



Title	再ビ「既約行列系」ニ就テ
Author(s)	安倍, 亮
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 222, p. 428-436
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74890
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

960. 再ビ「既約行列系」=就テ

安 唐 亮 (東京帝大)

私ノ此ノ前ノ談話「行列系ノ既約性ト絶對既約性」(本誌第217号)ノ誤リヲ中山サンが注意シテ下サイマシタ。
「定理1」ハ全然誤リデス。証明が間違ッテ居ルベカリデナク、

定理ノ内容自身が橋リデアルコトモ中山サンが例ヲ挙ゲテ教ヘテ下サイマシタ。従ッテ定理1ヲ使ッタ定理5ノ証明モ変ヘナケレバナリマセンガ、此ノ定理ノ方ハ内容ニハ誤リカナク、独立ト証明ガ簡單ニ出来マス。先ヅ其ヲ述ベマス。(§1)

次ニ定理1ハ定理4ノ逆定理、心算ダッタノデスガ、先ヅ定理4及ビソノ逆ヲ必要トシタ問題ヲ述ベテ (§2) (ソレハムシロ前談話ノ前書トスベキモノデシタガ)、ソノ問題ノ解決ニ役立つ様ニ、定理1ニ代ル條件ヲ出シマス。(§3, 4, 5) 餘リ奇麗ナ形ニナラズ、他ノ定理ノ方法ト首尾一貫シタナリマスガ、使ハウト思ッテ居タ目的ニハ大体十分ナコトガ分リマス。(§6)

色々教ヘテ下サッタ中山サンニ御礼申上げマス。

§1. 先ヅ定理5ノ証明.

K/P が有限次ナルトキ K / P / (必ずシモ *associativ* デナイ) *einfache lineare algebra* M/K ハ P / P / *algebra* トシテモ *einfach* デアル。但シ $M \neq (0)$ (従ッテ $M \neq 0$) トスル。

証. $m \neq M$, P -Ideal $\neq (0)$ (P -modul + 右側 Ideal) トスル。 $m \cap K = M$, K -Ideal $\neq (0)$
 $\therefore m \cap K = M \quad m \cap M \cap m = M \cap K \cdot m = M \cdot m \cap K$
 $= M \cap M = M \quad \therefore m = M \quad \text{f. e. d.}$

注意 $M \cap M = 0$ ナラ定理ハ成立タナイ。

§2. 次ニ行列系ニ関スル定理4及ビ其逆ヲ必要トシタ問題ニ就テ説明スル。

P ノ上ノ *Radikal*ヲ持ツタ *Lie*環ノ構造トシテ
 ドントモ、ガアルカタ知ルノニ、 P ノ上ノ *渾單純 Lie*環ノ
 P -於ケル表現ヲ知ルコトガ必要ニナツタクル。(本誌
 214号、可換ノ *Radikal*ヲ持ツ *Lie*環(I) 156頁
 以下参照) シタトモ標数0ノトキニハソレハ P -於ケル既約
 表現ノ知識ニ還元サレル。所ガ開体ニ於ケル既約表現ハ
*Cartan*以来完全ニ知ラレテ居ル。ソノ知識カラ P -於ケル
 既約表現ノ知識ヲシタトモ原則的にハ導キ出シタイト云
 フノガ吾々ノ問題デアル。

然ルニ定理4ニヨレバ、 P -於ケル既約表現 φ' ハ、ア
 ル有限次拡大 K/P ニ於ケル絶対既約表現 φ カラ正規表現
 ニヨル置換ヘデ得ラレル。シタガツテ、既ニ知ラレテキル開
 体ニ於ケル既約表現 φ^* ヲ *transform*シテ適當ノ有限
 次 K/P ニ於ケル絶対既約表現 φ ヲ得、ソコデ置換ヲス
 ルコトニ依ツテ、 P -於ケル既約表現ハ必ズ求メラレル筈デ
 アル。

但シ勝手ノ有限次 K/P ニオケル φ ニ直シテモ(勿論
 直セタトシテ)、ソレカラ P -於ケル既約表現ガ得ラレルカ
 ドウカハ分ラナイ。ソコデ定理4ノ逆ニ當ルモノガドウシ
 テモ必要ニナツテ来ル。

例ヘバ φ ガ K, P ノ中間体ニ於ケル表現ニモ直セル場合
 ニハ、 K ニオケル表現トシテ K/P ノ正規表現デ置換ヘタノ
 デハ P -於ケル既約表現ガ出来ナイコトハ前談話ノ第一節ニ
 述ベタ。即チ K ハソノ意味ノ *minimalität*ヲモタナケ

レバナラナイ。ソレが逆ニ十合ダト主張シタノが前談話ノ定理1デアッタ。

§3. 所ガ實ハソレダケデハ十合デナイコトヲ中山サ
ンガ例ヲ據ガテ注意シテ下サッタ。ソノ一例ヲ次ニ引用サセ
テ載ク。

P ノ上ノ $\text{Index } j$ ノ $\text{normale Divisionsalgebra}$ ノヲトリ、ソノ $\text{minimal + Zerfällungskörper}$ K デ $n = (K:P) > j + 1$ モノヲトル。此ノ K
ニ於ケル絶對既約表現ハ K, P ノ中間体ニオケル表現ト同値
ニハナラナイ [∵ $\exists \beta \in K \neq \beta \in P$ ナル $\beta =$ オケル表現
ト同値ガツタトスレバ、 $\beta =$ オケル此ノ絶對既約表現ガ
アレコトニナリ、従ツテ β ガ此ノ Zerfällungskörper
トナリ、 K ノ minimal ナコトニ反スル] 即チ定
理1ノ假定ハ満足サレラ居ル。コノ表現ハ j 次ガカラ、
 K/P ノ正規表現ヲ置換ヘレバ $P =$ オケル n_j 次ノ表現
ニナル。所ガ此ノ $P =$ オケル既約表現ハ正規表現デアツテ
 j^2 次デアアル。 $n_j > j^2$ ガカラ始メ、表現ハ既約デアマリ
得ナイ。即チ定理1ノ終結ハ成立シナイ。

此ノ $\text{Index } j =$ 等しい次數ノ Zerfällungs-
 körper K/P ノトレバ表現次數ノ關係式 $n_j = j^2$ ガカ
ラ既約表現ガ得ラレルコトガナル。而モ此ノ場合 $n = j$
ナル K ノドウトツテモ、ソレカラ得ラレル $P =$ 於ケル既約表
現ハ皆同値デアアル。

§4. 上ノ例カラ直チニ想像サレルヤウニ、 K ノ次數ノ

條件が定理4ノ逆トシテ定理1ニ代ルベキモ、 Γ 與ヘルコト
ヲ次ニ示サウト思フ。

但シ $\mathcal{O}$ = 當ルモ、 Γ ハ associative algebraノ表現以外ノ場合 (associativeノトキハ表現論ハ此如ク考ヘテ居ル問題ニ關スル限リ殆ンド trivial) = Γ ハ、表現ノ matrixノ基礎体ヲ係數トスル enveloping associative algebraカラ作ラレル。或ハ前談話ノ流儀ニ依レバ γ ノ commutator algebra, 即チ γ - K -表現加群ノ γ - P -加群トシテ、自己同型環 Δ ヲ考ヘル所デアルガ、ソレハ γ - K -加群ガ先ニ與ヘラレタトキ = Γ 考ヘニクイ (第一 Δ ヲ考ヘル位ナラ、ソレガ Schiefkörperカドウカト云フコトダケデ P = オケル表現ガ既約カドウカト云フコトハ分ツテ了フ) ダカラ、イサコカ方法ガ統一ヲクケレドモ、enveloping algebraヲ考ヘルコトニスル。

§5. γ ヲ K ニ於ケル絶對既約 n 次行列系トシ、 P ヲ K ノ部分体トスル。(次ノ [1], [2] デハ K/P ハ必ガシニ有限次デナクテモヨイ)。 γ ノ enveloping associative P -algebraヲ $\mathcal{O}$ トスル。即チ $\sum_i P_i S_{i,1}, S_{i,2}, \dots, S_{i,n_i}$ ($P_i \in P, S_{i,j} \in \gamma$ ノ行列)ノ全体ヲ $\mathcal{O}$ トスル。 $\mathcal{O}K = K^n$ 猶 γ ハ P ニ關シ一様独立ナ行列ヲ有限個シカ含マズ、^{*}従ツテ $(\mathcal{O}:P)$ = 有限トスル。(勿論 K/P ガ

*) γ ガ零行列シカ含マナイ場合、表現デ云ヘバ零表現ノバツヒハ除外スル。

有限次ナラ自然ニサウナル。又 K/P が無限次デモ、例ヘバ
 $\mathfrak{A}$ が P = 於ケル algebra 又ハ Lie algebra ノ表現デ
 アルヲサナ場合ニモ勿論、 P = 關シ独立ナ行列ハ有限個シカ
 ナイ)

[1] $\mathfrak{A}$ ハ einfach ナ P -algebra デアル。

証. $\mathfrak{A}$ 7 $\mathfrak{A}$ ノ両側 Ideal $\neq (0)$ トセバ、 $\mathfrak{A}K$ ($\mathfrak{A}$ 7
 matrix ノ集合トシテ、ソレ = K ノ元ヲカケル) ハ $\mathfrak{A}K = K_n$
 ノ Ideal $\therefore \mathfrak{A}K = K_n \therefore \mathfrak{A}$ ハ巾環デアリ得ナイ。従
 ヲテ $\mathfrak{A}$ ハ單純環。次ニ $\mathfrak{A} \neq (0)$ $b \neq (0)$ $\mathfrak{A}b = (0)$ ト
 假定スレバ、 $(0) = \mathfrak{A}K \cdot bK = K_n \cdot K_n = K_n$ トナツテ矛盾。
 $\therefore \mathfrak{A}$ ハ單純環。 q. e. d.

[2] $\mathfrak{A}$ ノ Zentrum 7 Z トセバ $P \subset Z \subset K$ 、且ツ
 $\mathfrak{A}_{K/Z} \cong K_n \therefore (\mathfrak{A}:Z) = n^2$

証. $\mathfrak{A}$ ノ Zentrum Z ノ matrix ハ $\mathfrak{A}K = K_n$ ノ
 スベテノ matrix ト可換ガカラ $\mathfrak{A}E_n$ ($\mathfrak{A} \in K$) ノ形。
 $\mathfrak{A}E_n = \mathfrak{A}$ ト書クコトニスレバ $P \subset Z \subset K$ 。又 $\mathfrak{A}K = K_n$
 ハ $\mathfrak{A}_{K/Z}$ ($\mathfrak{A}$ ノ抽象的 = Z ノ上ノ algebra ト考ヘテ、係數
 7 K = 拡大シタモ、) ノ homomorph + Bild デ、而モ
 $\mathfrak{A}_{K/Z}$ ハ einfach ガカラ $\mathfrak{A}_{K/Z} \cong K_n$ $(\mathfrak{A}:Z) = n^2$
 q. e. d.

$\mathfrak{A} \cong \Delta_m$ Δ : Divisionsalgebra. Δ ノ Index
 7 j トスレバ $n = mj$ 。又 $(Z:P) = s$ トスル。以上ノ
 記号ヲ使ツテ:

[3] K/P ハ有限次トスル。 K = 於ケル絶對既約行列系

γ = 於て K / 元 γ K/P / 正規表現ヲ置換ヘタモノヲ γ' トスル。 γ' が既約ナル必要十分条件ハ $(K:Z) = j = [\alpha/Z / \text{Index}]$ ナルコトデアル。或ハ K が $\alpha \cong \Delta_m + \nu \Delta = \text{maximaler Teilkörper}$ トシテ含マレルト云ツテモヨイ。

証。 γ ハ n 次ダカラ、 γ' ハ n $(K:P) = n(K:Z)$ 次デアル。 γ' ハ $\alpha / P = \alpha$ ケル表現 = 拡張サレル。夫が既約ナ条件ヲ求メレバヨイ。所ガ $\alpha / P = \alpha$ ケル既約表現ハ、 α / *minimales Linksideal* L $\Rightarrow$ *vermitteln* サレ、 $(L:P) = (\alpha:P)/m = m j^2 Z = n j$ 次ダカラ $n j$ 次デアル。 $\therefore \gamma'$ が既約ナ条件ハ、之レト次数ガ等シイコト、即チ $m(K:Z) = n j Z$ 、 $(K:Z) = j$ ナルコトデアル。且ツ [2] = ヨリ K ハ α/Z / 従ツテ Δ/Z / *Zerfällungskörper* ダカラ、 K が Δ / 最大可換部分体トシテ含マレルコトデアルトモ云ヘル。

q. e. d.

§ 6. § 2 / 問題ハ § 5 / 結果ヲ使ツテ原則的ニハ解決スル。

A P / 上 / 開体トシテ、 $A =$ 於ケル既約行列系 γ^* が興ヘラレタトスル。[1], [2] / K A ト考ヘテ γ^* / *enveloping algebra* α^* $\Rightarrow$ 作レバ、 α^* ハ單純環デ [2] / 性質ヲモツ。 $\alpha^* \cong \Delta_m^*$ ナル *Divisionsalgebra* Δ^* / 一ツノ最大可換部分体 K $\Rightarrow$ トレバ、 α^* ハ K $\Rightarrow$ 絶対既約ナ表現ヲモツカラ、 γ^* ハ適當 = *transform* シテ K

ニ於ケル (絶対既約+) 行列系 $\gamma = \text{デキル}$ 。 γ の enveloping P -algebra $\mathcal{O}$ の勿論 $\mathcal{O}^*$ と同型デ、従ッテ $\mathcal{O} \cong \Delta_m^*$ 。 K の Δ^* の最大可換部分体カラ [3] の條件が満サレ、従ッテ γ の matrix の元ヲ K/P の正規表現ヲオキカヘテ出来ル $P = \text{於ケル}$ 行列系 γ' の既約デアレ。又カウマッテ、 $P = \text{オケル}$ 既約行列系が必ず $A = \text{オケル}$ 或ハ既約行列系カラ得ラレルコトモ保証サレテ居ル。

従来ノ行掛リヲ離レテ、 $K = \text{関係+}$ ク云ヒ表ハセバ、 $\gamma^*(\rightarrow \gamma) \rightarrow \gamma'$ ト移ルノハ結局、 $\gamma^*: S \rightarrow \mathcal{O}(S) \in \mathcal{O}^*$ カラ $\gamma': S \rightarrow D(\mathcal{O}(S)) = \text{移ルコトデアレ}$ 。 但シ $a \rightarrow D(a)$ の $\mathcal{O}^*$ の $P = \text{於ケル}$ 既約表現デアレ。 精シク云ヘバ $\mathcal{O}(S)$ ヲ先ヅ Δ_m^* の matrix トシテ書キ、 Δ^* の元ヲ K/P の正規表現ヲ置換ヘテ出来タモノガ $D(\mathcal{O}(S))$ デアレ。 従ッテ γ' の中間ニトッタ $K = \text{ハ関係+}$ ク γ^* カラ決ルモノデアレ。 即チ

[4] $P = \text{於ケル}$ 既約行列系 γ' の前談話ノ定理4ニヨリアル $K/P = \text{オケル}$ 絶対既約+ γ カラ置換ニヨッテ得ラレルノデアレガ、 γ ノ閉体ニオケル表現トシテ γ^* トハレバ、 γ^* ニ上ノ意味デ對應スル γ' の唯一ツデアレ。

例ヘバ、 P 上ノ (単単純) Lie 環、 P 上ノ algebra、有限群+ $\mathfrak{g}$ の $A = \text{オケル}$ 既約表現の γ^* カラ、上ノ関係ニアル $P = \text{於ケル}$ 既約表現の γ' が唯一ツ得ラレル。 (閉体ニ於ケルノ単純環又ハ単純 Lie 環カラ $P = \text{オケル}$ 単純環又ハ単純 Lie 環ガ多数得ラレルノニ相増スル様ナコトハナ

1. 「可換 + Radikal を持つ Lie 環」 (I) p. 158,
上ノ方デ環ノ分類ヨリ, 表現ノ分類ノ方が難シイダラウト書
イタノハ考ヘ盡ヒデアツタ)

容易 = 全ルマウ = ($\mathfrak{g}^*$ ノ Zentrum が P ノ separ-
rabel + 拡大ノトキ = ハ) $\mathfrak{g}^*$ ハ $\mathfrak{g}'_A$ ノ成分トシテ j 重
= 含マレル。而モ $\mathfrak{g}^*$ ノ g ノ共軛表現 $\psi^* = \psi^{(1)}, \psi^{(2)},$
-----, $\psi^{(2)}$ が夫レ j ヲツツ $\mathfrak{g}'_A$ = 含マレル。 $\psi^{(2)},$ -----
---, $\psi^{(2)}$ カラモ上ノ手続ニ依ツテ同ジ $\mathfrak{g}'$ が生ズル。即チ
一般ニ A = 於ケル表現ヨリモ P = 於ケル表現ノ方が却ツテ少
クナル。

尤モ問題が解決シタト云ツテモ飽クマデ原則タケデアッ
テ, 實際ニ P = 於ケル表現ヲ求メヨウトシテモ, envelop-
oping algebra $\mathfrak{g}^*$ ヲ Δ_m^* ノ形ニ explicit = ア
ラハスノが困難トデ, 個々ノ場合ニハ却ニラマク行カサ
イ。

§17. 前談話 p. 264ノ二行目ニ, Jacobsonノ定
理6ノ証明が「妙ダ」ト書キマシタガ取消シマス。中山サン
ノ注意シテ下サツタ通り, アレハアレデ正シイノデシタ。

—— 以 上 ——