



Title	Connected Vector-lattice 2
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 220, p. 393-397
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74881
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

951. Connected Vector-lattice 2

中野秀五郎(東大)

IV. 前 $\Pi = \tau$ bicom pact Hausdorff space $B = \tau$ bounded continuous functions / Vector-lattice $\mathcal{M}$ が 1 を含み、 B 内 1 一点 $= \tau$ 相異ナル値ヲ有スル函数ヲ含ムトキ、次ノ定理ヲ証明シヌ。

定理4 $\mathcal{N}$ が $\mathcal{M}$ / normal submodulナル時ハ $\mathcal{N}$ ハ B / 或 closed set $E_0 = \tau 0$ トナル然ラバ $\mathcal{N}$ / 函数ヨリナル。

然シ此ノ定理中ノ或ル closed set E_0 ナルモノガ如何ナルモノナルカニハ言及シトカッタ。勿論任意ノ

closed set $\Rightarrow$ $\wedge$ 成立シタイ。即チ次ノ定理が成立ス。

定理 8 regular closed set $E_0 = \tau O$ トナル終テ、 $\mathcal{M}$ 、functions $\wedge \mathcal{M}$ 、normal submodul デアツテ $\mathcal{M}$ 、normal submodul $\wedge$ 此ノ如キモ、 $= \text{限ル}$ 。

証明 $\mathcal{M} \supset \mathcal{M}$ 、normal submodul トスレバ、前ノ如ク $=$ シテ $\mathcal{M}$ ノ終テノ function $= \tau O$ トナル点ノ全体ヲ E_0 トスレバ E_0 $\wedge$ closed $=$ シテ、 $\mathcal{M}$ $\wedge$ $E_0 = \tau O$ ナル終テノ $\mathcal{M}$ 、functions ヨリナルストガ証明サレル。此ノ E_0 $\wedge$ 實ハ regular デアル。如何トナレバ、 $\mathcal{M} = \text{orthogonal} \uparrow \mathcal{M}$ 、function $g(x)$ $\wedge$

$$g(x) = 0 \quad \text{in } B - E_0$$

トナル。故ニ $g(x)$ $\wedge$ continuous ナル $=$ ヨリ

$$g(x) = 0 \quad \text{in } \overline{B - E_0}$$

故ニ $\mathcal{M}$ 、functions $\wedge \overline{B - (B - E_0)} = \tau O$ トナル終テノ $\mathcal{M}$ 、function ヲ含ム。従ツテ

$$E_0 = \overline{B - (B - E_0)}$$

即チ E_0 $\wedge$ regular デアル

逆ニ E_0 $\wedge$ regular closed set ナレバ $E_0 = \tau O$ トナル $\mathcal{M}$ 、functions $\wedge$ normal submodul ヲナス。如何トナレバ $E_0 = \tau O$ トナル functions $= \text{orthogonal} \uparrow \text{functions} \wedge \overline{B - E_0} = \tau O$ トナル functions $=$ シテ此ノ如キ functions $= \text{ortho-}$

nal + functions $\wedge \overline{B - (B - E_0)} = \overline{0}$ + + .
 即ち $E_0 = \overline{0}$ + + functions $\forall$.

V. M : bicomact Hausdorff space B
 $=$ Bounded continuous functions 全体 $\forall$
 M トシタトキ、 M が complete $\forall$ ルタメノ条件ヲ
 考ヘヨリ。先ツ B が discontinuous (totally
 disconnected) ナルコトハヨク知ラレヲキル。然レ
 此ノ条件ハ充分デハナイ。例ヘバ B $\forall$ $\{\pm \frac{1}{n}, 0\}$ ($n =$
 $1, 2, \dots$) + 実数ノ集合トスレバ、 B ハ明カニ
 bicomact Hausdorff space $\forall$ totally dis-
 connected $\forall$.

然レ

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \geq \frac{1}{n} \\ 0 & x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

+ function $\wedge B$ $\forall$ continuous $\forall$ ハアルガ、
 l. u. $\forall$ $f_n(x)$ + continuous function 1 存在
 シナイ事ハ明カデアル。故ニコノ場合ハ M ハ complete
 デハナイ。

定理 9 M が complete + タメノ必要且ツ充分
 ナル条件ハ、 $B =$ 於ケル regular closed set が悉
 ク open ナルコトナリ。

証明 先ツ M が complete トスル。然ルトキ
 ハ任意ノ regular closed set $E =$ 對シテ、定理

8 $\exists$ $\mathcal{U}$ $E = \bar{\mathcal{U}} \cap \mathcal{U}$ continuous functions $\wedge$
 $\mathcal{M}$, normal submodule $\nexists \mathcal{U} \cap \mathcal{U}$. 然 $\mathcal{U} =$ Bochner-Phillips (Annals) $= \exists \mathcal{U}$ $\mathcal{M}$ complete $\cap \mathcal{U} \cap \mathcal{U} \cap$ normal submodule $\wedge$ complemented $\nexists \mathcal{U} \cap \mathcal{U} = \exists \mathcal{U}$, 前ノ定理5 $= \exists \mathcal{U}$ E open $\cap \mathcal{U} \cap \mathcal{U}$.

$X = B$, regular closed set E が $\mathcal{F}$ の
open $\rightarrow$ $\mathcal{F}$ である。 $\{f(x)\}$ $\mathcal{F}$ functions,
system = $\mathcal{F}$, 且 $\forall f(x) \geq 0$ $\rightarrow$ $\mathcal{F}$. g. l. b.
 $\{f(x)\}$, 存在 $\rightarrow$ 証明スレバ, $\mathcal{F}$ complete $\rightarrow$ $\mathcal{F}$
ル。

$E(x: f(x) > \alpha)$ は点集合 α open ではない。今

$$E_{\alpha} = \sum_{f(x)} E(x: f(x) > \alpha)$$

ト置ケバ、 E_α の開カ = open set デアル。又 closure $\overline{E_\alpha}$ の regular closed set + $\mathcal{K}$ = ヨリ 假定 = ヨリ open 且 γ closed デアル。今

$$g(x) = \lambda \text{ in } \pi(\bar{E}_\alpha - \bar{E}_{\alpha+\varepsilon})(\bar{E}_{\alpha-\varepsilon} - \bar{E}_\alpha)$$

ト置ケバ $g(x)$ は continuous デアル。如何トテ

$$E(x: g(x) > \lambda) = \sum_{\varepsilon > 0} \overline{E}_{\lambda+\varepsilon} \quad \text{open}$$

$$E(x; g(x) < \alpha) = \sum_{\varepsilon > 0} (B - \bar{E}_{\alpha - \varepsilon}) \text{ open}$$

$$+14 \neq 2 \times 7 + 11. \text{ 又}$$

$$E(x: g(x) > \alpha) = \sum_{\varepsilon > 0} \overline{E}_{\alpha+\varepsilon} \supset E(x: f(x) > \alpha)$$

＋ルヲ以テ

$$g(x) \leq f(x)$$

トナル。今 continuous function $h(x)$ が

$$h(x) \leq f(x)$$

トナル。 $\varepsilon > 0$ 對シ

$$\begin{aligned} E(x: h(x) > \alpha) &\supset E(x: h(x) \geq \alpha + \varepsilon) \\ &\supset E(x: f(x) > \alpha + \varepsilon) \end{aligned}$$

故ニ

$$\begin{aligned} E(x: h(x) \geq \alpha + \varepsilon) &\supset \sum_{f(x)} E(x: f(x) > \alpha + \varepsilon) \\ &= \overline{E}_{\alpha+\varepsilon} \end{aligned}$$

従ツテ

$$E(x: h(x) \geq \alpha + \varepsilon) \supset \overline{E}_{\alpha+\varepsilon}$$

故ニ

$$E(x: h(x) > \alpha) \supset \sum_{\varepsilon > 0} \overline{E}_{\alpha+\varepsilon} = E(x: g(x) > \alpha)$$

即チ $h(x) \leq g(x)$. 故ニ $g(x) = g.l.b. f(x)$ ナリ。