



Title	指数関数 及ビ 一次関数ニツキテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 224, p. 484-491
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74899
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

969 指數函數及一次函數ニツキテ

春 本 博(神戸高等商船)

§1. 普通 函數論ニ於テ指數函數 e^z ハ巾級數 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} =$

ニヨツテ定義サレル。

又、原点ノ近傍ニ於テ正則ナル函数 $f(z)$ が微分方程式 $\frac{df(z)}{dz} = f(z)$ を満足シ、初期條件 $f(0) = 1$ を有スルヲラバ $f(z) \equiv e^z$ ニカギル。更ニ原点ノ近傍ニ於テ常數ヲザル正則函数 $f(z)$ が函数方程式 $f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2)$ を満足シ、初期條件 $f(0) = 1$ を有スルヲラバ $f(z) \equiv e^z$ ニカギル。

次ニ幾何學的ニ方法ニヨリ指数函数 e^z を特徴付ケテ見ヨウ。先ツ定義ヨリ始トル。

(定義) 領域 D デ正則ナル函数 (定義カケトラバ、正則ナラズトモ差シ支ヘナイガ、コノデハ應用上、正則ナリトスル) を $f(z)$ トスルトキ ($z = x + iy$)、 D ノ各点 z ニ對應シテ、三次元空間ノ点 $(x, y, |f(z)|^2)$ ノスベテノ集合ヲ D ニ於テノ $f(z)$ ニヨル *Betragfläche* ト云フ。(G. Pölya und G. Szegő, *aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I.* 110 P.)
シカラバ定理ハ次ノ如キ形ニ述ベラレル。

(定理) 原点ノ近傍 U ニ於テ一價正則ナル函数 $f(z)$ が恒等的ニ e^z ニ等シキタノ必要且ツ充分條件ハ $f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$ ニシテ、 U ニ於ケル $f(z)$ ニヨル *Betragfläche* ノ各点ガ拋物点トナルコトデアル。

(証明) 先ツ *Betragfläche* 上ノ任意ノ点 $(x, y, |f(z)|^2)$ ニ於ケルガウスノ曲率 K が

$$K = \frac{4(|f'(z)|^4 - |f(z)|^2 |f''(z)|^2)}{(1 + 4|f(z)|^2 |f'(z)|^2)^2}$$

デアラハサレルコトヲ証明シヨウ。

Betragsfläche ハ三次元空間 (ξ, η, ζ) ニ於テ x, y ヲ媒介変数トスレバ

$$(A) \quad \begin{cases} \xi = x \\ \eta = y \\ \zeta = u^2(x, y) + v^2(x, y) \end{cases}$$

ニテ表サレル。但シ $Z = x + iy, f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ トスル。

シカラバ微分幾何學ニ於ケル曲面ノ第一種ノ基礎量ヲ E, F, G トスレバ

$$E = \xi_x^2 + \eta_x^2 + \zeta_x^2$$

$$F = \xi_x \xi_y + \eta_x \eta_y + \zeta_x \zeta_y$$

$$G = \xi_y^2 + \eta_y^2 + \zeta_y^2$$

E, F, G ヲ (A)ニル關係ヲ使ツテ計算スレバ

$$(B) \quad \begin{cases} E = 1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 \\ F = \frac{\partial \zeta}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ G = 1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2 \end{cases}$$

次ニ、第二種ノ基礎量ヲ D, D', D'' トスレバ

$$D' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \xi_{xx} & \xi_x & \xi_y \\ \eta_{xx} & \eta_x & \eta_y \\ \zeta_{xx} & \zeta_x & \zeta_y \end{vmatrix}$$

$$D' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \xi_{xy} & \xi_x & \xi_y \\ \eta_{xy} & \eta_x & \eta_y \\ \zeta_{xy} & \zeta_x & \zeta_y \end{vmatrix}$$

$$D'' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \begin{vmatrix} \xi_{yy} & \xi_x & \xi_y \\ \eta_{yy} & \eta_x & \eta_y \\ \zeta_{yy} & \zeta_x & \zeta_y \end{vmatrix}$$

D, D', D'' を (A) との関係ヲ使ッテ計算スルハ

$$(C) \begin{cases} D = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \\ D' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \partial y} \\ D'' = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \end{cases}$$

シカレテ点 (ξ, η, ζ) = 於ケル主曲率半径ヲ R_1, R_2 ト

シ、ガウスノ曲率ヲ K トスルハ $K = \frac{1}{R_1 R_2}$ デアル。

コトニ、 R_1, R_2 ハ次ノ R = 関スル二次方程式ノ二根
デアル。

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{R} E - D & \frac{1}{R} F - D' \\ \frac{1}{R} F - D' & \frac{1}{R} G - D'' \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{故} = K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{D D'' - D'^2}{E G - F^2} \dots\dots\dots (1)$$

(1) = 3) K の計算より

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 2 \left[u_x^2 + v_x^2 + u u_{xx} + v v_{xx} \right] \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 2 \left[u_x u_y + v_x v_y + u u_{xy} + v v_{xy} \right]$$

$f(z)$ は正則函数ナル故 Cauchy-Riemann の関係式 = 3)

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

$$\text{故} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} = 2 \left[-u v_{xx} + v u_{xx} \right] \dots\dots\dots (3)$$

同様 = 2) , Cauchy-Riemann の関係式を用キテ

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = 2 \left[u_x^2 + v_x^2 - u u_{xx} - v v_{xx} \right] \dots\dots\dots (4)$$

(2), (3), (4) より (C) = 3)

$$\begin{aligned} D D'' - D'^2 &= 4 \left\{ (u_x^2 + v_x^2)^2 - (u^2 + v^2)(u_{xx}^2 + v_{xx}^2) \right\} \\ &= 4 \left\{ |f'(z)|^4 - |f(z)|^2 |f''(z)|^2 \right\} \\ &\dots\dots\dots (5) \end{aligned}$$

$$\text{同様} = \text{シテ } (EG - F^2)^2 = (1 + 4|f(z)|^2|f'(z)|^2)^2$$

(案ハコノ部分ノ計算ノミハ問題ノ本質ニハ必要
ナシ) ----- (6)

(5), (6)ヲ (1)ニ代入スレバ

$$K = \frac{4\{|f'(z)|^4 - |f(z)|^2|f''(z)|^2\}}{(1 + 4|f(z)|^2|f'(z)|^2)^2}$$

サテ以上ヲ準備トシテ先ヅ 必要條件ノ方ヲ 証明シヨウ。

$f(z) = e^z$ ナラバ、勿論

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 1$$

又 $f(z) = f'(z) = f''(z)$ ナル故

$$K = 0$$

故ニ $\nabla = 0$ ナル $f(z) = e^z$ ノ *Betragfläche*、スベ
テノ 点ハ 拋物点デアール。

又ニ 充分ナルコトヲ 証明シヨウ。

$K = 0$ ナラバ

$$|f'(z)|^2 = |f(z)||f''(z)|$$

$f(0) = f''(0) = 1$ ナル故、原点ノ 適當ニ近傍デハ

$$|f(z)||f''(z)| \neq 0$$

故ニ、原点ノ 適當ニ近傍デハ

$$\left| \frac{f'(z)^2}{f(z)f''(z)} \right| = 1$$

故ニ、正則函数ノ 性質ニヨリ 原点ノ 適當ニ近傍デハ θ ノ 實
係数ト スルトキ

$$\frac{f'^2(z)}{f(z)f''(z)} = e^{i\theta}$$

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 1 \text{ なる故}$$

$$e^{i\theta} = 1$$

$$\text{即ち} \quad \frac{f'^2(z)}{f(z)f''(z)} =$$

コノ二階常微分方程式ヲ $f(0) = f'(0) = 1$ なる初期条件ノ
下ニトケバ

$$f(z) = e^z$$

§2. 函数論ニ於テ一次函数

$$\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$$

ハ重大ナル役割ヲ 演ズルガ、ソノ一ツノ理由トシテ「正則函数 $f(z)$ ガ一次函数トナルタメノ必要且ツ充分ナル条件ハ z 平面上ノ一ツノ円ノ内部ヲ w 平面上ノ一ツノ円ノ内部ニ一対一ニ且ツ等角ニ對應セシムルコトデアル」ト云フ定理ニアルト云ヘヨウ。

今 卵形線ノ初等的定理ヲ使用シテ一次函数ヲ特徴付けテ見ヨウ。

ソノ定理トハ

卵形線ノ周囲 L ト面積 F トノ間ニ $L^2 \geq 4\pi F$ ナル不等式ガ成リ立ち、等号ガ成立スルノハ円ノ時ニ限ル。

デアル。

シカラバ定理ハ次ノ如ク述べラレル。

(定理) $|z| < R$ デ正則ナル函数 $f(z)$ が恒等的ニ、
一次函数ニ等シキタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ $|z| < R$
ニテ $R \left\{ z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \neq -1$ ニシテ且ツ任意ノ γ ニ對シ

$$\left(\int_{|z|=r} |f'(z)| dz \right)^2 = 4\pi \iint_{|z| \leq r} |f'(z)|^2 dz$$

ガ成リ立ツコトデアル。

(証明) 必要ナルコトハ明カデアル。

充分ナルコトヲ証明スル。 $R \left\{ z \frac{f''(z)}{f'(z)} \right\} \neq -1$ ナル故

$|z| = \gamma < R$ ノ $f(z)$ ニヨル寫像曲線ハ卵形線デアル。即
チ $f(z)$ ニヨル寫像ハ凸型寫像デアルカラ $|z| < R$ ニテ
單葉デアル。シカモ寫像曲線ノ周囲、面積ハ夫々

$$\int_{|z|=\gamma} |f'(z)| dz, \quad \iint_{|z| \leq \gamma} |f'(z)|^2 dz$$

デ與ヘラレルカラ、上記ノ Lemma ニヨリ寫像曲線ハ円
トナル。

故ニ $f(z)$ ハ一次函数デアル。

— (完) —