OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	單葉函數ニツキテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 224, p. 494-498
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74901
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

971 單葉函數ニツキテ

春木　博（神戸高等商船）

（定理1）　$f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ が $|z|<1$ デ正則デ且ツ $a|z|\leqq|f(z)|\leqq b$（勿論 $0<a\leqq b$ トリトスル）ナラバ $f(z)$ ハ $|z|<Max\left(\frac{a}{b},\ b-\sqrt{b^2-1}\right)$ ニテ星型單葉デアル。

（証明）　$\varphi(z)=\frac{f(z)}{z}$ トオケバ Schwarz ノ Lemma ニヨリ

$$|\varphi(z)|\leqq b$$

有界函數ノ性質ニヨリ

$$|\varphi'(z)|\leqq\frac{b^2-|\varphi(z)|^2}{b(1-|z|^2)}$$

$a|z|\leqq|f(z)|$ ナル故　$|\varphi(z)|\geqq a$

故ニ　$$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|\leqq\frac{(b^2-a^2)|z|}{ab(1-|z|^2)}$$

$|z|<\frac{a}{b}$ ナラバ上式ノ右辺ハ1ヨリ小ナル故

$|z|<\frac{a}{b}$ ナルZニ對シ　$\left|z\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right|<1$

即チ　$$\left|z\frac{f'(z)}{f(z)}-1\right|<1$$

故ニ $|z|<\frac{a}{b}$ ナルZニ對シ $R\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\}>0$

故ニ $f(z)$ ハ $|z|<\frac{a}{b}$ ニ於テ星型單葉トナル。Dieudonné

ノ定理トアハセテ上ノ定理ヲ得ル。

(例) $f(z)=z+\frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{z^n}{2^{n-2}}=\frac{z(8-3z)}{4(2-z)}$

$$|f(z)|\leqq 1+\frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n-2}}=\frac{5}{4}$$ ナル故 $b=\frac{5}{4}$

一方 $|f(z)|\geqq|z|-\frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{|z|^n}{2^{n-2}}\geqq\frac{3}{4}|z|$ ナル故 $a=\frac{3}{4}$

故ニ $\frac{a}{b}=\frac{3}{5}$, $b-\sqrt{b^2-1}=\frac{1}{2}$

即チ $f(z)$ ハ $|z|<\frac{3}{5}$ デタシカニ星型単葉ナルコトガ判ル。

(定理2) $f(z)=a_0+a_1z+\cdots\cdots+a_nz^n+\cdots\cdots$

ハ $|z|\leqq\rho(>1)$ デ正則デ

$\underset{|z|=\rho}{Max}\left|f(z)-\sum_{k=0}^{n}a_kz^k\right|=M$, $K=\underset{2\leqq k\leqq n}{Max}|a_k|$ トスルトキ

モシモ $|a_1|>\frac{(n-1)(n+2)}{2}K+\frac{\rho}{(\rho-1)^2}M$ ナラシムル n ガ

存在スレバ $f(z)$ ハ $|z|\leqq 1$ デ単葉デアル。

(証明) a,b ヲ $|a|\leqq 1$, $|b|\leqq 1$, $a\neq b$ ナル任意ノ

複素数トスレバ Cauchy ノ積分表示ニヨリ

$p(z)=\sum_{k=0}^{n}a_kz^k$ トオクトキ

$$f(b)-p(b)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)-p(z)}{z-b}dz$$

$$f(a)-p(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)-p(z)}{z-a}\,dz$$

辺々相減ズルコトニヨリ

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{p(b)-p(a)}{b-a}+\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)-p(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz$$

故ニ $$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\geqq\left|\frac{p(b)-p(a)}{b-a}\right|-\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)-p(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz\right|$$

然ルニ $$\frac{p(b)-p(a)}{b-a}=a_1+a_2(b+a)+a_3(b^2+ba+a^2)$$
$$+\cdots\cdots+a_n(b^{n-1}+b^{n-1}a+\cdots\cdots+a^{n-1})$$

ナル故 $|a|\leqq 1$, $|b|\leqq 1$ ニ注意シテ

$$\left|\frac{p(b)-p(a)}{b-a}\right|\geqq|a_1|-|a_2||b+a|-|a_3||b^2+ba+a^2|$$
$$-\cdots\cdots-|a_n||b^{n-1}+\cdots\cdots+a^{n-1}|$$
$$\geqq|a_1|-K(2+3+\cdots\cdots+n)$$
$$=|a_1|-\frac{(n-1)(n+2)}{2}K$$

又 $$\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z|=\rho}\frac{f(z)-p(z)}{(z-a)(z-b)}\,dz\right|\leqq\frac{\rho}{(\rho-1)^2}M$$

ナル故

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|\geqq|a_1|-\frac{(n-1)(n+2)}{2}K-\frac{\rho}{(\rho-1)^2}M>0$$

a, b ハ任意デアッタカラ $f(z)$ ハ $|z|\leqq 1$ デ単葉デアル。

(定理3) 実係数ヲ有スル多項式 $f(z)=z+a_2z^2+\cdots$

$\cdots\cdots + a_n z^n$ ハ $|z|<\rho$ デ単葉デアル。茲ニ ρ ハ $n-1$ 次ノ代数方程式

$$nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\cdots\cdots+3x^2+2x-\frac{1}{K}=0$$

ノ正根ナリトスル。〔$K=\underset{2\leqq k\leqq n}{Max}|a_k|$〕

(証明) $f'(z)=1+2a_2z+3a_3z^2+\cdots\cdots+na_nz^{n-1}$

$z=r\cos\theta$ トスレバ

$$R\{f'(z)\}=1+2a_2r\cos\theta+3a_3r^2\cos 2\theta+\cdots\cdots+na_nr^{n-1}\cos(n-1)\theta$$

故ニ $|R\{f'(z)\}|\geqq 1-K(2r+3r^2+\cdots\cdots+nr^{n-1})$

右辺ヲ0トオイタ代数方程式ハメダーツノ正根 ρ ヲ有スル故 $r<\rho$ ナラバ

$$|R\{f'(z)\}|>0$$

故ニ能代氏ノ定理ニヨリ凸状領域 $|z|<\rho$ ニテ $f(z)$ ハ単葉トナル。

(定理4) $f(z)=z+a_2z^2+\cdots\cdots$ ガ $|z|<1$ デ単葉ニシテ $|f(z)|<M$ ナラバ $|2+a_2M|\leqq 2M$

(証明) $g(z)=\dfrac{f(z)}{\{f(z)-M\}^2}$ ハ容易ナル計算ニヨリ $|z|<1$ デ正則単葉ナルコトガ判ル。$g(z)$ ヲ展開スレバ

$$g(z)=\frac{1}{M^2}z+\frac{2+a_2M}{M^3}z^2+\cdots\cdots$$

Bieberbach ノ評価ニヨリ

$$\left|\frac{2+a_2M}{M}\right|\leqq 2$$

即チ　$|2+a_2M| \leqq 2M$

(注)　$g(z)=\frac{1}{f(z)-M}$ トシテ．上述ノ論法ヲ用フレバ

$|1+a_2M| \leqq 2M$

ヲ得ル．又 $|a_2M| \leqq 2M$ ナル故、a_2M ハ三ツノ等円 $|z+2| \leqq 2M$，$|z+1| \leqq 2M$，$|z| \leqq 2M$ ノ共通開領域 D ノ中ニアル。然ッテ a_2 ハ D ヲ、原点ヲ相似ノ中心トシテ $\frac{1}{M}$ ナル相似比デモツ開領域 D^* ノ中ニアルコトガ判ル。

—— (完) ——