OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	函數方程式　f(x+y)f(x-y)＝(f2(x)+f2(y))／{1-k2(1-f2(x))(1-f2(y))}－1　(1≧k≧0) ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 218, p. 324-328
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74871
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

941. 函数方程式

$$f(x+y)f(x-y)=\frac{f^2(x)+f^2(y)}{1-k^2(1-f^2(x)(1-f^2(y))}-1$$

$(1\geqq k\geqq 0)$ ニ就イテ

春木　博（神戸商船商船）

今函数方程式

$$(F)\quad f(x+y)f(x-y)=\frac{f^2(x)+f^2(y)}{1-k^2(1-f^2(x))(1-f^2(y))}-1$$

$(1\geqq k\geqq 0)$

ヲ満足シ、原点ノ近傍デ定符号且ツ可測ナル函数 $f(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

(F) ニ於テ $x=y=0$ トオケバ常数解ヲ除ケバ $f(0)=\pm 1$ ナルコトガ判ル。$f(x)$ ガ解トラバ $-f(x)$ モ解ナル故、$f(0)=1$ トシテ以下論ズル。

(F) ニ於テ $y=x$ トオケバ

(1) $$f(2x)=\frac{2f^2(x)}{1-k^2(1-f^2(x))^2}-1$$

(F)ニ於テ x ノ代リニ $x+y$, y ノ代リニ $x-y$ ヲ置ケバ

$$f(2x)f(2y)=\frac{f^2(x+y)+f^2(x-y)}{1-k^2(1-f^2(x+y))(1-f^2(x-y))}-1$$

上式ヘ(1)ヲ代入スレバ

(2) $$\left\{\frac{2f^2(x)}{1-k^2(1-f^2(x))^2}-1\right\}\left\{\frac{2f^2(y)}{1-k^2(1-f^2(y))^2}-1\right\}$$
$$=\frac{f^2(x+y)+f^2(x-y)}{1-k^2(1-f^2(x+y))(1-f^2(x-y))}-1$$

(F)及ビ(2)ヲ $f(x+y)$, $f(x-y)$ ニ関スル聯立方程式ト見テ、ソノ實根條件ヲ求ムレバ常ニ $|f(x)|\leqq 1$ ナルカ、常ニ $|f(x)|\geqq 1$ ナルカ何レカナルコトガ判ル。

(イ) $|f(x)|\leqq 1$ ナルトキ

$f(0)=1$ デ、シカモ原点ノ近傍デ定符号ナル故、原点ノ近傍デ $f(x)>0$ デアル。故ニ(F)ノ両辺ノ對數ヲトレバ

$$\log f(x+y)+\log f(x-y)=\log\left\{\frac{f^2(x)+f^2(y)}{1-k^2(1-f^2(x))(1-f^2(y))}-1\right\}$$

$|f(x)|\leqq 1$, 即チ $f(x)$ ハ有界ニシテ又可測ナル故、上式ノ両辺ヲ 0 ヨリ λ ($\neq 0$) マデ、ソシテ Lebesgue 積分シテ $u=f(x)$ ト書ケバ

(3) $$\int_0^\lambda \log f(x+y)\,dy+\int_0^\lambda \log f(x-y)\,dy$$
$$=\int_0^\lambda \log\left\{\frac{u^2-f^2(y)}{1-k^2(1-u^2)(1-f^2(y))}-1\right\}dy$$

$$\equiv \int_0^\lambda F(u)\,dy$$

次ニ $\varphi_n(u)=\dfrac{F\left(u+\frac{1}{n}\right)-F(u)}{\frac{1}{n}}$ トオケバ

$$|\varphi_n(u)|<M$$

トナルコトガ容易ニ判ル。コゝニM ハ u 及ビ n ニ無関係ナ数デアル。

シカモ $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(u)=\dfrac{dF}{du}$ トナル故、Lebesgue ノ fundamental theorem ニヨリ

$$\frac{d}{du}\int_0^\lambda F(u)\,dy=\int_0^\lambda \frac{dF}{du}\,dy$$

トナル。

今ヲ適当ニトレバ

$$\int_0^\lambda \frac{dF}{du}\,dy\neq 0$$

ナラシメ得ルコトガ判ル。

即チ今ヲ適当ニトレバ

$$\frac{d}{du}\int_0^\lambda F(u)\,dy\neq 0$$

故ニ陰函数ノ定理ニヨリ (3) ノ右辺ヨリ $f(x)$ ニツイテ、原点ノ近傍デ一義的ニトイテ出セル。即チ G ハ連続函数ニシテ

$$f(x)=G\left\{\int_0^\lambda \log f(x+y)\,dy+\int_0^\lambda \log f(x-y)\,dy\right\}$$

シカモ $\int_0^\lambda f(x+y)\,dy+\int_0^\lambda f(x-y)\,dy$ ハ x ノ連続函数ナル故、$f(x)$ ハ原点ノ近傍デ連續トナル。

$f(x)$ が連続ナラバ上ノ証明ヲ再ビタドルコトニヨリ $f(x)$ ハ連続微分可能ナルコトが判ル。

$f(x)$ が連続微分可能ナラバ (F) ヲ一回微分シ、上述ノ論法デクリカヘセバ、$f(x)$ ハ二回微分可能ナルコトが容易ニ判ル。

又 (F) ニ於テ y ニツイトオクコトニヨリ $f(x)$ ハ偶函数ナルコトヲ知ル。

(F) ヲ y ニ関シテ二度微分シテ $y=0$ トオケバ $f(x)$ が偶函数ナルコトカラ $f'(0)=0$, 又 $f''(0)=\alpha$ トスレバ

$$f''(x)f(x)-f'^2(x)-\alpha k^2 f^4(x)-\alpha(1-k^2)=0$$

コノ微分方程式ヲ解イテ $|f(x)|\leqq 1$ ニ適スルモノヲ求ムレバ

$$f(x)=cn[\alpha x;\ k]\quad(\text{茲ニ }\alpha\text{ ハ任意ノ実数})$$

(ロ) $|f(x)|\geqq 1$ ナルトキ.

(F) ニ於テ $f(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$ トオイテ φ ニ関スル函数方程式ニ置ケバ

$$(G)\quad \varphi(x+y)\varphi(x-y)=\frac{\varphi^2(x)+\varphi^2(y)}{1-(1-k^2)(1-\varphi^2(x))(1-\varphi^2(y))}-1$$

シカモ $|f(x)|\geqq 1$ ナル故 $|\varphi(x)|\leqq 1$ トナル。

(G) ナル函数方程式ハ (F) ナル函数方程式ニ於テ k^2 ノ代リニ $1-k^2$ ヲオイタダケデアル。($1\geqq\sqrt{1-k^2}\geqq 0$)。

$f(x)$ が原点ノ近傍デ定符号デ可測ナラバ $\varphi(x)$ モ原点ノ近傍デ定符号デ可測ナル故、(G)ヨリ前ト全然同様ニシテ

$$\varphi(x) = cn[\alpha x; \sqrt{1-k^2}]$$

$$\therefore \quad f(x) = \frac{1}{cn[\alpha x; \sqrt{1-k^2}]} \qquad (\text{茲ニ } \alpha \text{ ハ任意ノ実数})$$

結局求ムル解ハ

$$\pm cn[\alpha x; k], \pm \frac{1}{cn[\alpha x; \sqrt{1-k^2}]} \qquad (\text{茲ニ } \alpha \text{ ハ任意ノ実数})$$

トナル。

之等ハ明ニ (F) ヲ満足セル。

——— (完) ———