OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	群ノ表現ノ Kronecker product ニ就イテ
Author(s)	大島, 勝
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 222, p. 420-426
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74888
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

958. 群ノ表現ノ Kronecker product ニ就イテ

大島　勝(高知高校)

次ノ定理ノヲ証明シ，ソノ応用特ニ Brauer-Nesbitt ノ未解決ノ問題(Ann. Math. 42, 2) 即チ

$F_\kappa \times F_\lambda \longleftrightarrow \sum_\mu a_{\kappa\lambda\mu} F_\mu$ ナルトキハ $U_\mu \times F_{\lambda'} \cong \sum_\kappa a_{\kappa\lambda\mu}$

U_κ ナルコトヲ証明スルノガ本稿ノ目的デアル。コノ

$F_\kappa \times F_\lambda \longleftrightarrow \sum_\mu a_{\kappa\lambda\mu} F_\mu$ ハ $F_\kappa \times F_\lambda$ ガ既約成分 F_μ ヲ $a_{\kappa\lambda\mu}$ 個有スルコトヲ意味シ，$F_{\lambda'}$ ハ F_λ ノ contragredient + representation ヲ示ス。

1. 有限群 $\mathcal{G}$ ノ任意ノ体 K ニ於ケル正規表現ヲ R デ表ハス。

定理1. $\mathcal{G}$ ノ K ニ於ケル任意ノ表現ヲ $G \to \nabla(G)$，$\nabla(G)$ ノ次数ヲ m トスレバ

$$\nabla \times R \cong \begin{pmatrix} R & & 0 \\ & R & \\ & & \ddots \\ 0 & & R \end{pmatrix}$$

コノ R ハ m 個現ハレル。従ッテ mR デ表ハスコトニスル。

(証明) $\mathcal{G}$ ノ元ヲ $G_1, G_2, \cdots\cdots, G_t$ デ表ハス。

$G_i G_j = G_k$ デアレバ

$$R(G_i)=\begin{pmatrix} & & i & \\ * & 0 & & * \\ & \vdots & & \\ 0\cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ * & 0 & & * \end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ k\end{matrix}$$

従ッテ $mR\cong S$, コヽニ S ハ

$$S(G_i)=\begin{pmatrix} & & i & \\ * & 0 & & * \\ & \vdots & & \\ 0\cdots & E & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ * & 0 & & * \end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ k\end{matrix}$$

E ハ m 次ノ単位行列ナルモノノ表現デアル。

$\nabla\times R$ ヲ ∇^* デ表ハスコトニスレバ

$$\nabla^*(G_i)=\begin{pmatrix} & & i & \\ * & 0 & & * \\ & \vdots & & \\ 0\cdots & \nabla(G_i) & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ * & 0 & & * \end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ k\end{matrix}=\begin{pmatrix} & & 0 & \\ * & \vdots & & * \\ & \vdots & & \\ 0\cdots & \nabla(G_k)\nabla(G_j^{-1}) & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \\ * & 0 & & * \end{pmatrix}$$

$$(\because\quad G_i=G_kG_j^{-1}\ \text{ヨリ}\ \nabla(G_i)=\nabla(G_k)\nabla(G_j^{-1}))$$

$$P=\begin{pmatrix} \nabla(G_1^{-1}) & & 0 \\ & \nabla(G_2^{-1}) & \\ & & \ddots \\ 0 & & \nabla(G_t^{-1}) \end{pmatrix}$$

トオケバ

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \nabla(G_1) & & & 0 \\ & \nabla(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nabla(G_t) \end{pmatrix}$$

トナリ，明カー

$$\begin{pmatrix} \nabla(G_1^{-1}) & & & 0 \\ & \nabla(G_2^{-1}) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nabla(G_t^{-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 0 & & \\ * & \vdots & & * \\ 0 \cdots & \nabla(G_i)\nabla(G_j^{-1}) & \cdots & 0 \\ * & \vdots & & * \\ & 0 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla(G_1) & & & 0 \\ & \nabla(G_2) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \nabla(G_t) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} & 0 & & \\ * & \vdots & & * \\ 0 \cdots & E & \cdots & 0 \\ * & \vdots & & * \\ & 0 & & \end{pmatrix}$$

即チ $P(\nabla \times R)P^{-1} = S \cong mR$

q. e. d.

〔注意〕 R ガ完全可約ノトキハ $\nabla \times R$ ト mR ノ character ガ一致スルコトカラ定理ノ ハ直チニ証明出来ル。

系1. G ノ二ツノ表現 $\nabla(G)$, $W(G)$ ノ次数ガ一致スレバ

$$\nabla \times R \cong W \times R$$

系2. G ノ表現 $\nabla(G)$ ノ次数ヲ m トスレバ

$$mR \cong \begin{pmatrix} \nabla & & 0 \\ & * & \\ * & & * \end{pmatrix}$$

証明

$$R \cong \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & * & \\ * & & * \end{pmatrix}$$

ナル故

$$\nabla \times R \cong \begin{pmatrix} \nabla & & 0 \\ & * & \\ * & & * \end{pmatrix}$$

従ッテ定理1ニヨリ，求ムル結果ヲ得ル。系2ハ既ニ正田先生ノ証明サレタモノデアル。

尚定理1ハ次ノヤウニ拡張サレル．Gヲ有限次又ハ無限次ノ群，h_Gヲ index が有限ナル Gノ部分群トスル，h_Gノ1-representation ヨリ induce シタ Gノ表現ヲ $\overline{R}$ デ表ハストコトニスル。

定理2．Gノ任意ノ表現ヲ $G \to \nabla(G)$ トスレバ $H \to \nabla(H)$ ハ h_Gノ表現テナス．コレヲ $\nabla(h_G)$ デ表ハス．$\nabla(h_G)$ ヨリ induce シタ Gノ表現ヲ $[\nabla(h_G)]^*$ デ表ハセバ $[\nabla(h_G)]^* \cong \nabla \times \overline{R}$

証明ハ定理1ト同様デアル．h_G = Eナルトキガ定理1ニナルワケデアル。

2．正規表現 R ハ直既約表現 $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_l$ =

分解サレルカラ（Rが完全可約ノトキハ $U_k = F_k$）

$$\nabla \times R \cong \begin{pmatrix} \nabla \times U_1 & & 0 \\ & \nabla \times U_2 & \\ & & \ddots \\ 0 & & \nabla \times U_l \end{pmatrix}$$

又mRハ勿論直既約成分 $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_l$ ＝分解サレルカラ定理ノニヨリ次ノ定理ヲ得ル。

定理3. $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ表現ヲ ∇ トスレバ $\nabla \times U_k$ ノ直既約成分ハ $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_l$ 以外ニハ現ハレナイ。即チ

$$\nabla \times U_k = \sum_\lambda a_\lambda U_\lambda$$

定理4.（Braner-Nesbitt） $F_\kappa \times F_\lambda \longleftrightarrow \sum_\mu a_{\kappa\lambda\mu} F_\mu$

ナルトキハ $U_\mu \times F_{\lambda'} \cong \sum_k a_{k\lambda\mu} U_k$ デアル。

証明 Braner-Nesbitt ＝ヨリ $\varphi^{(k)} \times \varphi^{(\lambda)} = \sum_\mu a_{k\lambda\mu} \varphi^{(\mu)}$ ナルトキ $\eta^{(\mu)} \times \varphi^{(\lambda')} = \sum_k a_{k\lambda\mu} \eta^{(k)}$ ガ成立スルコトガ証明セラレテキルカラ，$\eta^{(1)}, \eta^{(2)}, \cdots\cdots \eta^{(l)}$ ガ一次独立ナルコトニ定理3ヲ用フルコトニヨリ求ムル結果ヲ得ル。

q. e. d.

定理5. $\mathfrak{G}$ ノニツノ表現 ∇, W ガ同ジ既約成分ヲ有スルナラバ

$$\nabla \times U_k \cong W \times U_k$$

トナル。

証明. ∇, W ノ Character ヲ夫々 χ_1, χ_2 デ表

ハセバ $\chi_1 = \chi_2$. 従ッテ $V \times U_k$, $W \times U_k$ ノ character ハ一致スル。

$$\chi_1 \times \chi^{(k)} = \chi_2 \times \chi^{(k)}$$

然ルニ定理3ニヨレバ $V \times U_k$, $W \times U_k$ ハ共ニ $U_1, U_2, \cdots\cdots, U_l$ ニ分解サレルカラ $V \times U_k \cong W \times U_k$ トナル.

q. e. d.

定理6. $U_\mu \times U_{\nu'}$ ハ直既約表現トシテ U_λ ヲ $C_{\mu\nu}$ 個有ス。

証明. $U_{\nu'} \longleftrightarrow \sum_{\lambda'} C_{\nu'\lambda'} F_{\lambda'}$ ダカラ定理5ニヨリ

$$U_\mu \times U_{\nu'} \cong U_\mu \times \left(\sum_{\lambda'} C_{\nu'\lambda'} F_{\lambda'}\right)$$

$$\cong \sum_{\lambda'} C_{\nu'\lambda'} (U_\mu \times F_{\lambda'})$$

$$\cong \sum_{\lambda'} C_{\nu'\lambda'} \sum_k a_{k\lambda\mu} U_k \qquad \text{(定理3ニヨル)}$$

$$= \sum_k \left(\sum_\lambda C_{\nu'\lambda} a_{k\lambda\mu}\right) U_k$$

コンデ $k=1$ トオケバ

$$a_{1\lambda\mu} = \begin{cases} 1 & \lambda = \mu \text{ トルトキ} \\ 0 & \lambda \neq \mu \text{ トルトキ} \end{cases}$$

トナル故

$$\sum_\lambda C_{\nu'\lambda} a_{1\lambda\mu} = C_{\nu'\mu'} = C_{\nu\mu} = C_{\mu\nu}$$

q. e. d.

系 $U_\mu \times U_{\nu'}$ ガ直既約成分トシテ U_1 ヲ有スレバ

U_μ ハ既約成分トシテ F_ν ヲ（従ッテ U_ν ハ F_μ ヲ）有ス．逆モ成立スル．

3. 最後ニ完全可約デナイ表現ト既約表現ノ Kronecker product ガ完全可約トナル例ヲ一ツ挙ゲテオキマス。

G ノ group ring ガ primary decomposable デアルトスル．G ノ highest kind ノ表現ヲ F_k トスル（既チ表現ノ次数ガ p^a デ割レルモノ．但シ g ノ位数 $g = g' p^a$, $(p, g') = 1$ $U_k = F_k$ デアル．G ノ group ring ガ primary decomposable デアルカラ

$$U_1 \cong \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ * & & & 1 \end{pmatrix}$$

デ U_1 ノ次数ハ p^a デアル．定理5ニヨリ

$$U_1 \times F_k \cong p^a F_1 \times F_k \cong p^a F_k.$$

即チ $U_1 \times F_k$ ハ p^a 個ノ既約成分 F_k ニ分解サレテ、勿論完全可約表現デアル。