OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	能代氏ノ豫想ニツイテ
Author(s)	有馬, 喜八郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 219, p. 375-379
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74878
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

948. 能代氏ノ豫想ニツイテ

有馬　喜八郎（阪大）

以下ノ事ニツイテハ能代氏著"最近ノ函數論"第二節有理型函數ノ逆函數ヲ參照シテ下サイ。

(E) 同書P.36ニ有理型函數ニ關スル Gross ノ stern 定理ガ述ベテアリマス。

$w=f(z)$ ヲ $|z|<\infty$ ニ於テ有理型，$z=\infty$ ヲ眞性特異点トシソノ逆函數ヲ $z=\varphi(w)$ トシマス。

$z=\varphi(w)$ ノ一ツノ正則ナ要素 $e_{z_0}=P(w,w_0)$ ヲ中心 w_0 ヲ出ル各半直線 $\arg(w-w_0)=\theta$ ニ沿ヲテ Weierstrass ノ意味ノ解析接續ガ可能ナル限リ之レヲツヅケル時ニツノ場合ガ區別サレマス。

(1) $w=\infty$ ノ直前迄解析接續ガ出來ル場合

(2) 有限ノ点デ特異点ニ出會フ場合

(2) ノ場合ヲ同書ニ從ヒ便宜上 singular ray ト云フコトニシマス。

w_0 ヨリ各 singular ray ニツイテ w_0 カラ最初ノ特異点ト $w=\infty$ トヲ結ブ線分ヲ w 平面カラ取リ除ケバ，星狀領域Dガ得ラレマス。Dニ於テ e_{z_0} ハ $z=\varphi(w)$ ノ一價正則且ツ單葉ナ分岐ヲ定義シマス、コノ分岐自身ヲモ $z=\varphi(w)$ デ表ハシマストキノ Gross ノ定理ガ成立シマス。

Gross ノ定理

singular ray: $\arg(w-w_0)=\theta$ ノ偏角 θ ノ集合ハ Lebesgue ノ意味デ測度0ナリ。

コノ時 w_0 カラ最初ノ特異点ガ代数特異点ガ代数特異点デアル半直線ノ個数ハ高々可附番無限デ，w_0 カラ最初ノ特異点ガ超越特異点デアルヤウナ半直線デハ w ガソノ特異点ニ半直線上ニ沿フテ近ヅクトキ $\varphi(w)\to\infty$ ニナリマス。

上ノ事ト同書ニノッテヰル種々ノ定理ヨリ次ノ如キ能代氏ノ豫想ガ提出サレル訳デス。

(II) 能代氏ノ豫想（同氏著 p. 46 参照）

或ル z_0 ヲ中心トスル星状領域 Δ ニ於テ $w=f(z)$ ヲ正則単葉トシタトキ若シ z_0 ヲ出ル半直線ニ沿ウテ Δ ノ境界点 z' ニ近ヅクトキ恒ニ $f(z)$ ガ漸近値ヲ持ットスレバ w 平面上ノ絶対調和測度0ノ集合 E ニ含マレル漸近値ヲ與ヘル方向 $\arg(z'-z_0)=\theta$ ノ集合ハ Lebesgue 測度0デアル。

〔注意〕

前後数シマスガ Gross ノ定理ハ $\varphi(w)$ ガ単葉且ツ singular ray ニ沿フテ特異点ニ近ヅクトキ $\varphi(w)\to\infty$ ナルコトノミヲ利用シテ証明出来マス、詳細ナ証明ハ能代氏ノ著書又ハ Nevanlinna 著 Eindeutige Analytische Funktionen (1936) ヲ参照シテ下サイ。

(III) Arhandlinger Det Norske Videnskaps – Akademie (1937) ニ於テ Selberg

ハ次ノ定理ヲ述ベテ居マス。

Selberg ノ定理

Bヲ $z=\infty$ ヲ含ムz平面ノ領域トシソノ Rand ヲ Γ トス. Kapazität $C(\Gamma)=0$ トラバz≠∞ トル B ノ点ニテハ調和デ $z=\infty$ ノ近傍ニテハ

$$\log|z|+w(z)$$

但シ $w(z)$ ハ $z=\infty$ デ調和函数トナリ、又=zが Γ ニ近ヅクトキハ $-\infty$ ニ一様ニ収斂スル調和函数 $u(z,B)$ が存在ス。

コノ Selberg ノ函数ヲ用ヒテ能代氏ノ豫想ヲ証明致シマス。

(Ⅳ) (Ⅱ)ノ豫想ニテBヲEト考ヘ且ツEハw平面上ニアリト考ヘテ Selberg ノ函数 $u(w,E)$ ヲ作リマス。

$u(w,E)$ ノ共軛調和函数ヲ $v(w,E)$ トシ

$$\Phi(w,E)=u(w,E)+iv(w,E)$$

ヲ考ヘマストコレハ多価函数デス。

$f(z)$ ハソノ単葉性ニヨリ △内ニテE上ノ値ヲトリマセン。

故= monodromy Satz ニヨリ $\Phi(w,E)$ ノ分岐ヲ定メルト $\Phi[f(z),E]$ ハ△内ニテ一価正則函数トナリマス。

然カモ $u(w,E)$ ヲ作ル方法ヲ吟味シテミマストキ $\Phi(f(z),E)$ ノ単葉性が成立シマス。コレニツイテハ

Selberg ノ論文ヲ研究シテ下サイ。

且ツ上ノ $\mathcal{U}(z,B)$ ノ性質ニヨリ亜 $[f(z),E]$ ハ問題ノ方向ニ對シ亜 $[f(z),E]\to\infty$ ガ成立シマス。

從ツテ(II)ノ注意ニヨリ Gross ノ定理ノ証明ヲソノママ亜 $[f(z),E]$ ニ應用シ，豫想定理ガ証明デキマス。尚ホ念ノタメ Capacity 0 ノ集合ハ絶対調和測度0デアルコトヲ注意シテオキマス。

(V) 以下簡單ニ得テレル系ヲ述ベマス。

Nevanlinna ノ最大値原理（Nevanlinna 著書 p. 134）ト Lindelöf ノ最大値原理ヲ同時ニ含ム次ノ定理ガ得テレマス。

系1. $w=f(z)$ ヲ任意ノ Jordan 領域 D ニ於テ一價正則且ツ境界C上ノ絶対調和測度0ナル集合Eヲ除ケル他ノ境界点 ζ ニ於テ $\overline{\lim}|f(z)|\leqq$ ノトスレバ D ニテ到ル所 $|f(z)|\leqq$ ノデアルカ，又ハDハ∞ヲ漸近値トスル $w=f(z)$ ノ漸近道ヲ含ム。

(注意) 証明ハ能代氏著書 p. 45 ヲ參照サレタシ、定理ノEハ絶対調和測度0ナル集合ノ高々可附番個ノ和集合トシテモ成立スルコトハ明カデス。

系2. $f(z)$ ハ全平面ニテ絶對調和測度0ナル集合Eヲ眞性特異点トスル有理型函數トス．モシ $f(z)$ が α ヲ有限回以上トラナケレバ領域ハ α ヲ漸近値トスル漸近道ヲ含ム。

上ノ系ニテ絶対調和測度0ナル眞性特異点ヲ有スル

$f(z)$ ハ真性特異点ノ近傍ニテ如何程デモ大ナル値ヲトルコトニ注意シマスト次ノ定理ガ成立シマス。

系3. 能代氏ノ定理

$f(z)$ ハ単一連結ノ領分Dニテ絶對調和測度0ノ真性特異点ノ集合ヲ除キ有理型トス。

モシ真性特異点 $z=Z$ ノ近クニテ $f(z)$ ト a トヲ除ケバ其ノ $\delta>0$ ニ對シ之ガ連續曲線ニ沿フテ $|z-Z|<\delta$ ノ特異点ニ近ヅクトキ $f(z)\longrightarrow a$ ガ成立ス。

系2，系3ハ $\dfrac{1}{f(z)-a}$ ノ逆函數ヲリーマン面上デ考ヘレバ直ニ分ルデス。