OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Metric Vector-lattice 二就テ
Author(s)	中野, 秀五郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 223, p. 441-445
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74893
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

963. Imetric Vector-lattice ニ就テ

中野秀五郎（東大）

最近 Imetric Vector-lattice ノ表現ガ F. Bohnenblust (Duke Math. Vol. 6, 1940), 宍戸谷氏 (Annals of Math. Vol. 42. 1941) 等ニヨッテ研究サレテヰル。此処デハ relative Spektrum (拙物記事. Eine Spektraltheorie) ガ Imetric Vector-lattice ニ應用シ得ルコトヲ注意致シマス。

1) Imetric Vector-lattice M トハ (conditionally) σ-complete + Vector-lattice ニシテ、然カモ norm $\|a\|$ ガ次ノ如ク定義サレヲキルトスル。

$$\|a\|=0 \longrightarrow a=0$$

$$|a|\leqq|b| \longrightarrow \|a\|\leqq\|b\| \qquad (a,b\in M)$$

但シ此処デハ norm $\|a\|$ ガ Bochach space ノ條件ヲ満足スルコトハ假定シナイデ単ニ

$$\|\lambda a\|=|\lambda|\|a\| \qquad (\lambda \text{ real number})$$

ノミヲ假定スル。

先ヅ M ニ於ケル Projector $[P]$ ノ Maximal-ideal ヨリナル. lacally bicompact Hausdorff space ヲ J. トシ Maximalideal p ヲ point ト考ヘル。

定理1

$$\lim_{[P]\to p}\frac{\|[P]\,b\|}{\|[P]\,a\|}=\left(\frac{|b|}{|a|},\ p\right)$$

但シ $\mathfrak{p}$ ヲ $[a]$ トスル。又コノ式ノ意味ハ、任意ノ正数 $\varepsilon>0$ ニ對シ，$\mathfrak{p}$ ノ近傍 $[p_0]$ ヲ適當ニ定メレバ $[p]\leqq[p_0]$ ニ對シ常ニ

$$\left|\frac{\|[p]b\|}{\|[p]a\|}-\left(\frac{|b|}{|a|},\mathfrak{p}\right)\right|<\varepsilon$$

ノ意味ナリ。又 $\left(\frac{|b|}{|a|},\mathfrak{p}\right)=+\infty$ ノトキハ，任意ノ正數 γ ニ對シ、$\mathfrak{p}$ ノ適當ナ近傍 $[p_0]$ ヲ定メレバ、$[p]\leqq[p_0]$ ニ對シ

$$\frac{\|[p]b\|}{\|[p]a\|}\geqq\gamma$$

トナルノ意デアル。

〔証明〕 $(0<)\left(\frac{|b|}{|a|},\mathfrak{p}\right)=\lambda$ ヲ finite トスレバ任意ノ $\varepsilon>0$ ニ對シ、$\mathfrak{p}$ ノ近傍 $[p_0]$ ヲ適當ニ定メレバ

$$(\lambda-\varepsilon)[p_0]|a|\leqq[p_0]|b|\leqq(\lambda+\varepsilon)[p_0]|a|$$

故ニ $[p]\leqq[p_0]$ トレバ

$$(\lambda-\varepsilon)[p]|a|\leqq[p]|b|\leqq(\lambda+\varepsilon)[p]|a|$$

從ツテ

$$\|(\lambda-\varepsilon)[p]a\|\leqq\|[p]b\|\leqq\|(\lambda+\varepsilon)[p]a\|$$

故ニ

$$\left|\frac{\|[p]b\|}{\|[p]a\|}-\lambda\right|<\varepsilon$$

$\lambda=+\infty$ ノ場合モ同樣デアル。

定理1ヨリ直チニ次ノ定理ガ得ラレマス。

定理2 総テノ Projector $[p]$ ニ對シ

$$\|[p]a\| = \|[p]b\|$$

ナレバ

$$|a| = |b|$$

デアル。

2) Bohnenblust ノ結果ハ結局次ノ如キ Metric Vector-lattice ノ表現ヲナスコトデアル。即チ

$$|a| \wedge |b| = 0 \rightarrow \|a+b\| = (\|a\|^\alpha + \|b\|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

ナル metric ヲ有スル metric Vector-lattice デアリマス。

角谷氏ノハ特ニ $\alpha = 1$ ノ場合デアリマス。定理1ニヨリマスト

$$\lim_{[p]\to p} \frac{\|[p]b\|}{\|[p]a\|} = \left(\frac{|b|}{|a|}, p\right) = \left|\left(\frac{b}{|a|}, p\right)\right|$$

従ッテ

$$\lim_{[p]\to p} \frac{\|[p]b\|^\alpha}{\|[p]a\|^\alpha} = \left|\left(\frac{b}{|a|}, p\right)\right|^\alpha$$

従ッテ $[p][q] = 0$ ナレバ

$$\|[p+q]a\|^\alpha = \|[p]a\|^\alpha + \|[q]a\|^2$$

ナルニヨリ，容易ニ

$$\|[a]b\|^\alpha = \int_{[a]} \left|\left(\frac{b}{|a|}, p\right)\right|^\alpha \|dp\, a\|^\alpha$$

ナルコトガ解ル。此処ニ積分ハ Riemann ノ意味デス。即チ

$$\lim \sum_{i=1}^{n} \left|\left(\frac{b}{|a|}, p_i\right)\right|^{\alpha} \| [p_i] a \|^{\alpha}$$

$p_i \ni [p_i]$. $[p_i][p_j] = 0$,

$$[a] = [p_1] + \cdots\cdots + [p_n]$$

デ、又上ノ積分ノ存在モ簡単ニ証明サレル。

故ニ

$$\| [a] b \| = \left(\int_{[a]} \left|\left(\frac{b}{|a|}, p\right)\right|^{\alpha} \| dp\, a \|^{\alpha} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

今迄ヨリ至= orthogonal + complete system ヲ $\{a_\lambda\}$ トスル。即チ a_λ ノ総テニ orthogonal + element ハ0トスル。

$\{a_\lambda\}$ ノ存在ハ transfinite Induction デ明カデアル。

空間 $\mathfrak{J}$ ノ中デ近傍 $[a_\lambda]$ 間ニアル点ノ全体ヲ $\mathfrak{J}'$ トスレバ

$$\varphi_b(p) = \left(\frac{b}{|a_\lambda|}, p\right) \qquad p \ni [a_\lambda]$$

トシテ、$\mathfrak{J}'$ ニ於ケル連續函数 $\varphi_b(p)$ ニテ $\mathfrak{M}$ ノ element b ガ代数的ニ表現サレマス。然カモ

$$\| b \| = \left\{ \sum_{\lambda} \int_{\mathfrak{J}'} \left|\left(\frac{b}{|a_\lambda|}, p\right)\right|^{\alpha} \| dp\, a_\lambda \|^{\alpha} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

トナル。此処ニ積分ハ Riemann ノ意味デアルガ、勿論 Lebesgue ノ意味ニ拡張デキマス。

3) 次ニ $\lambda = \infty$ ノ場合ヲ考ヘル。即チ

$$|a| \wedge |b| = 0 \longrightarrow \|a+b\| = Max(\|a\|, \|b\|)$$

ナル metric vector-lattice ヲ考ヘル。$a>0$ ニ対シ

$$\text{g.l.b.}_{[p]\in\mathfrak{p}} \|[p]a\| = \varphi_a(\mathfrak{p})$$

ト置クト、$\varphi_a(\mathfrak{p})$ ガ ツ ニ テ連続ナ函数ナルコトガ容易ニ解ル。又

$$\lim_{[\phi]\to\mathfrak{p}} \frac{\|[p]b\|}{\|[p]a\|} = \frac{\varphi_b(\mathfrak{p})}{\varphi_a(\mathfrak{p})} = \left(\frac{|b|}{|a|}, \mathfrak{p}\right)$$

ヨリ、$a>0$ ニ対シ

$$\|a\| = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{p}} \varphi_a(\mathfrak{p})$$

ナルコトガ知ラレル。又一般ノ a ニ対シテハ $\varphi_{a_+}(\mathfrak{p}) - \varphi_{a_-}(\mathfrak{p})$ ヲ對應サセレバヨイ。上ノ式カラ $\varphi_a(\mathfrak{p})$ デ a ガ代数的ニ表現サレテヰルコトガ解リマス。