



Title	函数方程式 $f(\alpha x + \beta y) + f(\gamma x + \delta y) = 2f(x)f(y)$ ニ就イテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 223, p. 457-462
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74897
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

967. 函数方程式 $f(\alpha x + \beta y) + f(\gamma x + \delta y) = 2f(x)f(y)$
 = 就イテ

春 木 博 (神戸高等商船)

函数方程式 $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ / 可
 測解ハ $f(x) \equiv 0$, $f(x) = \cos \lambda x$, $f(x) = \cosh \lambda x$
 (λ ハ 任意ノ実数) ナル。

* $\alpha = \alpha, \beta, \gamma, \delta$ ナ $|\alpha| \leq 1, |\beta| \leq 1, |\gamma| \leq 1, |\delta| \leq 1$
 ナル實数トシテ函数方程式

$$(1) \quad f(\alpha x + \beta y) + f(\gamma x + \delta y) = 2f(x)f(y)$$

ノ連續解ヲ考究シヨウ。

(1) = 於テ $x=0, y=0$ トオケバ $f(0) = 0$ 或ハ $f(0)$
 $= 1$ ナル。

第一ノ場合 $f(0) = 0$ ナルトキ

(1) = 於テ $y=0$ トオケバ

$$(2) \quad f(\alpha x) + f(\gamma x) = 0$$

α, γ 何レモ 0 ナルトキハ (1) = 於テ $x=0$ トオケバ

$$f(\beta y) + f(\delta y) = 0$$

コトヲ β, δ 何レモ 0 ナルトキハ, (1)ヨリ $f(x) \equiv 0$

故ニ、例ハバ (2)ノ方程式ニ於テ $\alpha \neq 0$ ナリトシテ一般性ヲ失ハヌ。

(2)ニ於テ x ノ代リニ $\frac{x}{\alpha}$ トオキ、 $C = \frac{\gamma}{\alpha}$ トスレバ

$$(3) \quad f(x) = -f(Cx)$$

ヲ得ル。之ヨリ n ヲ任意ノ自然数トスルトキ

$$(4) \quad f(x) = (-1)^n f(C^n x)$$

$|C| < 1$ ナラバ (4)ニ於テ $n \rightarrow \infty$ トスレバ $f(x)$ ガ連続ナル故 $f(C^n x) \rightarrow f(0) = 0$

故ニ $f(x) \equiv 0$ ヲ得ル。

$|C| > 1$ ナルトキハ (4)ニ於テ x ノ代リニ $\frac{x}{C^n}$ トオクコトニヨリ

$$f(x) = (-1)^n f\left(\frac{x}{C^n}\right)$$

$n \rightarrow \infty$ ナラシムレバ前ト同様ニシテ $f(x) \equiv 0$ ヲ得ル。

$C = 1$ ナルトキハ (3)ヨリ $f(x) \equiv 0$ ヲ得ル。

$C = -1$ ナルトキハ $\alpha = -\gamma$ ニシテ (3)ヨリ

$$f(x) = -f(-x)$$

コトキハ更ニ $f(\beta y) + f(\delta y) = 0$ ニ於テ β, δ 何レモ 0 ナラバ (1)ヨリ $f(x) \equiv 0$ ヲ得ル。又 β, δ ノうち何レカ 0 ナラケレバ前述ト同様ニシテ $f(x) \equiv 0$ カ又ハ

$\beta = -\delta$ ニシテ $f(x) = -f(-x)$ ヲ得ル。故ニ $\alpha = -\gamma$,

$\beta = -\delta$, $f(x) = -f(-x)$ ノ時ノミヲ論ズルニ、コノト

キハ (1) ヨリ

$$f(\alpha x + \beta y) + f(-\alpha x - \beta y) = 2f(x)f(y)$$

$f(x) = -f(-x) + 2$ 故、左辺ハ 0 トナルカラ、 $f(x) \equiv 0$
ヲ得ル。

結局、第一ノ場合カラハ $f(x) \equiv 0$ ノミヲ得ル。

第二ノ場合 $f(0) = 1$ トキ。

コノトキハ (1) = 於テ $y = 0$ トオクコト = ヨリ

$$(5) \quad f(x) = \frac{1}{2} \{f(\alpha x) + f(rx)\}$$

之レヨリ n ヲ任意ノ自然数トスルトキ

$$\begin{aligned} (6) \quad f(x) &= \frac{1}{2^n} \left\{ f(\alpha^n x) + \binom{n}{1} f(\alpha^{n-1} r x) + \binom{n}{2} f(\alpha^{n-2} r^2 x) \right. \\ &\quad + \cdots + \binom{n}{k} f(\alpha^{n-k} r^k x) + \cdots + f(r^n x) \Big\} \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f(\alpha^{n-k} r^k x) \end{aligned}$$

ヲ得ル。

之ヲ数学的帰納法ニヨリテ証明スルニ、 $n=1$ ノトキ
ハ (5) = ヨリテ明カニ真ナル。

次ニ (6) が成リ立ツトイフ假定ノ下ニ

$$(7) \quad f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f(\alpha^{n+1-k} r^k x)$$

ヲ証明シヨシ。

$$(5) \text{ヨリ} \quad f(\alpha^{n-k} r^k x) = \frac{1}{2} \{f(\alpha^{n-k+1} r^k x) + f(\alpha^{n-k} r^{k+1} x)\}$$

$$(k=0, 1, \dots, n)$$

ヲ得ルカラ、之ヲ (6) へ代入スレバ

$$f(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left\{ f(\alpha^{n-k+1} r^k x) + f(\alpha^{n-k} r^{k+1} x) \right\}$$

右辺ノ括弧ヲホドイテ

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$$

ナレ關係式ヲ用フレバ (7) テ得ル。

(6) ヲ用キテ $|\alpha|, |r|$ ノミチ何レカ一方ノヨリ小トラハ細ヘバ $|\alpha| < 1, |r| \leq 1$ トラバ $f(x) \equiv 1$ ナルコトヲ証明シヨウ。

$$(6) = \exists \quad f(x) - 1 = \frac{1}{2^n} \left\{ f(\alpha^n x) + \dots + \binom{n}{k} f(\alpha^{n-k} r^k x) \right. \\ \left. + \dots + \binom{n}{n} f(r^n x) - 2^n \right\}$$

然レ $2^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{k} + \dots + \binom{n}{n}$ ナル故

$$f(x) - 1 = \frac{1}{2^n} \left[(f(\alpha^n x) - 1) + \dots + \binom{n}{k} (f(\alpha^{n-k} r^k x) - 1) \right. \\ \left. + \dots + \binom{n}{n} (f(r^n x) - 1) \right]$$

シカモ $|\alpha| < 1, |r| \leq 1, f(0) = 1$ ナレバ $f(x)$ ハ連續ナル故
任意ノ正數 ε 對シ $n > n_0(\varepsilon)$ ナル n 二ツキ

$$|f(\alpha^{n-k} r^k x) - 1| < \varepsilon$$

故ニ $|f(x) - 1| < \frac{1}{2^n} \left[1 + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n-n_0-1} \right] \varepsilon$

$$+ \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{n-n_0} |f(\alpha^{n_0} r^{n-n_0} x) - 1| + \dots + \binom{n}{n} |f(r^n x) - 1| \right]$$

シカモ $|\alpha| < 1$, $|\gamma| \leq 1$ テ $f(x)$ ハ連続ナル故、上式ノ右辺ノ
二番目ノ括弧内ノ各絶対値ハ一定正数 M テオサヘラレル。

$$\text{故ニ } |f(x) - 1| < \varepsilon + \frac{M}{2^n} \left[\binom{n}{n-n_0} + \binom{n}{n-n_0+1} + \dots + \binom{n}{n} \right]$$

$$n \rightarrow \infty \text{ ナラシムレバ } \frac{1}{2^n} \left[\binom{n}{n-n_0} + \dots + \binom{n}{n} \right] \rightarrow 0 \text{ ナル故}$$

$$|f(x) - 1| \leq \varepsilon$$

ε ハ任意ニ小ナル故、之ヨリ $f(x) = 1$ ナ得ル。

故ニ $|\alpha| = 1$, $|\gamma| = 1$ ナル場合ヲ論ズレバヨイ。同様ノ議論
ニヨリ $f(x) = \frac{1}{2} [f(\beta x) + f(\delta x)]$ ナラ $|\beta| = 1$, $|\delta| = 1$ ナル
場合ノミヲ論ズレバヨイクトガ判ル。

結局

$$(A) \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \quad (B) \begin{cases} \alpha = 1 \\ \gamma = -1 \end{cases} \quad (C) \begin{cases} \alpha = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \quad (D) \begin{cases} \alpha = -1 \\ \gamma = -1 \end{cases}$$

$$(P) \begin{cases} \beta = 1 \\ \delta = 1 \end{cases} \quad (Q) \begin{cases} \beta = 1 \\ \delta = -1 \end{cases} \quad (R) \begin{cases} \beta = -1 \\ \delta = 1 \end{cases} \quad (S) \begin{cases} \beta = -1 \\ \delta = -1 \end{cases}$$

ニ於テ上段ノ一ツノ組ト下段ノ一ツノ組ヲ組合セタテ六場
合ヲ論ズレバヨイ。

$$(A, P) \text{ ノトキ (I) ヨリ } f(x+y) = f(x)f(y)$$

$$\text{之ヨリ } \lambda \text{ ナ任意ノ実数トスルトキ } f(x) = e^{\lambda x}$$

$$(A, Q) \text{ ノトキ (I) ヨリ } f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

$$\text{之ヨリ } \lambda \text{ ナ任意ノ実数トスルトキ } f(x) = \cos \lambda x,$$

$$\text{或ハ } f(x) = \cosh \lambda x$$

$$(A, R) \text{ ノトキ (I) ヨリ } f(x-y) + f(x+y) = 2f(x)f(y)$$

之ハ (A, Q) ト一致スル。

(A, S) ノ トキ (1) ヨリ $f(x-y) = f(x)f(y)$

$f = \text{ストオケバ}$ $f(0) = 1$ ナル故 $f^2(x) = 1$

$f(x)$ ハ連続デ $f(0) = 1$ ナル故 $f(x) \equiv 1$

也ノ場合モ同様ニシテ論ジテ結局第一第二ノ場合ヲ總括スレバ

$$f(x) \equiv 0, f(x) = e^{\lambda x}, f(x) = \cos \lambda x,$$

$$f(x) = \cosh \lambda x \quad (\lambda \text{ ハ任意ノ實數})$$

ヲ得ル。

(註) $f(x) \equiv 1$ ハ $\lambda = 0$ トシテ特別ノ場合デアイル。

(完)