OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Connected Vector-lattice 2
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 220, p. 393-397
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74881
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

951. Connected Vector-lattice 2

中野秀五郎(東大)

IV. 前ノIIニテ bicompact Hausdorff space Bニテ bounded continuous functions ノ Vector-lattice $\mathfrak{M}$ ガ1ヲ含ミ、B内ノ二点ニテ相異ナル値ヲ有スル函数ヲ含ムトキ、次ノ定理ヲ証明シタ。

定理4 $\mathfrak{N}$ ガ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul ナル時ヘ $\mathfrak{N}$ ハBノ或 closed set E_0 ニテ0トナル総ラノ $\mathfrak{M}$ ノ函数ヨリナル。

然シ此ノ定理中ノ或ル closed set E_0 ナルモノガ如何ナルモノナルカニハ言及シトカッタ。勿論任意ノ

closed set デハ成立シナイ。即チ次ノ定理ガ成立ス。

定理9 regular closed set E_0 ニテ0トナル総テノ $\mathfrak{M}$ ノ functions ハ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul デアッテ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul ハ此ノ如キモノニ限ル。

証明 $\mathfrak{N}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul トスレバ、前ノ如クニシテ $\mathfrak{N}$ ノ総テノ function ニテ0トナル点ノ全体ヲ E_0 トスレバ E_0 ハ closed ニシテ、$\mathfrak{N}$ ハ E_0 ニテ0ナル総テノ $\mathfrak{M}$ ノ functions ヨリナルコトガ証明サレル。此ノ E_0 ハ實ハ regular デアル。如何トナレバ、$\mathfrak{N}$ = orthogonal + $\mathfrak{M}$ ノ function $g(x)$ ハ

$$g(x) = 0 \quad in \quad B - E_0$$

トナル。故ニ又 $g(x)$ ハ continuous ナルニヨリ

$$g(x) = 0 \quad in \quad \overline{B - E_0}$$

故ニ $\mathfrak{N}$ ノ functions ハ $B - (\overline{B - E_0})$ ニテ0トナル総テノ $\mathfrak{M}$ ノ function ヲ含ム。従ッテ

$$E_0 = \overline{B - (\overline{B - E_0})}$$

即チ E_0 ハ regular デアル

逆ニ E_0 ガ regular closed set ナレバ E_0 ニテ0トナル $\mathfrak{M}$ ノ functions ハ normal submodul ヲナス。如何トナレバ E_0 ニテ0トナル functions = orthogonal + functions ハ $\overline{B - E_0}$ ニテ0トナル functions ニシテ此ノ如キ functions ニ orthogo-

nal ナル functions ハ又 $\overline{B-(\overline{B-E_0})}$ =テ O トナル。即チ E_0 =テ O トナル functions デアル。

V. 次ノ bicompact Hausdorff space B =テ Bounded continuous functions 全体デ 𝔐 トシタトキ、𝔐 が complete デアルタメノ條件ヲ考ヘヨウ。先ヅ B が discontinuous (totally disconnected) ナルコトハヨク知ラレヲヰル。然シ此ノ條件ハ充分デハナイ。例ヘバ B ヲ $\{\pm\frac{1}{n}, 0\}$ ($n=1, 2, \cdots\cdots$) ナル実数ノ集合トスレバ、B ハ明カニ bicompact Hausdorff space デ totally disconnected デアル。

然シ

$$f_n(x)=\begin{cases} 1 & x \geqq \frac{1}{n} \\ 0 & x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

ナル function ハ B デ continuous デハアルガ、l. u. b $f_n(x)$ ナル continuous function ノ存在シナイ事ハ明カデアル。故ニコノ場合ハ 𝔐 ハ complete デハナイ。

定理9 𝔐 が complete ナタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ、B ニ於ケル regular closed set が悉ク open ナルコトナリ。

証明 先ヅ 𝔐 が complete トスル。然ルトキハ任意ノ regular closed set E ニ對シテ、定理

ヨリ $E=\mathfrak{o}+\mathfrak{n}$ continuous functions ハ $\mathfrak{M}$ ノ normal submodul デアル。然ル = Bochner-Phylips (Annals) ヨリ $\mathfrak{M}$ ガ complete ナルトキハ normal submodul ハ complemented デアルニヨリ、前ノ定理5 ニヨリ E ハ open トナル。

次ニ B ノ regular closed set E ガ悉ク open トスル。今 $\{f(x)\}$ ヲ $\mathfrak{M}$ ノ functions ノ system ニテ、且ツ $f(x)\geqq 0$ ナリトス。g.l.b. $\{f(x)\}$ ノ存在ヲ証明スレバ、$\mathfrak{M}$ が complete トナル。

$E(x: f(x)>\alpha)$ ナル点集合ハ open デアル。今

$$E_\alpha=\sum_{f(x)} E(x: f(x)>\alpha)$$

ト置ケバ、E_α ハ開カ = open set デアル。又 closure $\overline{E}_\alpha$ ハ regular closed set ナルニヨリ假定ニヨリ open 且ツ closed デアル。今

$$g(x)=\alpha \quad in \prod_{\varepsilon>0}(\overline{E}_\alpha-\overline{E}_{\alpha+\varepsilon})(\overline{E}_{\alpha-\varepsilon}-\overline{E}_\alpha)$$

ト置ケバ $g(x)$ ハ continuous デアル。如何トナレバ

$$E(x: g(x)>\alpha)=\sum_{\varepsilon>0}\overline{E}_{\alpha+\varepsilon} \quad open$$

$$E(x: g(x)<\alpha)=\sum_{\varepsilon>0}(B-\overline{E}_{\alpha-\varepsilon}) \quad open$$

ナルヲ以テナリ。又

$$E(x: g(x) > \alpha) = \sum_{\varepsilon>0} \overline{E}_{\alpha+\varepsilon} \supset E(x: f(x) > \alpha)$$

ナル ヲ以テ

$$g(x) \leqq f(x)$$

トナル。今 continuous function $h(x)$ ガ

$$h(x) \leqq f(x)$$

ナリトスル。$\varepsilon > 0$ ニ對シ

$$E(x: h(x) > \alpha) \supset E(x: h(x) \geqq \alpha+\varepsilon) \supset E(x: f(x) > \alpha+\varepsilon)$$

故ニ

$$E(x: h(x) \geqq \alpha+\varepsilon) \supset \sum_{f(x)} E(x: f(x) > \alpha+\varepsilon) = E_{\alpha+\varepsilon}$$

從ッテ

$$E(x: h(x) \geqq \alpha+\varepsilon) \supset \overline{E}_{\alpha+\varepsilon}$$

故ニ

$$E(x: h(x) > \alpha) \supset \sum_{\varepsilon>0} \overline{E}_{\alpha+\varepsilon} = E(x; g(x) > \alpha)$$

即チ $h(x) \leqq g(x)$. 故ニ $g(x) = g.l.b.\ f(x)$ ナリ。