



Title	Topological space ノ Regularity 特ニ Complete regularityニツイテ
Author(s)	乙部, 好一
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 224, p. 463-484
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74898
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

968 Topological space, Regularity

特 = Complete regularity = ツイテ

乙 部 好 (東大學生)

§1. topological space, regularity = ツイテ.

R を任意の Hausdorff space (即ち R の相異なる任意の二点に相異なる近傍が存在する topological space) とする。 R の一点 p の任意の近傍 $U(p)$ に対し、 $U(p) \supset \overline{V(p)}$ (bar は closure を示す) となる p の近傍 $V(p)$ が存在すれば p を regular point といい、 Hausdorff space R の任意の点が regular point であるとき、 R を regular space と呼ばれるが、此の Trennung axiom を少し詳しく調べてみたい、其のとき = 先づ概念的 = 次 / 定義をする。

定義 1. index, ordered set I が順序型 μ をもつとする。 Hausdorff space R の一点 p の任意の近傍 $U(p)$ に対し、 I の各要素 i に対応する p の近傍 $V_i(p)$ が存在して (I の $\{V_i(p)\}$ は one-to-one かつ要する)。

$$(1) \text{ 任意の } i \in I \text{ につき } U(p) \supset \overline{V_i(p)}$$

$$(2) i, k \in I, i < k \text{ ならば } V_i(p) \supset \overline{V_k(p)}$$

とすれば、点 p の Trennung axiom $T(\mu)$ を満たすか、或は $T(\mu)$ -point であるか呼ぶ。 R の各点が $T(\mu)$ -point

ナルトキ R ハ $T(\mu)$ -space デアルトイフ。(点 p ノ近傍トハ p ヲ含ム R デノ open set デアルトスル即チ absolute + 近傍系ヲ特ニ断ラナイ限リ考ヘルコトニスル)

注意1. 特ニ $\mu=0$ 即チ I が空集合デアルトキヲモ考ヘルコトニスレバ, Hausdorff space トハ $T(0)$ -space ナルコトニ外ナラナイ。ナホ I ノイザレノ要素ニモ先立ツ 0 ナル index ヲ附加シテ上記定義ニ於ケル $U(p)$ ヲ $V_0(p)$ トオケバ, 形式的ニ条件 (1) ハ不要トナル。

注意2. R ノ一点 p が regular point デアルコトハ $T(1)$ -point デアルコトデアルガ, 夫ハ $T(\omega)$ -point (ω ハ凡テノ自然数ヲ通常ノ順序ヲ付ケタトキノ順序型) デアルコトニ同値デアル。何トナレバ $T(\omega)$ が成立スレバ勿論 $T(1)$ が成立スルガ, 逆ニ $T(1)$ ナラバ p ノ任意ノ近傍 $U(p)$ ニ對シテ $U(p) \supset \overline{V_1(p)}$ ナル近傍 $V_1(p)$ ガアル。ヨツテ亦 $T(1)$ ニヨリ $V_1(p) \supset \overline{V_2(p)}$ ナル近傍 $V_2(p)$ が存在スル。カクシテ p ハ $T(\omega)$ ヲ満足スルコトニナル。一般ニ $T(\mu+1)$ -point ハ $T(\mu+\omega)$ -point 及ビ $T((\mu+1)\omega)$ -point ニ同シイ。例ヘバ $T(\omega^*)$ ハ $T(\omega^*+\omega)$ ト同値デアル。

$\mu \neq 0$ ナラバ $T(\mu)$ -space ハ勿論 regular space デアル。

定理1. completely regular space ト $T(\eta)$ -space トハ相等シイ。但シ η ハスベテノ有理数

ヲ通常ノ大小ニ依ッテ順序ツケタトキノ順序型デアール。

(証明) R が *completely regular* デアレトスル。
任意ノ点 $p \in R$ / 任意ノ近傍 $U(p)$ ヲトル $\in 0 \leq f(x) \leq 1$
($x \in R$), $f(p) = 1$, $x \in R - U(p)$ トラバ $f(x) = 0$ 十
ル R = 於ケル連続函数 f カ存在スル。 $0 < r < 1$ 十
ル有理数 r / 集合ヲ I トシ, $r < r' < r < r' =$ ヲ実
数スレバ I / 順序型ハ η デアル。 $f(x) > r$, $r \in I$ 十
ル $x \in R$ / 集合ヲ V_r トスレバ, 明カニ V_r ハ p / 近傍ヲ
 $r < r'$ トラバ $V_r \supset \overline{V_{r'}}$ 且ツ $U(p) \supset \overline{V_r}$ デアレ。ヨツテ p ハ
 $T(\eta)$ -point デアレ。

逆 = Hausdorff space R / 任意ノ点 p カ $T(\eta)$ ヲ
満足シテキルトスル。 p ヲ含マナイ R / 任意ノ closed set
 A ヲトル $\in U(p) = R - A$ ハ p / 近傍ヲナスカラ, $T(\eta)$
ニヨリ $0 < r < r' < 1$ 十ル任意ノ有理数 r, r' = 對シ (η
ハ夫ト逆ノ順序ヲツケタ η^* ト相等シイコト = 注意)

$$U(p) \supset \overline{V_{r'}(p)}, \quad V_{r'}(p) \supset \overline{V_r(p)}$$

十ル p / 近傍 $V_r(p), V_{r'}(p)$ カ存在スル。カカル以上ハ
 $f(p) = 0$, $f(A) = 1$, $0 \leq f(x) \leq 1$ ($x \in R$) 十ル R = 於ケ
ル連続函数 f ヲ構成スルコトが出来ルコトハ, *normal*
space = 於ケル連続函数ノ *interpolation theorem*
ト全ク同様デアール。ヨツテ R ハ *completely regular*
デアール。

以上ノ様ナ *regularity* / *type* カ *topologically*
ニドノ様ナ意味ヲモツカ, 又ハ *regularity* = 對スル如何

種ノ分類ヲナシテキルカタ次ニ考ヘテミタイ。

§2. *regularity* / *type* ト一般化セラレタ *absolute closedness* トノ關係。

Hausdorff space / "*absolutely closed*" (*H-abgeschlossen*) ナル概念ヲ §1ニ定義シタ *regularity* / 各 *type*ニ拡張スル。

定義2 μ ヲ一ツノ順序型トスル。 *Hausdorff space* R ガ $R \supset R$ ナル任意ノ *Hausdorff space* $R = \cup R$, $R - R = \emptyset$ ナル任意ノ $T(\mu)$ -point p ニ對シテモ $p \notin \overline{R}$ ($-R \cap R = \emptyset$ ナル *classen*ヲ表ス) ナルトナ $R \cap T(\mu)$ -closed ナルトイフ。

特ニ $\mu = 0$ トスレバ, $T(0)$ -closed トハ *absolutely closed* ナルコトデアル。 R ガ $T(0)$ -closed ナルトナラバ任意ノ順序型 μ ニツイテモ $T(\mu)$ -closed ナタルガ, 逆ハ一般ニ成立シナイ。

最も標準的ナ μ ノ *category* トシテ次ノ定義ヲ假ニ定メルコトニスル。

定義3 順序型 μ ト逆ノ順序型 μ^* ヲモツ順序型ヲ $\mu^* =$ テ表ハス。 $\mu^* = \mu$ ナルトナ μ ハ *inversible* ナルトイフコトニスル。又順序型 μ ヲモツ *ordered set* I ノ任意ノ要素 $\lambda \in I$ ニ對シテ, $\lambda < \kappa$, $\kappa \in I$ ナル λ ノ集合 I_λ ガ, I ト同シノ順序ニ關シテ, 順序型 μ ヲ有スルナラバ, μ ハ *uniform* ト呼ブコトニスル (コノ定義ガ I ノ取方ニ關係シナイコトハ明カ)

例へば $0, \omega, \eta, \omega^2, \omega\eta, \eta\omega$ は uniform + 順序型であり; $0, \eta, \omega^* + \omega$ は *inversible* ではない. 0 + ラザル自然数 n は *inversible* ではないが, uniform ではない.

Hausdorff space が *absolutely closed* + ル $\times \times$ の条件を示す定理 (cf. Alexandroff Hopf, *Topologie* S. 90) の次の様 = 拡張される.

定理 2. μ は uniform + 順序型 $\mathcal{T}$, μ + ル順序型 $\mathcal{T} \in \mathcal{V}$ index / ordered set I をとる.

(a) Hausdorff space R が $\mathcal{T}(\mu)$ -closed + ラば次の条件 $(C(\mu))$ が成立する:

$(C(\mu))$: $\{G_\alpha\}$, $\alpha \in \mathcal{M}$ ($\mathcal{M}$ は或る index / 集合) が R / 任意 / open covering (G_α は R / open set) であるとするば —— 即ち $\sum_{\alpha \in \mathcal{M}} G_\alpha = R$ + ラば ——, 各 $\alpha \in \mathcal{M}$ = 對し

$$(i) \quad \iota \in I + \text{ラバ} \quad G_\alpha = U_{\alpha 0} \subset U_{\alpha \iota}$$

$$(ii) \quad \iota, \kappa \in I, \iota < \kappa + \text{ラバ} \quad \overline{U_{\alpha \iota}} \subset U_{\alpha \kappa}$$

+ ル R / open set / 任意 / system $\{U_{\alpha \iota}\}$ ($\alpha \in \mathcal{M}$, $\iota \in I$) をとるに, $\{G_\alpha\}$ / 或る有限個 / subset $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_N}$ と或る $\iota_0 \in I$ を選ミ

$$(iii) \quad \sum_{j=1}^N \overline{U_{\alpha_j \iota_0}} = R$$

+ ラれるコトが出来る.

(b) 逆 = $T(\mu^*)$ -space R が条件 $(C(\mu))$ を満足シ
 テキル + ラバ R は absolutely closed デアル (従ッテ
 勿論 $T(\mu)$ -closed デアル).

(証明) [前半(a)ノ証明] 帰謬法ニヨル. 今エシ条件
 $(C(\mu))$ が成立シ + イトスル. 然ラバ R / 或ル open
 covering $\{G_\alpha\}$ ($\alpha \in \mathcal{M}$) がアツテ, 各 α = ツキ (i), (ii)
 を満足スル 或ル open set / system $\{U_{\alpha, i}\}$ が存在シテ,
 $\mathcal{M}$ / 任意 / 有限個ノ subset $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 及ビ 任意
 $I \subseteq I = \mathbb{N}$ = 對シ

$$(1) \quad \sum_{j=1}^n \overline{U_{\alpha_j, i}} \neq R$$

ソコデ $R = \xi + \text{イノ点}$ をトリ, $\mathcal{R} = R + \xi$ + ル
 set = 次ノ様ノ topology を付スル;
 R = 属スル任意ノ点ノ近傍系ハ $\mathcal{R}$ = 於テアツタ通りトシ, ξ
 ノ決定近傍系トシテ

$$(2) \quad \mathcal{V}(\xi) = \xi + \left(R - \sum_{j=1}^n \overline{U_{\alpha_j, i}} \right), \quad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathcal{M}, \quad i \in I$$

ヲトル. R / 点 - ツイテハ明カデアルカラ, ξ = ツイテ其
 ノ近傍系 (2) が近傍系ノ公理ヲ満足シテキルコトヲ示サシ.
 ξ / 任意ノ近傍 $\mathcal{V}(\xi)$ が与ラ奪タコトハ (2) ヨリ明カ. 又

$$\xi$$
 / 任意ノ二ツノ近傍 (2) 及ビ $\mathcal{V}(\xi) = \xi + \left(R - \sum_{k=1}^m \overline{U_{\alpha_k, i}} \right)$ を

トレバ, $i_k \leq i$ カ $i \leq i_k$ デアルガ, 例ヘバ後者ヲトレ
 ば,

$$W(\xi) = \xi + \left(R - \left(\sum_{j=1}^n \overline{U}_{\alpha_j, k} + \sum_{k=1}^m \overline{U}_{\alpha_k, k} \right) \right)$$

ハ ξ ノ決定近傍系ニ属シ、且ツ (ii) ヨリ $\overline{U}_{\alpha_k, k} \subset \overline{U}_{\alpha_k, k} (k=1, \dots, m)$ デアルカラ

$$W(\xi) \subset U(\xi) \cdot V(\xi)$$

$\mathcal{R} = U(\xi)$ フ $p \in \xi$ ナル任意ノ点 p フトレバ $p \in R - \sum_{j=1}^n \overline{U}_{\alpha_j, k}$

(i) 及ビ n ガ有限ナルコトヨリ $R - \sum_{j=1}^n \overline{U}_{\alpha_j, k}$ ハ $\mathcal{R}$ ニ於ケル空

ナラザル open set デアルカラ、 $U(p) \subset R - \sum_{j=1}^n \overline{U}_{\alpha_j, k} \subset U(\xi)$

ナレ点 p ノ $\mathcal{R}$ ニ於ケル近傍 $U(p)$ ガアル。 $p \in \mathcal{R}$ ナカラ $U(p)$ ハ $\mathcal{R}$ ニ於ケル p ノ近傍デアル。

以上ニヨツテ $\mathcal{R} = R + \xi$ ガ topological space ナスコトガ分ツタカ、更ニ $\mathcal{R}$ ガ Hausdorff space デアルコトハ、 $\mathcal{R}$ ノ二点ニツイテハ明カデカラ、 $p \in \mathcal{R}$ ナル p ト q トガ相異なる ($\mathcal{R}$ ニ於ケル) 近傍ヲ有スルコトヲ云ヘバヨイ。ソレハ $p \in G_{\alpha_1}$ ナル G_{α_1} フトリ、勝手ナレ I フトレバ (i) ニヨリ $U_{\alpha_1, k}$ ハ p ノ $\mathcal{R}$ ニ於ケル近傍ニテ $\mathcal{R}$ ニ於ケル近傍デアル。ヨツテ $U(\xi) = \xi + (R - \overline{U}_{\alpha_1, k})$ フトレバ

$$U_{\alpha_1, k} \cdot U(\xi) = \emptyset$$

ξ ガ $\mathcal{R}$ ニテ $I(\mu)$ -point ナルコトヲ云ハウ。 ξ ノ任意ノ近傍 (2) フトル。 $k < l \in I$ ナル κ ノ π ordered set I_k ハ、 μ ガ uniform ナル假定ニヨリ、 π ハ I ノ順序型 μ フモツ (定義3) 而カ π カ π ナル $\pi = \pi$ ナ

$\{ \xi + (R - \sum_{j=1}^n \overline{U}_{\alpha_j, \kappa}) \} (\kappa \in I_k) \cap (ii) = \text{ヨリ } U(\xi) = \text{空}$

マレル ξ の近傍 γ system γ があり且 $\gamma \subset \gamma' + \text{ル}$

$$\text{キ (ii) より } \sum_{j=1}^n \overline{U_{\alpha_j, \kappa}} \subset \sum_{j=1}^n U_{\alpha_j, \kappa'} \text{ デアルカラ}$$

$$\begin{aligned} \xi + \left(R - \sum_{j=1}^n \overline{U_{\alpha_j, \kappa}} \right) &\supset \xi + \left(R - \sum_{j=1}^n U_{\alpha_j, \kappa'} \right) = \xi + \overline{\left(R - \sum_{j=1}^n U_{\alpha_j, \kappa'} \right)} \\ &\supset \xi + \overline{\left(R - \sum_{j=1}^n \overline{U_{\alpha_j, \kappa'}} \right)} = \xi + \overline{\left(R - \sum_{j=1}^n \overline{U_{\alpha_j, \kappa'}} \right)}^{\kappa} \end{aligned}$$

$$\left(R - \sum_{j=1}^n U_{\alpha_j, \kappa'} \right) \cap R = \emptyset \text{ closed デカラ}$$

ヨッテ 定義 1 = ヨリ $\xi \in R = \emptyset$ $T(\mu)$ -point デアル.

而モ (i) = ヨリ 任意 $U(\xi) = \text{ツキ } R \cap U(\xi) \neq \emptyset$ デカラ

$\xi \in \overline{R}^{\kappa}$. ヨッテ 定義 2 = ヨリ $R \cap T(\mu)$ -closed デアリ

コト = ナッテ 假定 = 反スル.

(注意) 明カ = $R \cap R = R + \xi$ の dense + subset デアリ, 且ツ R の点の近傍 $\cap R = \text{於テモ } R$ (relative space トシテ) = 於テモ 不変デアル. 此事ハ 後 = 用 本ル.

(後半 (b) の証明) $T(\mu^*)$ -space R が 条件 (C(μ)) を満足シテ キルトスル. R を $R \neq \emptyset$ + 任意の Hausdorff space トシ, $\xi \in R - R$ + 任意の一点 ξ トル. R は Hausdorff space デアルカラ R の任意の点 $p = \bigcap \overline{U^R(p)} \neq \emptyset$ + 且 ($R = \text{於ケル}$) 近傍 $U(p)$ が存在スル. $R \cap U(p) \cap R = \text{於ケル } p$ の近傍デアリ, R が $T(\mu^*)$ -space デアルカラ, 定義 1 = ヨリ μ + 順序型 / ordered set $I = \text{ツキ}$

$$R \cup (p) \supset \bar{U}_l(p) \ni p, \quad l \in I$$

且ツ $l, k \in I, l < k$ ナラバ $\bar{U}_l(p) \subset U_k(p)$

ナル $p \in R =$ 於ケル近傍ノ Δ system $\{U_l(p)\} (l \in I)$ が存在スル。勝手ナーツノ $\gamma \in I$ ヲトレバ, μ が uniform π アルトイフ假定カラ (定義3) $\gamma < l \in I$ ナル l / ordered set I_γ が亦順序型 μ π モツ。サテ $\{U_\gamma(p)\} (p \in R)$ ハ R / open covering π ナスカラ条件 $(C(\mu)) =$ 於テ I / 代リ $= I_\gamma$ ヲオキ代ヘレバ, 有限個ノ点 $p_1, \dots, p_N \in R$ ト $l_0 \in I_\gamma$ ナル或ル l_0 ヲ選ベバ

$$\sum_{j=1}^N \bar{U}_{l_0}(p_j) = R$$

$$\bar{U}_{l_0}(p_j) \subset R \cup (p_j) \subset U(p_j) \text{ ト } \bar{U}^R(p) \not\subset \bar{\Sigma} \text{ トヨリ}$$

$$\bar{R}^R = \overline{\sum_{j=1}^N \bar{U}_{l_0}(p_j)^R} \subset \sum_{j=1}^N \bar{U}^R(p_j) \not\subset \bar{\Sigma}$$

ヨツテ $R - R$ / 任意ノ点 $\bar{R}^R =$ 含マレナイ。即チ R ハ absolutely closed ($T(0)$ -closed) デアル (従ツテ $T(\mu)$ -closed デアル)

(証終リ)

上記定理 $=$ 於テ $\mu = 0$ トスレバ $\text{--- } G_\alpha = U_\alpha$ ト形式的 $=$ オイテ --- Hausdorff space が absolutely closed ナルタメノ必要且ツ十分条件ヲ示ス周知ノ定理トナル。

$\mu = w'$ トオケバ regular space R が其ノ上ノ任意ノ regular space $= \pi$ closed ナルタメノ必要

条件 $\wedge (C(\omega))$ デアリ, 更ニ R が $T(\omega^*)$ -space (當然 $T(\omega^* + \omega)$ -space デアル (定義 1 注意 2)) ナラバ $(C(\omega))$ ハ十分条件 デアル。

$\mu = \eta$ ナルトキハ, η ハ uniform 且ツ *invertible* ($\eta^* = \eta$) デアルカラ, 定理 1 ニヨレバ *completely regular space* R が其ノ上ノ任意ノ *completely regular space* ニテ *closed* ナルタメノ必要且十分条件 ハ $(C(\eta))$ が成立スルコトデアル。

§ 3. 一般化セラレタ *absolute closedness* ト *bicompactness* トノ関係。

定理 2 ノ条件 $(C(\mu))$ ニヨッテ一般化セラレタ *absolute closedness* ト *bicompactness* トノ間ニモ密接ノ関係ガアルコトガ分ル。即チ

定理 3. μ が 0 ナラザル uniform ナ順序型 デアル ナラバ, $T(\mu^*)$ -space R ($\mu \neq 0$ ヨリ R ハ *regular* デアル) が *bicompact* デアルタメノ必要且十分ノ条件 ハ R が $T(\mu)$ -closed ナルコトデアル。

(証明) 必要ナルコト。 定理 2 ノ条件 $(C(\mu))$ ニ示サレタ如ク, R ノ任意ノ *open covering* $\{G_\alpha\}$ ($\alpha \in M$) ト (i), (ii) ヲ満足スル任意ノ *open set* ノ *system* $\{U_\alpha\}$ $L \in I$ ヲトル。 $\{G_\alpha\}$ が R ノ *open covering* ナカラ, R ノ *bicompact* ナルコトヨリ有限個ノ $G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_N}$ ヲトヨリ R ヲ *cover* スルコトが出来る。ヨッテ勿論 $(C(\mu))$ 。

1 (iii) が成立スル。即ち $(C(\mu))$ が成立スルカラ定理 2 (b) = ヨリ R は $T(\mu)$ -closed (実ハ *absolutely closed*) デアル。 (之迄ハ $\mu \neq 0$ ナル条件ハ使ツテタイカラ $\mu = 0$ ニテモ成立スル)

十分ナルコト。 R が $T(\mu)$ -closed デアルトスル。定理 2 = ヨリ 条件 $(C(\mu))$ が成立スル。今 R / 任意 / open covering $\{G_\beta\}$, $\beta \in \mathcal{K}$, $\sum_{\beta \in \mathcal{K}} G_\beta = R$ トスル。 R / 任意 / 点 p = 對シ $p \in G_\beta$ ナル $\beta \in \mathcal{K}$ ノ一ツヲ $\beta(p)$ トスル。 $G_{\beta(p)}$ ハ open ナカラ $U(p) \subset G_{\beta(p)}$ ナル p ノ近傍 $U(p)$ ガアル。 R ハ $T(\mu^*)$ -space デアルカラ定義 1 = ヨリ

$$(1) \quad U_l(p) \ni p, \quad U(p) \supset \overline{U_l(p)}, \quad l \in I$$

(I ハ μ ナル順序型 / index set)

且ツ $l, \kappa \in I$, $l < \kappa$ ナラバ $\overline{U_l(p)} \subset U_\kappa(p)$

ナル近傍ノ system $\{U_l(p)\}$, $l \in I$ が存在スル。假定 $\mu \neq 0$ = ヨリ $\{U_l(p)\}$ ハ空デタイ。定理 2 (b) ノ証明ノ際ト同様 = $\gamma \in I$ トレバ $\gamma < l \in I$ ナル l ノ集合 I_γ ハ μ ナル順序型 / ordered set トナカラ条件 $(C(\mu))$ = テ $\{U_\gamma(p)\}$ ヲ $\{G_\alpha\}$ トオケバ、アル有限個ノ点 $p_1, \dots, p_N$, トアル $\gamma < l_0 \in I_\gamma$ ナル l_0 = ツキ

$$\sum_{j=1}^N \overline{U_{l_0}(p_j)} = R$$

ヨツテ (1) = ヨリ

$$\sum_{j=1}^N G_{\beta}(p_j) \supset \sum_{j=1}^N U(p_j) \supset \sum_{j=1}^N \overline{U}_{L_0}(p_j) = R$$

即ち有限 / subsystem $\{G_{\beta}(p_j)\}$ ($j=1, \dots, N$) は R / covering を成すから R は bicomact である。

系. μ が 0 ではない μ invertible 且つ uniform + 順序型 + ルート (定義3), $T(\mu)$ -space R が bicomact であることは必要且つ十分条件は R が $T(\mu)$ -closed であること即ち R / 上 / 任意 / $T(\mu)$ -space $\Rightarrow R$ が closed であることである。

特 = completely regular space R が bicomact であることは必要且つ十分条件は R が R / 上 / 任意 / completely regular space $\Rightarrow$ closed であることである。

(証明) $\mu \neq 0$ である uniform だから定理が適用出来、しかも $\mu^* = \mu$ であるから、後半は μ が上記条件を満たすから定理1 により。

§4. bicomact Hausdorff space の embedding について。

Lemma. Hausdorff space R / dense subset R / cardinal number $\aleph_\nu$ 未満、 R / cardinal number $\aleph_{2^{\aleph_\nu}}$ を超えない。

(証明) R / 各点 $p \in R$ / 近傍

1 system $\{U(p)\}$ が對應スル。

$R \cap \mathcal{R} = \tau$ dense デアルカラ $RU(p) \neq 0$. ヨツテ $\{RU(p)\}$ は R (relative space トシテ) = 於ケル空ト
 テアル open sets 1 system 7+レテキル. $p, q \in \mathcal{R}$,
 $p \neq q$ トスレバ, R は Hausdorff space デアルカラ
 $U_0(p) U_0(q) = 0$ 7+ル $U_0(p), U_0(q)$ ガアル. ヨツテ

$$(1) \quad RU_0(p) \cdot RU_0(q) = 0$$

任意, $U(p) = \cup U(p) U_0(p)$ 7+ p ノ近傍デアルカラ, 又ハ
 $RU(p) U_0(p) \neq 0$. ヨツテ

$$(2) \quad RU(p) \cdot RU_0(p) \neq 0$$

(1), (2) = ヨリ任意, $U(p) = \cup RU(p) \neq RU_0(q)$. ヨツ
 テ $R =$ 於ケル sets 1 system トシテ $\{RU(p)\} \neq \{RU(q)\}$.
 故ニ, $\in \{RU(p)\} = \{RU(q)\}$ 7+レバ $p = q$.

所ガ R 1 cardinal number $\aleph_\nu$ ガカラ R 1 凡テノ
 (open) subsets ヨリ 7+ル system 1 凡テノ 集合ノ
 cardinal number $\aleph_\nu$ 7+ 超エ 7+ イ. ヨツテ $\mathcal{R}$ 1
 cardinal number $\aleph_\nu$ 7+ 超エ 7+ イ。

定理4. μ ガ uniform 且ツ invertible ($\mu^* = \mu$) 7+ル 順序型デアル 7+レバ, 任意ノ $T(\mu)$ -space R
 = $\aleph_\nu$ ノニツノ 条件ヲ満足スル $T(\mu)$ -space R ガ存在
 スル:

(1°) $\mathcal{R} \supset R$, 且ツ $R \cap \mathcal{R} = \tau$ dense デアル.

(2°) $\mathcal{R}$ は $T(\mu)$ -closed デアル. (實ハ absolutely closed ト 7+ル)

若シ更 = $\mu \neq 0$ デアルナラバ此ノ R ハ *bicomact normal* デアリ, 且ツ *absolutely closed* デアル。

(証明) 帰謬法ニヨル。即チ (1^0) , (2^0) ヲ満足スル $T(\mu)$ -space R が存在シナイトスル。即チ條件(P)ヲ満足スル任意ノ $T(\mu)$ -space R ハ $T(\mu)$ -closed デナイトスル。

然ラバ勿論 R ハ (1^0) ヲ満足スル $T(\mu)$ -space ガカラ $T(\mu)$ -closed デナイ。

今 R / cardinal number ヲ $\aleph_\alpha$ トシ, $2^{2^{\aleph_\alpha}} < \aleph_\lambda$ ナル λ ノ cardinal number $\aleph_\lambda$ ヲトリ, 其ノ *Anfangszahl* ヲ ω_λ トスル。シカラバ ($R = R_0$ トオク)

$0 \leq \pi \leq \omega_\lambda$ ナル任意ノ ordinal number π = 對シテ次ノ條件ヲモツ $T(\mu)$ -space R_π が存在スル: (a) R_π ハ (1^0) ヲ満足スル。 (b) $0 \leq \rho < \pi$ ナル任意ノ ordinal number ρ = ヲキ $R_\rho \subseteq R_\pi$ デ, 而モ R_ρ = 属スル任意ノ点ノ近傍ハ R_ρ = 於テモ R_π = 於テモ不変デアアル, (c) R_π ハ $T(\mu)$ -closed デナイ。

之ヲ *transfinite induction* = ヲツテ証明シヨリ。 先ガ π が孤立数ナルトキ, 特ニ $\pi = 0$ ナルトキハ $R_0 = R$ トオケバ *trivial* = 成立スル。 $\neq 0$ ノトキ *induction* / 假定ニヨリ $\pi - 1$ = ヲキ上記 (a), (b), (c) が成立シテキル。 特ニ (c) = ヲリ $R_{\pi-1}$ ハ $T(\mu)$ -closed ナラサル $T(\mu)$ -space デアル。 ヲツテ定理 2 (b) ト $\mu^* = \mu$

=ヨリ $\mathcal{R}_{\pi-1}$ の条件 $(C(\mu))$ を満足せよ。ソコで同じく
定理 2(a) の証明 (特 = (注意)) = 示サレタ如ク $\mathcal{R}_{\pi-1}$ 外
ノ一点 ξ_π をとり $\mathcal{R}_\pi = \mathcal{R}_{\pi-1} + \xi_\pi$ とオケバ $\mathcal{R}_\pi$ が $T(\mu)$ -
space デ且ツ $\mathcal{R}_{\pi-1}$ が $\mathcal{R}_\pi$ へ dense デアリ, 且ツ
 $\mathcal{R}_{\pi-1}$ = 属スル点ノ近傍ハ $\mathcal{R}_{\pi-1} = \tau \in \mathcal{R}_\pi = \tau \in$ 不変ナ
ルヲウナ $\mathcal{R}_\pi$ が存在スル。

既ニ $\mathcal{R}_{\pi-1}$ = 属セテ キル点 p ノ任意ノ近傍ハ R ト空ナ
ラサル 共通部分ヲモツコトハ *induction* ノ假定ノ (a) =
ヨツテ 明カデアリ; 又 ξ_π ノ任意ノ近傍 $U(\xi_\pi)$ ハ $\mathcal{R}_{\pi-1}$
ト少クモ一点 p を共有スル; $\mathcal{R}_{\pi-1} \cap U(\xi_\pi)$ ハ $\mathcal{R}_{\pi-1}$ ノ点
 p ノ近傍デアルカラ、今述べタ所 = ヨリ R ト素 = ハナラナ
イ, 従テ $U(\xi_\pi) \in R$ ト素 = ナラナイ。即チ $\mathcal{R}_\pi = \tau R$ ハ dense
デアル。之ニテ π = ツキ (a) が云ヘタ。

次ニ $0 \leq p \leq \pi$ ナル任意ノ $\mathcal{R}_p$ = ツイテハ $\mathcal{R}_p < \mathcal{R}_{\pi-1}$
ニ $\mathcal{R}_\pi$ デ, 又 $\mathcal{R}_p$ = 属スル点ハ $\mathcal{R}_{\pi-1}$ = 属セテ キルカラ
induction ノ假定 ($\pi-1$ = 對スル), (b) = ヨリ, ソ
ノ点ノ $\mathcal{R}_p$ = 於ケル近傍ハ $\mathcal{R}_{\pi-1}$ = 於ケルモノト, 従ツテ
変上記 $\mathcal{R}_\pi$ ノ構成 = ヨリ $\mathcal{R}_\pi$ = 於ケルノト同一デアアル。更
ニ帰謬法ノ假定 = ヨリ —— 且ツ $\mathcal{R}_\pi$ ハ (I^0) を満足スル
 $T(\mu)$ -space デアルコトガワカッタカラ —— $\mathcal{R}_\pi \in$ 亦
 $T(\mu)$ -closed デナイ。

次ニ π が極限数デアルトスル。シカルトキ $\mathcal{R}_\pi = \sum_{0 \leq p < \pi} \mathcal{R}_p$
 $\mathcal{R}_p$ トオキ, ソノ *topology* トシテ, 任意ノ $p \in \mathcal{R}_\pi$ =
ツキ $p \in \mathcal{R}_p$ ナル最小ノ p (ordinal number, 性質

$\Rightarrow$ ヨリ, κ シカ = 存在スル) $\Rightarrow$ トリ $\mathcal{R}_p =$ 於ケル p , 近傍
 $\Rightarrow$ テ $\mathcal{R}_\pi =$ 於ケル p , 近傍トスル induction / 假定 =
 $\Rightarrow$ リ $\mathcal{R}_p$ ハ $T(\mu)$ -space ナカラ $p \in \mathcal{R}_p$ 従ッテ $\mathcal{R}_\pi =$ 於
 $\Rightarrow$ テ $T(\mu)$ point デアル. p ハ任意デアッタカラ $\mathcal{R}_\pi$ ハ
 $T(\mu)$ -space デアル. $\mathcal{R}_\pi$ ナ $(a), (b)$ $\Rightarrow$ 満足スルコト
 $\Rightarrow$ 容易ニ証明サレル. 例ヘバ $0 \leq p < \pi$ トスレバ π ハ極限
 $\Rightarrow$ ナカラ $p < p' < \pi$ ナル p' ガアル. $p' =$ ヱイテハ (b) ガ云
 $\Rightarrow$ ヘテキルカラ $\mathcal{R}_p \subseteq \mathcal{R}_{p'} \subset \mathcal{R}_\pi$. (c) ハ (a) ト帰謬法 / 假
 $\Rightarrow$ 定カラ 明カデアル. 以上ニテ transfinite induction
 $\Rightarrow$ ハ完成シタ.

$\Rightarrow$ ヱテ特 = $\omega = \omega_\lambda$ トスレバ $\mathcal{R}_{\omega_\lambda}$ / cardinal
 $\Rightarrow$ number ハ $(b) = \Rightarrow$ リ $\geq \aleph_\lambda > 2^{2^{\aleph_\lambda}}$. 所ガ (a) ト
 $\Rightarrow$ lemma = $\Rightarrow$ リ夫ハ $\leq 2^{2^{\aleph_\lambda}}$ デナケレバナラス. 之レハ矛盾
 $\Rightarrow$ デアル.

$\Rightarrow$ ヱテ定理ニ示サレタ $\mathcal{R}$ / 存在ガ証明出来タ. 更ニ $\mu \neq 0$
 $\Rightarrow$ ナルトキハ定理3ノ系ニヨリ, $\mathcal{R}$ ハ bicomact デ
 $\Rightarrow$ アリ, 且ツ regular space デアルカラ normal デ
 $\Rightarrow$ アル, $\times$ absolutely closed デアル.

$\left(\begin{array}{l} \mu = 0 \text{ ナラバ } T(0)\text{-closed トハ absolutely} \\ \text{closed デアルカラ 実ハ } \mathcal{R} \text{ ハ 常ニ absolutely} \\ \text{closed デアル} \end{array} \right)$

特 = $\mu = 0$ トオクト定理ノ前半ニヨリ

系1. 任意ノ Hausdorff space $R = \wedge$, R $\Rightarrow$
 dense + subspace トスル absolutely closed +

Hausdorff space R が存在スル。

系2. 任意, completely regular space R
 $= \bar{A}$, R は dense + subspace トスル absolutely
closed 且 bicomact + normal space R が
存在スル。

(証明) η は uniform inversible $\neq 0$ デ
アルオラ。

(注意) 定理4前半 = 於ケル R デ, $\bar{A} =$ homeomor-
phic デナ イニツノ R_1 ト R_2 トが存在スル トスレバ, R
ヲ固定スル ヌウ = 一オテ 地方 = embed スルコトハ出来
ナイ。

何トナレバ, 例ヘバ $R \subset R_1 \subset R_2$ ト出来ルモノトスレ
バ $R_2 =$ 閉スル closure (bar = ア表ハス) = ツイテ
 $\bar{R} \subset \bar{R}_1 \subset R_2$. (1°) = ヨリ R ハ R_2 デ dense デアルカラ
 $\bar{R} = R_2$. 故ニ $\bar{R}_1 = R_2$. 所ガ R_1 ハ $T(\mu)$ -closed デアルカ
ラ $\bar{R}_1 = R_1$. ヨツテ $R_1 = R_2$ トナルカラ。

系2, 簡單ナル Example

2次元, Euclid space = 於テ $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
ナル 閉正方形 ヲトリ R トスル。 $y > 0$ ナル R ノ 点ノ 近傍ト
シテハ, $\forall$ ノ 点ヲ 中心トシテ x 軸ト交ハラナイ open sphere
ヲトリ, x 軸上ニアル R ノ 点ノ 近傍トシテ, $\forall$ ノ 点ニテ x
軸ニ切レ $y \geq 0$ ナル 半平面上ニアル open sphere = 其
ノ 点ヲ 附加シタモ (勿論 イツレモ R トノ Durchschnitt

ヲトル) ヲトル。

カニル R が *regular topological space* ナラバ
テモ *normal* ナリトハヨク知ラレテキル (cf. AH.
§31, §60. 証明ハ功力, 抽象空間論 pp. 86-7). 更ニ R
が *completely regular* ナルコトハ定理1カラ容易
ニ知ラレル。併シ *normal* ナリカラ勿論 *bicompact*
ナリ。ヨツテ $T(\eta)$ -closed ナリ (定理3系) ソコ
ヲ上記系2ノ條件ヲ満足スル *bicompact normal space*
 R ノ一ツヲ構成シテミヨウ。

R 外ノ一氣ヲトリ $R = R + \xi$ トシ, R ノ各点ノ近傍
ハ元ノ通りトシ, ξ ノ決定近傍系 $\{U(\xi)\}$ ヲ次ノヤウニト
ル。 R ノ x 軸上ノ点ノ集合ヲ F トシ, F ノ下ノ任意ノ有限
集合ヲ M トシ

$$(1) \quad U(\xi) = \xi + \sum_{p \in F-M} U(p)$$

ヲ以テ ξ ノ近傍トスル。ユノ R が *topological space*
ヲナスコトハ容易ニ合ル。更ニ Hausdorff space ナル
コトハ, R ノ二点 p, q ニツイテハ明カラアルカラ, R
ノ一氣 p ト ξ トニツイテ云ハウ。 $p \in R - F$ ナルトキハ R
が *regular* ナカラ $U(p) \cdot \sum_{q \in F} U(q) = 0$ ナル $U(p), U(q)$
($q \in F$) が存在スル ($F \cap R$ ニテ *closed* ナカラ) ヲツテ
(1) ニテ $M = 0$ トスレバ $U(p) \cdot U(\xi) = 0$. 又 $p \in F$ ナ
ルトスレバ $F - p$ ハ p ト相素ナル R - 於ケル *closed set*
ヲナスカラ R ノ *regular* ナルコトカラ $U(p) \sum_{q \in F-p} U(q) = 0$

$\forall U(p), U(q) (q \in F - p)$ が $\forall$ である。ヨッテ (1) $=$ $M - \{p\}$
 トスレバ $U(p)U(\xi) = 0$.

更 $= \mathcal{R}$ は *bicompact* である。 $\mathcal{R}$ / 任意 / *open covering* $\{G_\alpha\} (\alpha \in \mathcal{M})$ をトスル。 $\xi \in G_{\alpha_0}$ とル G_{α_0} を
 トスレバ, $\forall U(\xi) \subset G_{\alpha_0}$. コノ $U(\xi)$ が (1) であるトス
 ル。 $M = \{p_1, \dots, p_m\}$ トスレバ $p_i \in G_{\alpha_i} \quad i = 1, \dots, m$
 とル G_{α_i} をトスル。サテ $\mathcal{R} - (G_{\alpha_0} + G_{\alpha_1} + \dots + G_{\alpha_m}) \cap R =$
 於ケル $(\xi + F)$ を含マザル *closed set* であるカヲ, R
 / *topology* = ヨリ, 実ハ *Euclid space* / 有界閉集
 合 $=$ 外 $+ \exists + 1$ (*homeomorphic*). ヨッテ *bicompact*
 であるカヲ $\{G_\alpha\}$ / 有限個 $G_{\alpha_{m+1}}, \dots, G_{\alpha_{m+n}} = \exists$ ヨ
 ヲテ *cover* される。然ッテ $\mathcal{R} \cap G_{\alpha_0}, G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_{m+1}},$
 $\dots, G_{\alpha_{m+n}}$ とル有限個 / $G_\alpha = \exists$ ヨッテ *cover* される。
 即チ $\mathcal{R}$ は *bicompact* である。明カ $= R \cap \mathcal{R} = \tau$ *dense*
 であるリ, 定理系 $=$ ヨリ $\mathcal{R}$ は *absolutely closed* である。
 即チ コノ $\mathcal{R}$ は 定理系 2 / $\mathcal{R}$ / である。

$\mathcal{R}$ は *bicompact Hausdorff space* であるカヲ
normal であるカ, $\forall$ / *subspace* R は *normal* である
 $+ 1$. 故 $=$ コノ $\mathcal{R}$ は *completely normal* である
bicompact normal space / *example* を
 示シテキル。

Tychonoff は *completely regular space*
 $R =$ 對シ, $\beta(R)$ とル *space* が上記系 2 / 条件 / 外 $=$,
 $R =$ 於ケル 任意 / 連続函数が 変域 $\beta(R) =$ 連続的 $=$ 拡大

出来ルヤウナ $\beta(R)$ の存在ト共 $\text{essentially} = \text{unique}$ ナルコトヲ証明シタ (R ノ上ノ連続函数ノナス空間ヲ用キテ、cf. Čech, On Bicomact space, Ann. of Math. 38, 1937) 所デ上ニ作ツタ $\beta(R)$ ト homeomorphic デナイ。何トナレバ R = 於ケル連続函数例ヘバ $f(p) = x$ (但シ $x \in R$ ノ点 p ノ座標) ハ、 ξ = 於ケル f ノ値ヲ如何ニ與ヘルモ、 $R = R + \xi$ = テ連続トハナリ得ナイカラデアアル。此ノコトカラ系2ノ條件ノミデハ R が $\text{essentially} = \text{unique}$ = 決ラナイコトヲ示シテキレ。

§5. 再ビ regularity = ツイテ。

§1 = 於テ順序型 μ = ヨツテ概念的 = regularity ノ條件ヲ強メテ制限ヲナシ、其ノ上デ前§迄ノ性質ヲ調べタ。併シニツノ相異ル順序型 μ, ν = ツイテ $\Gamma(\mu)$ ト $\Gamma(\nu)$ トが同値デアアル場合ガ少クナイコトハ今迄デモ明カデアアル。

先ヅニツノ順序型 μ, ν = ツイテ、 μ ナル順序型ヲモツ $\text{ordered set } I$ ノ或ル $\text{subset } I_1$ ガ I ト同ジ order = ツイテ ν ナル順序型ヲモツトキ、 $\nu \leq \mu$ ト書ク。(cf. Kamke, Mengenlehre, §. 69) 之レハ μ, ν ガ特ニ ordinal number ナルトキト調和スル。勿論一般ニハニツノ μ, ν ノ間ニ $\leq$ ナル關係ガ必ズ成立スルコトハ限ラナイ。

然ルトキ定義1オラ明カニ, $\nu \leq \mu$ ナラバ $T(\mu)$ -space ハ同時ニ $T(\nu)$ -space デアル。

例ヘバ $T(\mu)$ -space ハ必ズ $T(0)$ -space 即チ Hausdorff space デアリ, $T(\omega)$ -space ハ $T(1)$ -space (regular space) デアリ, $T(\omega^* + \omega)$ -space ハ $T(\omega^*)$ -space デアル。且ツ兩者トモ逆が成立スルコトハ定義1ノ注意2ノ示ス所デアル。

“定理 $\mu = \aleph_0$ レバ μ ガ uniform 且 inversible ナ順序型デ且ツ $\mu \neq 0$ ナラバ $T(\mu)$ -space R ハ bi-compact normal ナ space R -embed スルコトが出来ル。従ツテ R ハ completely regular space 即チ $T(\aleph_0)$ -space デナレバナラヌ。”

事實 $\aleph_0 \leq \mu$ デアル。何トナレバ, $\aleph_0 \leq \mu$ ナル順序型ヲモツ ordered set I ガ最後ノ要素ヲモツナラバ, ソノ要素ヨリ後ニアル要素ノ順序型ハ0デアツテ, μ ガ uniform ナルコトヨリ $\mu = 0$ トナリ, $\mu \neq 0$ ニスル。ヨツテ I ハ最後ノ要素ヲモタナシ。 μ ハ inversible デアルカラ I ハ亦最初ノ要素ヲモタナシ。故ニ μ ノ cardinal number $|\mu| \geq \aleph_0$ 。ソコデ $\iota_0 \in I$, $\kappa_0 \in I$, $\iota_0 < \kappa_0$ ナル任意ノ ι_0, κ_0 フトル。モシ $\iota_0 < \iota < \kappa_0$ ナル $\iota \in I$ ガ存在シナイトスル。然ラバ再ビ μ ノ uniform ナルコトヨリ $\iota_0 < \iota \in I$ ナル ι ノ集合 I_ι ハ μ ナル順序型ヲモツカラ最初ノ要素ヲ有シナシ。シカルニ明カニ I_ι ハ κ_0 ノ最初ノ要素トスルカラ矛盾デアル。ヨツテ I ハ稠密

である。故に $\eta \subseteq \mu$ である。

特 $= |\mu| = \aleph_0$ 。トスレバ Cantor の定理ニヨリ $\mu = \eta$ である。換言スレバ

「凡テノ有理数ノナキ (通常, $\text{order} = \aleph_0$) ordered set ノ順序型 η ハ次ノ三ツノ條件ニヨツテ Characterize サレル」

1. uniform である。 (定義3)
2. *invertible* である (即ち $\eta^* = \eta$)
3. $|\eta| = \aleph_0$. //

結局。§4マデノ結果ハ定理4系1ヲ除ク外ノ殆ンド凡テ *completely regular space* = 開スル性質デアッタノである。唯, *completely regular space* R = ツイテ定理4, 系2ノ如キコトガ成立スル原因カ——系1ヲモ考ヘ併セテ—— η ガ *uniform* 且 *invertible* ナルコトニアル様ニ思ハレル。