OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	非可換群，群指標，双對定理ニ就テ
Author(s)	東大代數談話會
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 219, p. 340-360
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74874
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

944. 非可換群，群指標，双對定理ニ就テ

東大代數談話會

可換群トソノ character 群トノ間ノ duality（特ニ部分群ノ間ノ関係）ハ良ク知ラレテヰル通リデアルガ，非可換群ノ場合ニハ，character ノ代リニ表現ノ集リヲ考ヘルコトニヨッテ，淡中氏ニヨッテ双對関係が得ラレタ。此処デハ Frobenius ノ立場ニ戻ッテ，groupring ノ center トcharacter ノ作ル algebra トノ間ノ関係ヲ，$\mathfrak{L}$-algebra（§1 參照）トソノ conjugate $\mathfrak{L}$-algebra トノ間ノ duality トシテ調ベテ，character ニヨッテ群ノ構造が何処マデ判ルカトイフコトヲ考ヘテ見タイト思ヒマス。先ヅ有限群ノ場合ニ G. Köthe, Über Charaktere, Monatsh. f. M. u. P., Bd. 48 (1939) ノ方法ヲ用ヒテ考ヘ（§1, §2），次ニ bicompact group ノ場合ニ一部ノ結果ヲ延長シヨウト思ヒマス（§3）。

§1

定義「複素數体 Ω ヲ基礎体トシ，$x_1, \cdots\cdots, x_n$ ヲ base トスル algebra $\mathfrak{o} = x_1\Omega + \cdots\cdots + x_n\Omega$ が次ノ條件ヲ満足スルトキニ $\mathfrak{L}$-algebra ト呼ブコトニスル。

(1) $\mathfrak{o}$ ハ commutative デアル。

即チ $x_\alpha x_\beta = \sum_\gamma C_{\alpha\beta}^{\gamma} x_\gamma$ トスレバ，$C_{\alpha\beta}^{\gamma} = C_{\beta\alpha}^{\gamma}$.

(2) Unit element $e=x_1$ ヲ持ツ。即チ $c_{1\alpha}^{\gamma}=\delta_{\alpha}^{\gamma}$
(δ_{α}^{γ} ハ Kronecker ノ δ)

(3) $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ハスベテ real デアル。

(4) $(x_1,\cdots\cdots x_\alpha\cdots\cdots x_n)$ ノ一ツノ並ビカヘ $(x_{1'},\cdots\cdots x_{\alpha'},\cdots\cdots x_{n'})$ ガ次ノ (イ) (ロ) ヲ満足スル。

(イ) $(\alpha')'=\alpha$

(ロ) $c_{\alpha\beta}^{\gamma}=c_{\alpha'\beta'}^{\gamma'}$, 即チ $u=\sum_{\alpha}u_\alpha x_\alpha \leftrightarrow u'=\sum_{\alpha}u_\alpha x_{\alpha'}$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ ring automorphism ヲ與ヘル。

(5) $c_{\alpha\beta}^{1}=\delta_{\alpha}^{\beta'}h_\alpha$, $h_\alpha>0$

(6) $x_\alpha\longrightarrow h_\alpha$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ一ツノ表現ヲ與ヘル。
即チ $h_\alpha h_\beta=\sum_{\gamma}c_{\alpha\beta}^{\gamma}h_\gamma$ 』

直チニワカルコトハ

(ヰ) $1'=1$

(ホ) $h_1=1$, $h_\alpha=h_{\alpha'}$

(ヘ) $c_{\alpha\beta}^{\gamma'}h_\gamma=c_{\beta\gamma}^{\alpha'}h_\alpha$.

((ヘ) ハ $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ ノ間ノ関係 $\sum_{\lambda}c_{\alpha\beta}^{\lambda}c_{\lambda\gamma}^{\delta}=\sum_{\lambda}c_{\alpha\lambda}^{\delta}c_{\beta\gamma}^{\lambda}$ デ $\delta=1$ トシテ (5) ヲ用ヒレバヨイ。)

一番大切ナ $\mathfrak{L}$-algebra ノ例ハ，有限群 $\mathfrak{G}$ カラ作ッタ group ring of $\mathfrak{G}$ ノ center $\mathfrak{R}_{\mathfrak{G}}$ デアル。$\mathfrak{G}$ ヲ a_α カラ，ソノスベテノ conjugate elements ノ和 $x_\alpha=a_\alpha+x_2a_\alpha x_2^{-1}+\cdots\cdots+x_\gamma a_\alpha x_\gamma^{-1}$ ヲ作レバ，$x_1,\cdots$

……, x_n ハ $\mathfrak{A}_g$ ノ base デアル。之レガ $\mathfrak{L}$-algebra デアルコトハ, $x_1 = e$, n ハ conj. class ノ数, h_α ハ a_α ノ属スル conj. class ノ元ノ数, $x_{\alpha'} = a_\alpha^{-1} + x_2 a_\alpha^{-1} x_2^{-1} + \cdots\cdots + x_r a_\alpha^{-1} x_r^{-1}$. (6) ハ夫レノ principal rep. ニ対応スルトイフコトヨリ分ル。今一ツノ例ハ次ニ示スヤウニ夫レノ character ノ作ル algebra デアル。

定理1『Rang n ノ $\mathfrak{L}$-algebra $\mathfrak{A}$ ノ linear operator 全体ハ適当ニ算法ト, base ヲ与ヘルコトニヨリ, 又一ツノ Rang n ノ $\mathfrak{L}$-algebra $\overline{\mathfrak{A}}$ ヲ作ル。$\overline{\mathfrak{A}}$ ヲ $\mathfrak{A}$ ノ conjugate algebra ト呼ブ。』

(証) 先ヅ $\mathfrak{A}$ = Radikal ノ無イコト, 即チ n 箇ノ一次独立ナ一次ノ表現, $\eta^{(k)} = (x_1^{(k)}, \cdots\cdots, x_n^{(k)})$ ノ存在スルコトヲ証明スル。 $u = \sum_\alpha u_\alpha x_\alpha \to D(u) = (\delta_\alpha^\gamma(u))$, $\delta_\alpha^\gamma(u) = \sum_\beta u_\beta C_{\alpha\beta}^\gamma$ ハ $\mathfrak{A}$ ノ faithful regular rep. デアル。

$K = \begin{pmatrix} \sqrt{h_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{h_n} \end{pmatrix}$ ニヨッテ

$$D_1(u) = K^{-1} D(u) K = \left(\delta_\alpha^\gamma(u) \sqrt{\frac{h_\gamma}{h_\alpha}} \right)$$ ヲ作レバ, (9) ヨリ

(10) $D_1(u') = D_1(u)'$

トナル。$D_1(u)$ ハ $\mathfrak{A}$ ノ表現デアルカラ, $D_1(u) D_1(v) = D_1(v) D_1(u)$, 故ニ $\{D_1(u)\}$ ハ互ニ commuta-

tive + normal matrix ノ集リデアルカラ，一ツノ unitary matrix U ヲ同時ニ diagonal form ニ直スコトガ出来ル。

$$(KU)^{-1}D(u)(KU)=U^{-1}D_1(u)U=\begin{pmatrix}\lambda^{(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda^{(n)}\end{pmatrix},$$

コヽニ $\lambda^{(k)}(u)=\sum_\beta u_\beta x_\beta^{(k)}$ ナル u_β ニツイテノ一次式トナリ，$\mathfrak{x}^{(k)}=(x_1^{(k)},\cdots\cdots,x_n^{(k)})$ ハ $D(u)$ ガ faithful ナル故，n 個ノ一次独立ナ表現ヲ與ヘル。特ニ u_β ヲ変数ト見レバ，$U'=\overline{U^{-1}}$ カラ $U^{-1}D_1(u')U=\begin{pmatrix}\overline{\lambda^{(1)}} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda^{(n)}}\end{pmatrix}$，即 $\lambda^{(k)}(u')=\overline{\lambda^{(k)}(u)}$ トナル。即

$$(11)\qquad x_{\beta'}^{(k)}=\overline{x_\beta^{(k)}}\qquad(k=1,\cdots\cdots,n)$$

特ニ x_1 ハ D ノ unit element デアルカラ

$$(12)\qquad x_1^{(k)}=1$$

又 $\mathfrak{x}^{(1)},\cdots\cdots,\mathfrak{x}^{(n)}$ ハ D ノ一次表現ヲ盡シテヰルカラ，$\overline{\mathfrak{x}^{(k)}}$ ナル表現ヲ考ヘレバ

$(1,\cdots\cdots,n)$ ノ一ツノ並ビカヘ $(1',\cdots\cdots,n')$ ガアッテ $((k')'=k)$

$$(13)\qquad \overline{x_\beta^{(k)}}=x_\beta^{(k')}\qquad(\beta=1,\cdots\cdots,n)$$

特ニ (6) ノ假定ニ從ッテ

$$(14)\qquad \mathfrak{x}^{(1)}=(h_1,\cdots\cdots,h_n)$$

ト置ケ。$(1'=1)$

又 $f_k=\sum_\alpha h_\alpha\cdot\left(\sum_\rho |x_\rho^{(k)}|^2\cdot h_\rho^{-1}\right)^{-1}>0$ $(k=1,\cdots\cdots,n)$ ト置ケバ

$$(15)\qquad \sum_{k=1}^{n} f_k x_\alpha^{(k)}=\begin{cases}\sum_\beta h_\beta & (\alpha=1)\\ 0 & (\alpha\neq 1)\end{cases}$$

ヲ計算ニテ証明出来ル。(Hoheisel, P. 455). 特ニ $k=1$ トラバ $x_\rho^{(k)}=h_\rho$ カラ

$$(16)\qquad f_1=1 \quad 及ビ \quad f_k=f_{k'}$$

トナル。(15)式ヨリ

$$(17)\qquad \sum_k f_k x_\alpha^{(k)}\overline{x_\beta^{(k)}}=\sum_\gamma C_{\alpha\beta}^{\gamma}\cdot\sum_k f_k x_\gamma^{(k)}$$

$$=\delta_\alpha^\beta\cdot h_\alpha\cdot\sum_\rho h_\beta$$

トナル。コンデ $\alpha=\beta=1$ トオケバ (12) カラ

$$(18)\qquad \sum_{k=1}^{n} f_k=\sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha=g$$

ト置ク。

サテ $n=ol_g$ ノ場合ニハ g ノ箇ノ既約表現 $D^{(1)},\cdots\cdots,D^{(n)}$ (k 次表ヲ n_k トスル) ヲ考ヘレバ

$$D_\alpha^{(k)}=D^{(k)}(a_\alpha)+D^{(k)}(x_2 a_\alpha x_2^{-1})+\cdots\cdots+D^{(k)}(x_r a_\alpha x_r^{-1})$$

$$=\begin{pmatrix} x_\alpha^{(k)} & & \\ & \ddots\cdots & \\ & & x_\alpha^{(k)}\end{pmatrix}$$

ト置イタコトニナル。character ハ

$$\chi(a_\lambda) = \frac{1}{h_\lambda} \cdot Sp\left(D_\lambda^{(k)}\right) = \frac{n_k}{h_\lambda} \chi_\lambda^{(k)}$$

デアル。

(15) デ定メタ f_k が $f_k = n_k^2$ ヲ満足スルコトハ，(15)式ガ丁度 Of イ regular rep. イ Spur ニナッテ居ルトイフコトカラ分ル。

サテ今イ場合ニモ

$$(19) \quad \chi_\lambda^{(k)} = \frac{\sqrt{f_k}}{h_\lambda} x_\lambda^{(k)}$$

トオケバ，(17) ヨリ

$$(I) \quad \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{h_\alpha}{g}} \chi_\alpha^{(k)} \cdot \sqrt{\frac{h_\beta}{g}} \chi_{\beta'}^{(k)} = \delta_\alpha^\beta$$

故ニ $x_{\beta'}^{(k)} = \overline{x_\beta^{(k)}}$ カラ $\left(\sqrt{\frac{h_\alpha}{g}} \chi_\alpha^{(k)}\right)$ が unitary matrix トナリ

$$(II) \quad \frac{1}{g} \sum_{\alpha=1}^{n} h_\alpha \chi_\alpha^{(k)} \chi_\alpha^{(l')} = \delta_k^{\ l}$$

又 $\{x_\lambda^{(k)}\}$ ガ(1)イ表現デアルトイフコトカラ

$$(III) \quad h_\alpha h_\beta \chi_\alpha^{(k)} \chi_\beta^{(k)} = \sqrt{f_k} \sum_{\gamma=1}^{n} C_{\alpha\beta}^{\gamma} h_\gamma \chi_\gamma^{(k)}$$

(II) ノ直交性カラ

$$(IV) \quad \chi_\alpha^{(k)} \chi_\alpha^{(l)} = \sum_{m=1}^{n} g_{kl}^{\ m} \chi_\alpha^{(m)}$$

コレニ

$$(20)\quad g_{kl}^{m}=\frac{1}{g}\sum_{\alpha=1}^{n}h_\alpha\chi_\alpha^{(k)}\chi_\alpha^{(l)}\chi_\alpha^{(m')}$$

トシテ定メラレル。以上カラ定理ノ証明ヲ與ヘルタメニ去ヅ
ソレノ base ヲカヘテ

$$(21)\quad y_\alpha=\frac{1}{h_\alpha}x_\alpha\qquad(\alpha=1,\cdots\cdots,n)$$

ヲ取ル。ソノ外個ノ一次独立ナ表現 $y_\alpha^{(k)}=\frac{1}{h_\alpha}x_\alpha^{(k)}$ $(k=1,\cdots\cdots,n)$ ノ積ヲ各 base ニ對シテ取ル積デ定義スレバ、$\chi_\alpha^{(k)}=\sqrt{f_k}\,y_\alpha^{(k)}$ カラ

$$y_\alpha^{(k)}y_\alpha^{(l)}=\sum_{m=1}^{n}\sqrt{\frac{f_m}{f_kf_l}}\,g_{kl}^{m}\,y_\alpha^{(m)}$$

トナル。斯ク得ラレタ commutative algebra デ，base ヲ入レカヘテ

$$(22)\quad z_\alpha^{(k)}=f_ky_\alpha^{(k)}=\sqrt{f_k}\,\chi_\alpha^{(k)}=\frac{f_k}{h_\alpha}x_\alpha^{(k)}$$

トオケバ

$$(23)\quad z_\alpha^{(k)}z_\alpha^{(l)}=\sum_{m=1}^{n}d_{kl}^{m}z_\alpha^{(m)},\quad d_{kl}^{m}=\sqrt{\frac{f_kf_l}{f_m}}\,g_{kl}^{m}$$

トナル。$\overline{\alpha}=z^{(1)}\Omega+\cdots\cdots+z^{(n)}\Omega$ ガ Σ-algebra ナルコトハ (1)—(6) ヲ順次ニ驗セバヨイ。

(2) ハ (14), (16) ヨリ。

(3) ハ $\overline{g_{kl}^{m}}=\frac{1}{g}\sum_{\alpha}h_\alpha\chi_{\alpha'}^{(k)}\chi_{\alpha'}^{(l)}\chi_{\alpha'}^{(m')}=g_{kl}^{m}$ ヨリ。

(4) ハ (13) ヨリ

(5) ハ $a'_{kl} = \frac{\sqrt{f_k f_l}}{g} \sum_\alpha h_\alpha \chi_\alpha^{(k)} \chi_\alpha^{(l)} = \sqrt{f_k f_l}\, \delta_{kl}^{l'} - f_k \cdot \delta_{kl}^{l'}$

(III) ト (16) カラ.

(6) ハ (IV) ヨリ.

定理2『$\mathfrak{L}$-algebra $\mathfrak{A} = x_1 \mathfrak{L} + \cdots\cdots + x_n \mathfrak{L}$ ノ conjugate $\mathfrak{L}$-algebra $\overline{\mathfrak{A}} = z^{(1)} \mathfrak{L} + \cdots\cdots + z^{(n)} \mathfrak{L}$ カラ再ビ conjugate $\mathfrak{L}$-algebra $\overline{\overline{\mathfrak{A}}}$ ヲ作レバ, base マデ考ヘニ入レテ $\overline{\overline{\mathfrak{A}}} = \mathfrak{A}$ トナル.』

(証) $a'_{kl'} = f_k$ デアッタカラ, $\mathfrak{A}$ ノ h_α = 對スルモノハ, $\overline{\mathfrak{A}}$ デハ f_k デアル. ($\sum_\alpha h_\alpha = \sum_k f_k$). $\overline{\mathfrak{A}}$ ノ元ノ表現ハ $z^{(k)} \to \sqrt{f_k}\, \chi_\alpha^{(k)}$ ($\alpha = 1, \cdots\cdots, n$) デ, 之レカラ (15) = 相當スル式ヲ綴ラベ, ((II) デ $l=1$ トスレバ $\sum_\alpha h_\alpha \sqrt{f_k}\, \chi_\alpha^{(k)} = \delta'_k \cdot g$ トナルカラ) (15) ノ f_k = 當ルモノハ h_α トナル.

$\overline{\mathfrak{A}}$ ノ base ハ性ッテ (22) = 對應シテ

$$\frac{h_\alpha}{f_k} \cdot \sqrt{f_k}\, \chi_\alpha^{(k)} = \frac{h_\alpha}{\sqrt{f_k}} \chi_\alpha^{(k)} \quad (\alpha = 1, \cdots\cdots, n)$$

デアル. (III) 式カラ

$$\frac{h_\alpha}{\sqrt{f_k}} \chi_\alpha^{(k)} \cdot \frac{h_\beta}{\sqrt{f_k}} \chi_\beta^{(k)} = \sum_\gamma c_{\alpha\beta}^{\gamma} \frac{h_\gamma}{\sqrt{f_k}} \chi_\gamma^{(k)}$$

デアルカラ, $\overline{\mathfrak{A}}$ ノ base ノ主ダル (1) = 置ケル係數ノ再ビ $c_{\alpha\beta}^{\gamma}$ トナッタ, 故=

$x_\alpha \to \frac{h_\alpha}{\sqrt{f_k}} \overline{\chi_\alpha^{(k)}}$ ハ $\mathfrak{A}$ ト $\overline{\mathfrak{A}}$ トノ間ノ isomorphic relation ヲ與ヘル. q.e.d.

以上ニヨッテ $\mathfrak{A}_\mathfrak{H}$ ノ character ヲ決定スルニハ $\mathfrak{A}_\mathfrak{H}$ ノ center $\mathfrak{A}_\mathfrak{g}$ ヘ與ヘラレンバ十分デアリ，逆ニ $\mathfrak{A}$ ノ character カラ $\mathfrak{A}_\mathfrak{g}$ ノ構造ガ決定サレル.

§ 2

可換群トソノ character group トノ部分群ノ間ノ関係デ，$\mathfrak{L}$-algebra $\mathfrak{A}$ トソノ conjugate $\overline{\mathfrak{A}}$ トノ間デ芳ヘル.

定義「$\mathfrak{L}$-algebra $\mathfrak{A} = x_1\mathfrak{H} + \cdots\cdots + x_n\mathfrak{H}$, characteristic subalgebra (C-subalg.) $\mathfrak{M}$ トハ

(24) $\mathfrak{M} = x_{\alpha_1}\mathfrak{H} + \cdots\cdots + x_{\alpha_m}\mathfrak{H}$ $(x_{\alpha_1} = x_1)$

ナル形ノ $\mathfrak{A}$ ノ一ツノ $\mathfrak{L}$-subalgebra ヲイフ，即チ unit ヲ含ム $\mathfrak{A}$ ノ submodul デ

(25) $\mathfrak{M} \ni u \longrightarrow \mathfrak{M} \ni u'$

(26) $\mathfrak{M} \ni x_{\alpha_i}, x_{\alpha_j}, x_{\alpha_i} x_{\alpha_j}$

$$= \sum_k c^k_{\alpha_i \alpha_j} x_k,\ c^k_{\alpha_i \alpha_j} \neq 0 \text{ ナラ } \mathfrak{M} \ni x_k」$$

$\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{A}_\mathfrak{H}$ ノ center ノ場合ニハ丁度オル $\mathfrak{A}_\mathfrak{H}$ ノ Normalteiler $\mathfrak{N}$ ニ含マレテオル conj. class ニ對應スル base デ張ラレル subalg. デアリ，$\mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{A}_\mathfrak{H}$ ノ character alg. ノトキハ van Kampen ニヨッテ

定義サレメ表現（又ハ character）ノ module トノ夫對應スル。

定理3. 『$\mathfrak{L}$-alg. $\mathfrak{o}$ トソノ C-subalg. $\mathfrak{m}$ トガ單ヘラレルトキニ，$\mathfrak{o}$ ノ conjugate $\mathfrak{L}$-alg. $\overline{\mathfrak{o}} = \xi^{(1)}\mathfrak{L} + \cdots\cdots + \xi^{(m)}\mathfrak{L}$ 中

$$(27)\qquad \xi^{(k)}_{\alpha_i} = \frac{f_k}{h_{\alpha_i}} \qquad (i = 1, \cdots\cdots, m)$$

ヲ滿足スル $\xi^{(k)}$ ノ全体ヲ（番号ヲツケカヘテ）$\xi^{(1)}, \cdots, \xi^{(r)}$ トスレバ

$$(28)\qquad \mathfrak{m}^0 = \xi^{(1)}\mathfrak{L} + \cdots\cdots + \xi^{(r)}\mathfrak{L}$$

ハ $\overline{\mathfrak{o}}$ ノ C-subalg. ヲ作ル。逆ニ $\mathfrak{m}^0$ カラ $\mathfrak{o}$ ノ C-subalg. $\mathfrak{m}^{00}$ ヲ今ノ關係デ定メレバ，再ビ $\mathfrak{m}$ ヲ得ル。即．

$$(29)\qquad \xi^{(k)}_{\alpha_i} = \frac{f_k}{h_{\alpha_i}} \qquad (k = 1, \cdots\cdots, r)$$

ヲ滿足スルノハ $\alpha_1, \cdots\cdots \alpha_m$ ニ限ル。コノ對應デ，$\mathfrak{o}$ ト $\overline{\mathfrak{o}}$ ノ C-subalg. ハ一對一ニ對應スル。但シ $\mathfrak{o}, \overline{\mathfrak{o}}$ ニ於テ，ソノ (1), (23) 式ノ $c^{\gamma}_{\alpha\beta}$, d^{m}_{kl} ハスベテ正キルモノト假定スル。』

（証） $\mathfrak{m}$ ノ conj. $\mathfrak{L}$-alg. ヲ $\overline{\mathfrak{m}}$ トスルト $\mathfrak{m}$ ノ表現ヲ $y^{(j)}_{\alpha_i}$ $(i, j = 1, \cdots\cdots, m)$，$y^{(j)}_{\alpha_i}$ ニ對スル (15) ノ解ヲ f^0_j，$v^{(j)} = f^0_j y^{(j)}$ トスレバ，$\overline{\mathfrak{m}} = v^{(1)}\mathfrak{L} + \cdots\cdots + v^{(m)}\mathfrak{L}$。

$$(30)\qquad v^{(i)}v^{(j)} = \sum_{k=i}^{m} \overline{L}^{k}_{ij}\, v_k$$

トスル。 Ω ノ表現 $\chi^{(k)}_{\alpha}$ $(k=1,\cdots\cdots,n)$ ヲ Ω ノ表現トミテ，互ニ相等シイモノノ組ニ分ケル。ソレヲ

$$\left\{\chi^{(k'_1)}_{\alpha},\cdots\cdots,\chi^{(k'_{r'})}_{\alpha}\right\}\left\{\chi^{(k^2_1)}_{\alpha},\cdots\cdots,\chi^{(k^2_{r_2})}_{\alpha}\right\}\cdots\cdots,$$

$$\left\{\chi^{(k^t_1)}_{\alpha}\cdots\cdots\chi^{(k^t_{r_t})}_{\alpha}\right\}$$ トスル。

（コヽニ $k'_\mu=\mu$ トス）即チ $\chi^{(k^l_\mu)}_{\alpha_i}=y^{(j_l)}_{\alpha_i}$ $(i=1,\cdots\cdots,m)$ ナル j_l ガ定マルワケデアルガ，スベテノ $y^{(j)}_{\alpha}$ $(j=1,\cdots\cdots,m)$ ガカクシテ得ラレルコトハ次ノ如クニ分ル。

$y^{(j)}_{\alpha_i}$ ハ linear operator トシテ Ω 全体ニ拡張スレバ，$x^{(1)},\cdots\cdots,x^{(n)}$ ノ linear combination トシテアラハサレル。故ニ α_i ナル所ガケヲ考ヘレバ，

$y^{(j)}_{\alpha_i}=\sum_{l=1}^{t}c_l y^{(j_l)}_{\alpha_i}$ トナル。$y^{(j)}_{\alpha_i}$ $(j=1,\cdots\cdots,m)$ ハ初論ノ上デ一次独立ナル故アル l ガ $y^{(j)}=y^{(j_l)}$ トナル。即チ $t=m$ トナリ，番号ヲ適当ニカヘテ

(31) $$\chi^{(k^l_\mu)}_{\alpha_i}=y^{(l)}_{\alpha_i}\qquad(i,l=1,\cdots\cdots,m;\ \mu=1,\cdots,r_l)$$

トスル。コノ時

(32) $$\chi^{(k^l_\mu)}_{\alpha_i}=\frac{f_{k^l_\mu}}{f_{\alpha_i}}\chi^{(k^l_\mu)}_{\alpha_i}=\frac{f_{k^l_\mu}}{f^0_l}\,\frac{f^0_l}{f_{\alpha_i}}\,y^{(l)}_{\alpha_i}$$

$$= \frac{f_{k\mu}^{l}}{f_k^0} v_{\alpha_i}^{(l)} \quad (l=1, \cdots\cdots, m).$$

サテ $\mathfrak{M}^0$ ガ又 $\overline{\mathfrak{N}}$ ノ C-subalg. ヲ作ルコトヲ証明シヨウ。

今

$$Z_{\alpha}^{(i)} Z_{\alpha}^{(j)} = \sum_k d_{ij}^{k} Z_{\alpha}^{(k)}, \quad i,j \leqq r$$

トスレバ, $\alpha_1, \cdots\cdots, \alpha_m$ デ考ヘレバ (32) ヨリ

$$f_i f_j v_{\alpha_i}^{(1)} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{f_k^0} \left(\sum_{\mu} d_{ij}^{k\mu l} f_{k\mu}^{l} \right) v_{\alpha_i}^{(l)},$$

デ, $d_{ij}^{k} \geqq 0$ デアルカラ, $d_{ij}^{k\mu t} = 0$, $l>1$ ダトケレバ

トラトイ。即チ $\mathfrak{M}^0$ ハ C-subalg. トナル。

次ニ

(33) $$Z_0^{(l)} = \sum_{\mu=1}^{\nu_k} Z^{(k\mu l)} \quad (l=1, \cdots\cdots, m)$$

トオイテ

(34) $$Z_{\alpha}^{(k\mu l)} Z_{0\alpha}^{(1)} = \frac{f_{k\mu}^{l}}{f_l^0} Z_{0\alpha}^{(l)}$$

ヲ証明スル。先ヅ $Z^{(k\mu l)} Z_0^{(1)} = \sum_s l_s Z^{(s)}$ トオクノ両辺

ニ $\overline{Z}^{(k\nu i)}$ ヲカケレバ

(35) $$l_{k\nu i} \cdot f_{k\nu i} \cdot Z^{(1)} + \sum_{s \neq 1} e_s' Z^{(s)} = \overline{Z^{(k\nu i)}} Z^{(k\mu l)} Z_0^{(1)}$$

此処デ

(36) $$Z_{\alpha}^{(k\mu l)} \overline{Z_{\alpha}^{(k\nu i)}} = \sum_{\rho} b_{\rho} Z_{\alpha}^{(\rho)}$$ トオケバ

(35) ノ右辺中 $\xi^{(1)}$ ノ係数ハ

$$(37)\qquad \sum_{\lambda=1}^{r} b_{k'_\lambda}\, f_{k'_\lambda}$$

デアル。一方 (36) デ λ_i $(i=1,\cdots\cdots,m)$ デハ

$$\frac{f_{k^l_\mu}\, f_{k^i_r}}{f^0_l\, f^0_i}\, v^{(l)}_{\alpha_i}\, \overline{v^{(i)}_{\alpha_i}} = \sum_{s=1}^{m}\left(\sum_{\lambda=1}^{r_s} b_{k^s_\lambda}\, \frac{f_{k^s_\lambda}}{f^0_s}\right) v^{(s)}_{\alpha_i}$$

トナルヨリ (30) ト比ベテ

$$(38)\qquad \overline{d^s_{li'}} = \frac{f^0_l f^0_i}{f^0_s}\,\frac{1}{f_{k^l_\mu} f_{k^i_r}}\left(\sum_{\lambda=1}^{r_s} b_{k^s_\lambda}\, f_{k^s_\lambda}\right)$$

故ニ (35), (37) カラ

$$(39)\qquad e_{k^i_\nu}\, f_{k^i_\nu} = \frac{f_{k^l_\mu} f_{k^i_\nu}}{f^0_l\, f^0_i}\cdot \overline{d'_{li'}}$$

トナル。故ニ

$$(40)\qquad \begin{cases} e_{k^i_r} = 0, \quad i \neq l, \\ e_{k^l_\mu}\, e_{k^l_\mu} = \dfrac{f_{k^l_\mu}}{f^{02}_l}\,\overline{d'_{ll'}} = \dfrac{f_{k^l_\mu}}{f^0_l} \end{cases}$$ 即チ (34) トナル

(34) 式ハ $Z^{(1)}_0$, 即チ $\xi^{(1)},\cdots\cdots,\xi^{(n)}$ サヘキマレバ, $Z^{(2)}_0,\cdots\cdots,Z^{(m)}_0$ ハ定マルコトヲ示ス。今 $\mathfrak{M}^{00} \neq \mathfrak{M}$ トスレバ, $\mathfrak{M}^{00} \supset \mathfrak{M}$ ハ明カデアルカラ, $\mathfrak{M}^{00}$, conj. $\mathfrak{L}$-alg. ノ rang ハ $\mathfrak{M}$ ヨリ大デナケレバナラヌ。$(\mathfrak{M}^{00})^0 = \mathfrak{M}^0$ カラ $\overline{\mathfrak{M}^{00}}$, rang ハ $Z^{(1)}_0$ 丈デキマルノデアルカラ矛盾トナル。即チ $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{00}$, q.e.d.

次ニ Faktoralgebra $\mathfrak{L}/\mathfrak{M}$ ヲ $\mathfrak{g}/\mathfrak{H}$ ト analogous ニ定義スル。先ヅ

$$(41)\quad Z^{(l)}=\frac{1}{f_m}Z_0^{(l)}\qquad (l=1,\cdots\cdots,m)$$

コヽニ $f_m=\sum_{\mu=1}^{r} f_{k'_\mu}$ トオク。(34) デ $\lambda=1$ トオケバ

$$(42)\quad \sum_{\lambda=1}^{r_e} f_{k^l_\lambda}=f^0_e\cdot f_m$$

トナル。故ニ (34) ヲ $\mu=1,\cdots\cdots,r_e$ ニツイテ加ヘレバ

$$(43)\quad Z_\alpha^{(l)}Z_\alpha^{(1)}=Z_\alpha^{(l)}$$

トナル。全ク同様ニ

$$(44)\quad Z^{(i)}Z^{(j)}=\sum_{k=1}^{m}\overline{\alpha}^{k}_{ij}Z^{(k)}$$

定義「$\mathfrak{L}$-alg. $\mathfrak{A}$ ヨリ $x_1\mathfrak{L}+\cdots\cdots+x_n\mathfrak{L}$ トノ C-subalg. $\mathfrak{M}=x_1\mathfrak{L}+\cdots\cdots+x_r\mathfrak{L}$ トガアルトキ factor-$\mathfrak{L}$-algebra $\mathfrak{A}/\mathfrak{M}$ ヲ次ノ如ク定義スル。

$$X_0^{(1)}=x_1+\cdots\cdots+x_r$$

トスレバ，$x_1,\cdots\cdots,x_n$ ハ m 組 $\{x_{k'_1},\cdots\cdots,x_{k'_r}\}$

$$(x_{k'_\mu}=x_\mu,\ \mu=1,\cdots\cdots,r)$$

$$\{x_{k^2_1}\cdots\cdots x_{k^2_{r_2}}\}\cdots\cdots\{x_{k^m_1}\cdots\cdots x_{k^m_{r_m}}\}$$

$(r_1+\cdots\cdots+r_m=n)$ ニ分ケラレテ

$$X_0^{(l)}=x_{k^l_1}+\cdots\cdots+x_{k^l_{r_e}}$$

トオケバ，組分ケハ $X_0^{(1)}$ カラ

$$x_{k\mu}^{l} X_0^{(l)} = c_{\mu}^{l} \cdot X_0^{(l)}$$

ニヨッテ確定サレル。其ノ時

$$X^{(l)} = \frac{1}{f_m} X_0^{(l)}, \quad f_m = \sum_{k=1}^{r} f_k$$

トオケバ，$X^{(1)}, \cdots\cdots, X^{(m)}$ ハスーツノ $\mathfrak{L}$-alg.，base ヲ作リ，コノ $X^{(1)}, \cdots\cdots, X^{(m)}$ ヲ base トスル $\mathfrak{L}$-alg. ヲ $\mathfrak{o}/\mathfrak{m}$ ト定メル。』

(44) デ得タノハ $\mathfrak{M}$ ガ $\mathfrak{M}^0$ トシテ得ラレタ場合デアルガ，$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^{00} = (\mathfrak{M}^0)^0$ デアルカラ，一般ニ (44) ハ成立スル。コレヲ用ヒレバ (44) ト (30) ヲ比ベテ

定理4. 『$\mathfrak{L}$-alg. $\mathfrak{o}$ トソノ conj. $\mathfrak{L}$-alg. $\overline{\mathfrak{o}}$ ニテ $C_{\lambda\rho}^{\nu}$, $d_{k\xi}^{m}$ ガスベテ $\geqq 0$ ナル時ニ，$\mathfrak{o}$ ノ C-subalg $\mathfrak{M}$ カラ定理3デ $\mathfrak{M}^0$ ニ $\overline{\mathfrak{o}}$ ナル C-alg. ヲ対応サセレバ，

$$\overline{\mathfrak{M}} \cong \overline{\mathfrak{o}}/\mathfrak{M}^0, \quad \overline{\mathfrak{M}}^0 \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{M}$$

ガ成立スル。但シ $\overline{\mathfrak{M}}$, $\overline{\mathfrak{M}}_0$ ハ夫々 conjugate $\mathfrak{L}$-alg. ヲ示ス。』

$\mathfrak{o}$ ガ $\mathfrak{o}_0$ ノ center ノ場合 $\mathfrak{M}$ ガ Normalteiler $\mathfrak{N}$ カラ定メラレルトキ $\overline{\mathfrak{M}}^0 \cong \mathfrak{o}/\mathfrak{M}$ ハ $(\mathfrak{o}/\mathfrak{N})$ ノ character alg. ガ $\overline{\mathfrak{o}}$ ノ subalg. トシテ得ラレタノデアリ，$\overline{\mathfrak{M}} \cong \overline{\mathfrak{o}}/\mathfrak{M}^0$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ character alg. (但シ $\mathfrak{o}$ ニ関シテ conj. character テマトメテ考ヘタモノ) ガ $\mathfrak{o}$ ノ character alg. カラ Factoralgebra

トシテ得ラレルコトヲ示シテキル。直接ニ証明スルニハ induced character ヲ考ヘレバヨイ。

§3

$\mathfrak{G}$ が bicompact group ノ場合ニハ，有限群ノ時ノ様ニ直接ニ証明スルコトハムツカシイ。

以下 Pontrjagin, topological groups ヲ用ヒル。

$\mathfrak{G}$ ヲ x カラ axa^{-1} $(a \in \mathfrak{G})$ トシテ得ラレル全体 $\overline{x}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ中デ closed デアルカラ，$\overline{x}$ ヲ一点ニ identify シテ "Zerlegungsraum" $\overline{\mathfrak{G}}$ ヲ作ル。$\mathfrak{G}$ ノ上ノ invariant continuous function $f(x)$ $(f(x) = f(axa^{-1}))$ ノ全体ト，$\overline{\mathfrak{G}}$ ノ上ノ continuous function ノ全体 $\mathfrak{R}_{\overline{\mathfrak{G}}}$ ハ一致スル。

$\mathfrak{R}_{\overline{\mathfrak{G}}}$ ハ次ノ如ク normed ring （但シノハ含マナイガ）ヲ作ル。

$$f(\overline{x}) \longleftrightarrow f(x) = f(axa^{-1}) \text{ on } \mathfrak{G}$$

トスルトキ，積ヲ

$$f * g(\overline{x}) = f \times g(x)$$

$$= \int_{\mathfrak{G}} f_1(xy^{-1}) g(y)\, dy = \int_{\mathfrak{G}} g(xy^{-1}) f(y)\, dy$$

デ定メ

$$\| f \| = \operatorname*{Max}_{\overline{x} \in \overline{\mathfrak{G}}} | f(\overline{x}) |$$

トオク。$\mathfrak{R}_{\mathfrak{o}}$ ノ complete ナルコト，$\|f*g\| \leqq \|f\| \cdot \|g\|$ ハ明カデアル。

定理5 『$\mathfrak{o}$ ノ character $\chi(x)$ ト $\mathfrak{R}_{\mathfrak{o}}$ ノ maximal ideal M トノ對ノ一對應スル。即チ maximal ideal M ガアレト mod. M デ定メル multiplicative functional ヲ F トスレバ

$$(45)\quad \begin{cases} F(f+g) = F(f),\ F(\alpha f) = \alpha F(f), \\ F(f*g) = F(f)\cdot F(g), \\ |F(f)| \leqq \|f\| \end{cases}$$

ナル故，Riesz ノ定理カラ

$$F(f) = \int_{\overline{\mathfrak{o}}} f(\overline{x})\, p(d\overline{x})$$

ナル $\overline{\mathfrak{o}}$ 上ノ completely additive measure $p(d\overline{x})$ ガ，即チ $\mathfrak{o}$ 上デ p ガ定マルガ，コレガ invariant measure ニ関シテ absolutely continuous トナッテ

$$(46)\quad F(f) = \int_{\mathfrak{o}} f(x)\, h(x)\, dx$$

トナリ，$h(x)$ ハ実ハアル character $\chi(x)$ カラ

$$(47)\quad h(x) = \frac{1}{n}\chi(x),\quad n = \chi(1)$$

ニヨッテ得ラレル。逆ニ (46)(47) ニテーツノ character χ カラ $F(f)$ ヲ定メレバ，(45) ヲ満足スル』

即チ $\mathfrak{o}$ ノ character ハ $\mathfrak{R}_{\overline{\mathfrak{o}}}$ デ定マルコトガワカル。証明ハ先ヅーツノ character $\chi(x)$ デ $F(f) = \int_{\mathfrak{o}} f(x)\frac{\chi(x)}{n}dx$ トオイテ (45) ノ満足サレルコ

トヲ タメス. 先ヅ $|\chi(x)| \leqq n$ カラ $|F(f)| \leqq \|f\|$.
multiplicative ナルコトハ

$$F(\chi') = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \chi' = \bar{\chi} \\ 0 & \chi' \neq \bar{\chi} \end{cases}$$

トナリ

$$(48)\quad \chi' * \chi'' = \begin{cases} \frac{1}{n'}\chi', & \chi' = \chi'', \ n' = \chi'(1), \\ 0, & \chi' \neq \chi'' \end{cases}$$

デアルカラ

$$(49)\quad F(\chi' * \chi'') = F(\chi') \cdot F(\chi'')$$

トイルコトガ分ル。

$$f_1^0 = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i, \quad f_2^0 = \sum_{i=1}^{n} b_i \chi_i$$

ノトキモ

$$F(f_1^0 * f_2^0) = F(f_1^0) \cdot F(f_2^0)$$

ナルコトモ (49) カラ 直チニワカル。一般ノ場合ニハ Pontrjagen P. 120, Theorem 29 カラ f_1, f_2 ヲ夫々 f_1^0, f_2^0 デ一様ニ近似シテ $|F(f)| \leqq \|f\|$ ヲ用ヒレバヨイ。

逆ニ (45) ヲ満足スル $F(f)$ ガアレバ

$$(50)\quad F(\chi) = a(\chi)$$

トオケバ (48) カラ $a(\chi')\,a(\chi'') = \frac{1}{n'}\delta_{\chi',\chi''}\,a(\chi')$ カラ, アル χ ニ對シテ $F(\chi) = \frac{1}{n}$ ($n = \chi(1)$) デ, 他ノ $\chi' \neq \chi$ デハ $F(\chi') = 0$ トナラネバナラナイ。再ビ上ノ Pontrjagen, Theo. 29 カラ

$$F(f)=\frac{1}{n}\int_{\mathfrak{o}_f} f(x)\chi(x)\,dx$$

ナルコトガワカル。q.e.d.

サテ §1. ノ場合ト同様ニ

(51) $$\xi_\alpha=\frac{1}{n}\chi_\alpha$$

トオイテ

(52) $$\xi_\alpha\xi_\beta=\sum_\gamma c_{\alpha\beta}^{\gamma}\xi_\gamma$$

ト有限和ニ展開サレルカラ $u=\sum_\alpha \lambda_\alpha \xi_\alpha$ (λ : scalar) ナル有限和ノ全体ハ一ツノ commutative ring $\overline{\mathfrak{R}}$ ヲ作ル。$\overline{\mathfrak{R}}$ ノ元ノ u ノ norm ヲ $\|u\|=\max_\alpha|\lambda_\alpha|$ トスル。

定理6 $\overline{\mathfrak{o}_f}$ 及ビ $\mathfrak{R}_{\mathfrak{o}_f}$ ハ $\overline{\mathfrak{R}}$ ニヨッテ決定サレル。ソノ意味ハ

(i) $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ continuous multiplicative functional $F(u)$:

(53) $$\begin{cases} F(u+v)=F(u)+F(v),\ F(\lambda u)=\lambda F(u), \\ F(u\cdot v)=F(u)\cdot F(v), \\ |F(u)|\leqq M\cdot\|u\| \end{cases}$$

ハ必ズアル $\overline{x}\in\overline{\mathfrak{o}_f}$ ニヨッテ

(54) $$F(u)=u(\overline{x})$$

トシテアラハサレル。此ノ意味デ $\overline{\mathfrak{o}_f}$ ガ $\overline{\mathfrak{R}}$ カラキマル。

(ii) $\mathfrak{R}_{\mathfrak{o}_f}$ ヨナカラ

(55) $$F_f=\int_{\mathfrak{o}_f} f(x)\xi_\alpha(x)\,dx$$

トシテ $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ base ノ値ヲキメテ，$\overline{\mathfrak{R}}$ ノ continuous functional ヲ作レバ

$$(56)\begin{cases} F_f = F_g \longrightarrow f = g \\ F_{f+g}(\xi_\alpha) = F_f(\xi_\alpha) + F_g(\xi_\alpha),\quad F_{\lambda f}(\xi_\alpha) = \lambda F_f(\xi_\alpha) \\ F_{f*g}(\xi_\alpha) = F_f(\xi_\alpha)\cdot F_g(\xi_\alpha) \end{cases}$$

デ，$\mathfrak{R}_{\overline{\sigma f}}$ ノ代数的構造ガキマル。∎

(証) (ii) ハ定理5ヨリ明カデアル。 (i) ノ証．本誌談話 q27（淡中氏ノ双對定理ニツイテ）§4 ノ如ク normed ring $\mathfrak{R}_3$ ヌビソノ subring R_G（p. 206参照）ヲ考ヘ、$\mathfrak{R}_{0f}$ ヲ $\mathfrak{R}_3$ ヨリデ，$f(x) = f(axa^{-1})$ $(a \in \sigma_f)$ トナル全体トスル。$\mathfrak{R}_{0f}$ ハ又一ツノ normed ring トナリ，$\mathfrak{R}_f$ ノ maximal ideal I ニ対シテ σ_f ヨリ x_0 ガトレテ，I ハ $f(x_0) = 0$ トナル $f(x) \in \mathfrak{R}_f$ ノ全体トナル。（談話 q27，定理5ヌビソノ注意）

サテ $f(x) \in \mathfrak{R}_f \cap R_G$ ヲトレバ，先ガ R_G ニ入ルコトカラ

$$f(x) = \sum_\alpha \lambda_i^{(\alpha)} v_{ii}^{(\alpha)}(x)$$

ト展開サレ，次ニ $\mathfrak{R}_f$ ニ入ルコトカラ

$$f(x) = \sum_\alpha \lambda_\alpha \chi_\alpha(x)$$

ト一様且ツ絶対収斂級数ニ展開サレル。今 $\overline{\mathfrak{R}}$ ノ上ノ (53) ヲ満足スル F ガアレバ，$|F(u)| \leqq M\|u\|$ カラ

$$F(f) = \sum \lambda_\alpha F(\chi_\alpha(x))$$

デ $\mathfrak{R}_4 \cap R_G$ 全体ニFヲ拡張シ，次ニ $\mathfrak{R}_4$ マデ(53)ヲ保ツヨウニ拡張スルコトガ出来ル。

故ニFハ $\mathfrak{R}_4$ ノ maximal ideal ニ対応スルカラヌル $x_0 \in \mathfrak{o}_f$ ガキマリ

$$F(u) = u(x_0)$$

トナル。 q.e.d.

——（河田）——