OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	二三ノ函數方程式ノ可測解ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 221, p. 406-411
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74885
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

955. 二三ノ函數方程式ノ可測解ニ就イテ

春木　博（神戸商船）

§1. 明ニ $(x+y)^4+(x-y)^4=2x^4+2y^4+12x^2y^2$ が成立スル。今述ニ次ノ函數方程式

(F)　$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)+\varphi(x)y^2$

ヲ滿足セシメル可測函數 $f(x)$, $\varphi(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

$$\varphi(x)=\frac{1}{y^2}\{f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-2f(y)\}$$

故ニ　$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)-2\varphi(y)$

$$=\frac{1}{y^2}\{f(x+2y)+f(x)-2f(x+y)-2f(y)$$
$$+f(x)+f(x-2y)-2f(x-y)-2f(y)$$
$$-2f(x+y)-2f(x-y)+4f(x)+4f(y)$$
$$-2f(2y)-2f(0)+4f(y)+4f(y)\}$$

シカルニ (F) ニヨリ

$$f(x+2y)+f(x-2y)=2f(x)+2f(2y)+4\varphi(x)y^2$$
$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+2f(y)+\varphi(x)y^2$$
$$f(0)=0$$

ナル故

$$\varphi(x+y)+\varphi(x-y)-2\varphi(x)-2\varphi(y)=0$$
$$\therefore\ \varphi(x+y)+\varphi(x-y)=2\varphi(x)+2\varphi(y)$$

$\varphi(x)$ ハ可測ナル故 $\varphi(x)=ax^2$ （a ハ任意ノ實數）

$\varphi(x)$ ガ判レバ $f(x)$ ガ可測ナル故、雜誌函數方程式 26

等ト同様ノ方針ニヨリ結局

$$\begin{cases} f(x)=\alpha x^4+\beta x^2 \\ g(x)=12\alpha x^2 \end{cases} \quad (\alpha,\beta\text{ハ任意ノ實數})$$

§2. 例ニ $\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y$ ガ成立スル。今逆ニ次ノ函數方程式

(G) $f(x+y)-f(x-y)=-2g(x)g(y)$

ヲ滿足セシメル可測函數 $f(x)$, $g(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

$$g(x)=-\frac{1}{2g(y)}\{f(x+y)-f(x-y)\}$$

故ニ

$$\begin{aligned} &g(x+y)+g(x-y) \\ &=-\frac{1}{2g(y)}\{f(x+2y)-f(x)+f(x)-f(x-2y)\} \\ &=-\frac{1}{2g(y)}\{f(x+2y)-f(x-2y)\} \\ &=-\frac{1}{2g(y)}\times(-2g(x)g(2y)) \quad ((G)ニヨル) \\ &=\frac{g(x)g(2y)}{g(y)} \end{aligned}$$

故ニ $\varphi(y)=\frac{1}{2}\frac{g(2y)}{g(y)}$ トオケバ

$$g(x+y)+g(x-y)=2g(x)\varphi(y)$$

$g(x)$, $\varphi(x)$ ハ可測ナル故、コレヨリヨク知ラレタル如ク

$$g(x)=\alpha x+\beta \quad (\alpha,\beta\text{ハ任意ノ實數})$$

又ハ $g(x)=\alpha\sin\beta x+\gamma\cos\delta x$ $(\alpha,\beta,\gamma,\delta$ ハ任意ノ

實數)

又ハ　$g(x)=\alpha\sin h\beta x+\gamma\cos h\delta x$　($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ヘ任意ノ實數)

$g(0)=0$ ナル故　$g(x)=\alpha x$

又ハ　$g(x)=\alpha\sin\beta x$

又ハ　$g(x)=\alpha\sin h\beta x$

(G) ニ於テ $y=x$ トオケバ

$$f(2x)=-2g^2(x)+f(0)$$

$$\therefore\ f(x)=-2g^2\left(\frac{x}{2}\right)+f(0)$$

結局 α,β,γ ヲ任意ノ實數トスルトキ

$$\begin{cases} f(x)=-\frac{1}{2}\alpha^2x^2+\beta \\ g(x)=\alpha x \end{cases}$$

又ハ

$$\begin{cases} f(x)=-2\alpha^2\sin^2\frac{1}{2}\beta x+\gamma \\ g(x)=\alpha\sin\beta x \end{cases}$$

又ハ

$$\begin{cases} f(x)=-2\alpha^2\sin^2h\frac{1}{2}\beta x+\gamma \\ g(x)=\alpha\sin h\beta x \end{cases}$$

§3. $\cos x$, $\sin x$ ノ間ニ

$$\cos(x+y)\cos(x-y)=\cos^2y-\sin^2x$$

ガ成立スル。

今迄ニ、次ノ函數方程式

(H)　$f(x+y)f(x-y)=f^2(y)-g^2(x)$

ヲ充ス可測函數 $f(x)$, $g(x)$ ヲ求メテ見ヨウ。

$f(0)=0$ ナラバ (F) ニ於テ $y=0$ トオクコトニヨリ

$$f^2(x)+g^2(x)=0$$

$f(x)$, $g(x)$ ハ一個有限實數値函數ナル故，$f(x)\equiv 0$, $g(x)\equiv 0$ ヲ得ル。

故ニ、以下ニ於テハ $f(0)\neq 0$ トシテヨイ。更ニ

$f^*(x)=\dfrac{f(x)}{f(0)}$, $g^*(x)=\dfrac{g(x)}{f(0)}$ トオケバ，$f^*(0)=1$ ニシテ、シカモ $f^*(x)$, $g^*(x)$ ハ (F) ヲ満足スル故、以下ニ於テハ $f(0)=1$ トナリトシテヨイ。

次ニ $f(x)$ ハ偶函數ナルコトヲ証明シヨウ。(F) ニ於テ $y=0$ トオケバ、$f(0)=1$ ナル故

(1) $f^2(x)+g^2(x)=1$

(F) ニ於テ x ト y トヲイレカヘレバ

(2) $f(y+x)f(y-x)=f^2(x)-g^2(y)$

シカルニ (1) ヨリ

$$f^2(y)-g^2(x)=f^2(x)-g^2(y)$$

ナル故 (F) 及ビ (2) ヨリ

$$f(x+y)f(x-y)=f(y+x)f(y-x)$$

$y=-x$ トオケバ

$$f(0)=1$$

ナル故

$$f(2x)=f(-2x)$$

故ニ $f(x)$ ハ偶函數デアル。

(F) ニ於テ x, y ノ代リニ $\dfrac{x}{2}$ トオケバ

$$f(0)=1$$

ナル故

$$f(x)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)-g^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

故ニ　$f(x+y)+f(x-y)$

$$=\left\{f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\}+\left\{f^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\right\}$$

$$=\left\{f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x-y}{2}\right)\right\}+\left\{f^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\right\}$$

シカルニ(F)ニヨリ

$$f^2\left(\frac{x+y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x-y}{2}\right)=f(x)f(-y)$$

$$=f(x)f(y)\qquad(f(x)ハ偶函数)$$

又　$f^2\left(\frac{x-y}{2}\right)-g^2\left(\frac{x+y}{2}\right)=f(x)f(y)$

故ニ　$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)f(y)$

$f(x)$ハ可測ナル故、雑誌函数方程式第二十六号ニヨリ、αヲ任意ノ実数トシタルトキ

$$f(x)=\cos\alpha x\quad 或ハ\quad f(x)=\cos h\alpha x$$

$f(x)=\cos h\alpha x$ナラバ$f(x)\geqq 1$，シカモ(1)ニヨリ$f^2(x)+g^2(x)=1$ナル故，$f(x)\equiv 1$，即チ$f(x)=\cos\alpha x$ニ於テ$\alpha=0$ノ場合デアル。$f(x)\equiv 1$ハ$f(x)=\cos\alpha x$ニ於テ$\alpha=0$トシタ場合デモアルカラ結局求ムル解ハα,βヲ任意ノ実数トシタルトキ

$$f(x)=\alpha\cos\beta x,\ g(x)=\pm\alpha\sin\beta x$$

符号ノ取リ方ハ任意デアル。之レ等ハ明カニ(F)ヲ満足セシ

メル。

——（完）——