナレバ、定理 I ト同様ニシテ得ル
Zerlegungsraum = 於ケル總テノ連続函数
ノ *Vector lattice*ト *equivalent* ナアル。

証明 = 先が下次 / lemma を証明スル。

lemma *bicompact Hausdorff space*
 T = 於ケル連続函数 / *modul* M が *unit Element* を
含ミ, *norm*

$$|x| = \max_{t \in T} |x(t)|$$

= 関シ *complete*, 然カ T 内 / 任意 / *closed*
set A, B = 對シ, $AB = 0$ + レバ、任意 / $\varepsilon > 0$ = 對
シ A 内 = テハ

$$1 \leq \varphi(t) \leq 1 + \varepsilon$$

B 内 = テハ

$$0 \leq \varphi(t) \leq \varepsilon$$

然カ T = 常 =

$$0 \leq \varphi(t) \leq 1 + \varepsilon$$

ナル連続函数 $\varphi(t)$ が常 = M 内 = 存在スレバ、 M ハ T 内 = テ
連続ナル 総テノ 函数ヲ含ム。

証明. $f(x)$ ヲ T = テ 連続ナル任意ノ函数トス。 T が
bicompact Hausdorff space + ヲテ 以テ $f(x)$ ハ T
= テ *bounded* ナル、即チ

$$-m < f(x) < m$$

トス。任意 / $\varepsilon > 0$ = 對シ

$$-m = a_1 < a_2 < \cdots < a_n = m,$$

$$a_i - a_{i-1} < \varepsilon$$

トス。然ルトキハ 假定 = ヱリ

$$1 \leq \varphi_i(x) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{in } E(x; f(x) \geq a_i)$$

$$0 \leq \varphi_i(x) \leq \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{in } E(x; f(x) \leq a_{i-1})$$

$$0 \leq \varphi_i(x) \leq 1 + \frac{\varepsilon}{m} \quad \text{in } T$$

↑ル連続函数 $\varphi_i(x)$ が M 内 = 存在スル。

$$\text{今} \quad \varphi(x) = \sum_{i=2}^n \varphi_i(x) (a_i - a_{i-1}) + a_1$$

↑置ケバ $\varphi(x) \in M$ = シテ、然カモ $x \in E$

$$(x; a_{j-1} \leq f(x) \leq a_j)$$

↑ル x = 對シテハ

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^{j-1} (a_i - a_{i-1}) + a_1 &\leq \varphi(x) \leq \sum_{i=2}^j \left(1 + \frac{\varepsilon}{m}\right) (a_i - a_{i-1}) \\ &\quad + a_1 + \sum_{i=j+1}^n \frac{\varepsilon}{m} (a_i - a_{i-1}) \end{aligned}$$

即チ

$$a_{j-1} \leq \varphi(x) \leq a_j + \sum_{i=2}^n \frac{\varepsilon}{m} (a_i - a_{i-1}) \leq a_j + 2\varepsilon$$

故ニ

$$|f(x) - \varphi(x)| \leq a_j - a_{j-1} + 2\varepsilon \leq 3\varepsilon$$

從ツテ $f(x) \in M$ ナルケレバナラズ (M へ complete +
ルヲ以テナリ。)

定理 II / 証明 E へ Zerlegungsraum T'
= テ考フレバ、又ハリ連続函数 / complete + Vector-
lattice ナ、然カモ T' 内 / 相異ル x', y' = 對シテ

$$f(x') \neq f(y')$$

＋ル $f(x)$ が E 内 = 存在ス。 T' 内 = テ

$$f_0(x) = 3 \frac{f(x) - f(y')}{f(x') - f(y')} - 1$$

ト置ケバ $f_0(x') = 2, f_0(y') = -1$

＋ル $f_0(x)$ が E 内 = 存在ス。

A, B 7 T' 内, 任意, closed sets, 然カモ $AB = \emptyset$

トス。 $x' \in A, y' \in B$ = 對シ

$$f(x') = 2, f(y') = -1$$

＋ル $f(x)$ が E 内 = 存在ス。

$$E(x; f(x) < 0)$$

ハ open set = シテ x' 7 固定シ、 y' 7 B 内 = テ 変ヘレバ、 T が bicomact 十ル = ヨリ此ノトキ open sets, 有限個 = テ cover サレル。此有限個 = 對スル $f(x)$ 7 $f_1(x), \dots, f_n(x)$ トスレバ

$$f_0(x) = \min_{i=1,2,\dots,n} \{ \max(f_i(x), 0) \}$$

＋ル $f_0(x)$ ハ E = 屬シ

$$f_0(x') = 2, f_0(x) = 0 \quad \text{in } B$$

然カモ

$$f_0(x) \geq 0 \quad \text{in } T'$$

デアル。次 = 此ノ如キ $f_0(x)$ = 對シ

$$E(x; f_0(x) > 1)$$

＋ル集合ハ x' ノ Umgebung 7"アル = ヨリ。 A ハ此ノ

如キ *Umgebung*. 1 有限個 = τ cover される。此 1
有限個 = 対スル函数ヲ $f_0'(x), f_0''(x), \dots, f_0^{(n)}(x)$
トスレバ

$$\varphi(x) = \max_{i=1, \dots, n} \left\{ \min(f_0^{(i)}(x), 1) \right\}$$

$\wedge E = \text{属シ、然カモ}$

$$\varphi(x) = 1 \text{ in } A, \quad \varphi(x) = 0 \text{ in } B,$$

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 \text{ in } T'$$

デアル。故 = *Lemma* = ヨリ $E \wedge T' = \text{於ケル総テ}$ /
連続函数ヲ含ム。

定理 I / 証明 前ノ証明 = 述ベシ如ク $E \wedge$ *Zerle-*
gungssatz T' ヲ考ヘレバ、 $\forall$ ハリ連続函数 /
complete + Ring 然カモ T' 内ノ果ルニ点 x', y'
ニ對シ

$$f(x') \neq f(y')$$

ナル $f(x)$ が E 内ニ存在スル。

$$f_0(x) = 3 \left(\frac{f(x) - f(y')}{f(x') - f(y')} \right)^2$$

ト置ケバ、 $f_0(x) \in E = \text{シテ}$

$$f_0(x') = 3, \quad f_0(y') = 0, \quad f_0(x) \geq 0 \text{ in } T'$$

デアル。今 A, B ヲ T' 内ノ *closed sets* 然カモ
 $AB = \emptyset$ トスル。 $x' \in A, y' \in B = \text{對シ、上ノ如キ函数}$
 $f_0(x)$ が E 内ニ存在ス。 y' ヲ固定シ x' ヲ A 内ニ取
ル。 $E(x; f_0(x) > 2)$

ナル集合ハ x' の Umgebung デアルカラ、 A ハ此ノ如キ Umgebung ノ有限個デ cover サレル。此ノ有限個ニ對スル $f_1(x), \dots, f_n(x)$ トスレバ

$$g(x) = f_1(x) + \dots + f_n(x)$$

ハ又 $E = \text{属}$ ✓

$$g(y') = 0, \quad g(x) \geq 2 \quad \text{in } A$$

トナル。

$$h(x) = 2 - g(x)$$

トスレバ $h(x) \in E = \text{シテ}$

$$h(y') = 2, \quad h(x) \leq 0 \quad \text{in } A$$

トナル。

今一変数ノ函数

$$H(t) = \begin{cases} 1 & 1 \leq t \\ t & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

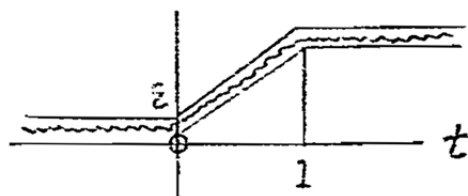
並ニ正数 $m (> 1)$, $\varepsilon (< 1)$ ニ對シ、Weierstrass ノ定理ニヨリ t ノ Polynomial $G_{m,\varepsilon}(t) = \text{シテ}$

$$H(t) \leq G_{m,\varepsilon}(t) \leq H(t) + \varepsilon \quad \text{in } (-m, m)$$

ナル $G_{m,\varepsilon}(t)$ が存在スル。

備テ前、 $h(x) = \text{對シ}$

$$E(x; h(x) > 1)$$



ハ y' ノ Umgebung ナルニヨリ、 B ハ此ノ如キ Umgebung ノ有限個デ cover サレル。此ノ有限個ニ對スル $h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x)$ トスル、 $h_i(x)$

ハ總テ $T' = T$ bounded + ルベキ = ヨリ

$$|h_i(x)| < m \quad \text{in } T'$$

+ ル m が存在スル。

$$\varphi_0(x) = \sum_{i=1}^n G_{m, \frac{1}{2n}}(h_i(x))$$

ト置ケバ $\varphi_0(x) \in E = \vee T$

$$0 \leq \varphi_0(x) \leq \frac{1}{2} \quad \text{in } A$$

$$1 \leq \varphi_0(x) \quad \text{in } B$$

ト+ル。 $\varphi_0(x)$ ハ又 $T' = T$ bounded + ルベキ = ヨリ

$|\varphi_0(x)| < m' \quad \text{in } T'$ + ル m' が存在スル。任意ノ正数

$\varepsilon =$ 對シ

$$\varphi(x) = G_{2m', \varepsilon}(2\varphi_0(x) - 1)$$

ト置ケバ $\varphi(x) \in E = \vee T$

$$0 \leq \varphi(x) < \varepsilon \quad \text{in } A$$

$$1 \leq \varphi(x) \leq 1 + \varepsilon \quad \text{in } B$$

$$0 \leq \varphi(x) \leq 1 + \varepsilon \quad \text{in } T'$$

ト+ル。故 = Lemma = ヨリ $E \cap T' =$ 於ケル總ヲノ
連続函数ヲ含ム。

注意 以上ニヨリ 証明ハ簡單デハタイガ、少シモ困
難ナ所ハタイ、唯複種ナダケデアル。

定理 I, II ハ私が Eine Spektraltheorie
(数物記事) = テ無証明ニテ述べタルモノニシテ、証
明スルニ及バズ思ヒタルモノ、M. Einheit / が
Annals = 出タルニヨリ、其ノ責任上此処ニ証明スル

コト=シマシタ。

(1941, 6, 21)