



Title	單葉函數ニツキテ
Author(s)	春木, 博
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 224, p. 494-498
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74901
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

971 單葉函數ニツキテ

春 永 博 (神戸高等商船)

(定理1) $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ が $|z| < 1$ で正則
 則テ且ツ $a|z| \leq |f(z)| \leq b$ (當然 $0 < a \leq b$ ナリトスル)
 ナラバ $f(z)$ ハ $|z| < \text{Max} \left(\frac{a}{b}, b - \sqrt{b^2 - 1} \right) = \tau$ 星型單
 葉デアアル。

(証明) $\varphi(z) = \frac{f(z)}{z}$ トオケバ Schwarz, Lemma
 ニヨリ

$$|\varphi(z)| \leq b$$

有界函數ノ性質ニヨリ

$$|\varphi'(z)| \leq \frac{b^2 - |\varphi(z)|^2}{b(1 - |z|^2)}$$

$$a|z| \leq |f(z)| \text{ ナル故 } |\varphi(z)| \geq a$$

$$\text{故ニ } \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| \leq \frac{(b^2 - a^2)|z|}{ab(1 - |z|^2)}$$

$|z| < \frac{a}{b}$ ナラバ上式ノ右辺ハ1ヨリ小ナル故

$$|z| < \frac{a}{b} \text{ ナル } z = \text{點シ } \left| z \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right| < 1$$

$$\text{即チ } \left| z \frac{f'(z)}{f(z)} - 1 \right| < 1$$

$$\text{故ニ } |z| < \frac{a}{b} \text{ ナル } z = \text{點シ } R \left\{ z \frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

故ニ $f(z)$ ハ $|z| < \frac{a}{b}$ ニ於テ星型單葉トナル。d'Alondonné

1 定理トアハセテ上ノ定理ヲ得ル。

$$(例) \quad f(z) = z + \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n-2}} = \frac{z(8-3z)}{4(2-z)}$$

$$|f(z)| \leq 1 + \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2^{n-2}} = \frac{5}{4} \quad \text{ナル故} \quad b = \frac{5}{4}$$

$$\text{一方} \quad |f(z)| \geq |z| - \frac{1}{8} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|z|^n}{2^{n-2}} \geq \frac{3}{4} |z| \quad \text{ナル故} \quad a = \frac{3}{4}$$

$$\text{故} = \quad \frac{a}{b} = \frac{3}{5}, \quad b - \sqrt{b^2 - 1} = \frac{1}{2}$$

即チ $f(z)$ ハ $|z| < \frac{3}{5}$ デタシカニ星型單葉ナルコトが判ル。

$$(定理2) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

ハ $|z| \leq \rho (> 1)$ デ正則デ

$$\max_{|z|=\rho} \left| f(z) - \sum_{k=0}^n a_k z^k \right| = M, \quad K = \max_{2 \leq k \leq n} |a_k| \quad \text{トスルトキ}$$

$$\text{モシモ} \quad |a_1| > \frac{(n-1)(n+2)}{2} K + \frac{\rho}{(\rho-1)^2} M \quad \text{ナラシムル} n \text{ が}$$

存在スレバ $f(z)$ ハ $|z| \leq 1$ デ單葉デアアル。

(証明) a, b ヲ $|a| \leq 1, |b| \leq 1, a \neq b$ ナル任意ノ
複素數トスレバ Cauchyノ積分表示ニヨリ

$$p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k \quad \text{トオクトキ}$$

$$f(b) - p(b) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{f(z) - p(z)}{z-b} dz$$

$$f(a) - p(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=p} \frac{f(z) - p(z)}{z-a} dz$$

辺々相減スルコト = ヱリ

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = \frac{p(b) - p(a)}{b-a} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=p} \frac{f(z) - p(z)}{(z-a)(z-b)} dz$$

$$\text{故} = \left| \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right| \geq \left| \frac{p(b) - p(a)}{b-a} \right| - \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=p} \frac{f(z) - p(z)}{(z-a)(z-b)} dz \right|$$

$$\text{然ル} = \frac{p(b) - p(a)}{b-a} = a_1 + a_2(b+a) + a_3(b^2+ba+a^2) + \dots + a_n(b^{n-1} + b^{n-1}a + \dots + a^{n-1})$$

ナル故 $|a| \leq 1, |b| \leq 1$ = 注意シテ

$$\begin{aligned} \left| \frac{p(b) - p(a)}{b-a} \right| &\geq |a_1| - |a_2||b+a| - |a_3||b^2+ba+a^2| \\ &\quad - \dots - |a_n||b^{n-1} + \dots + a^{n-1}| \\ &\geq |a_1| - K(2+3+\dots+n) \\ &= |a_1| - \frac{(n-1)(n+2)}{2} K \end{aligned}$$

$$\text{又} \quad \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=p} \frac{f(z) - p(z)}{(z-a)(z-b)} dz \right| \leq \frac{p}{(p-1)^2} M$$

ナル故

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \right| \geq |a_1| - \frac{(n-1)(n+2)}{2} K - \frac{p}{(p-1)^2} M > 0$$

a, b ハ任意デアツタカラ $f(z)$ ハ $|z| \leq 1$ デ單葉デアル。

(定理 3) 實係數ヲ有スル多項式 $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$

..... + $a_n z^n$ は $|z| < \rho$ で単葉である。故に $\rho \leq n-1$ 次、代数方程式

$$n x^{n-1} + (n-1) x^{n-2} + \dots + 3x^2 + 2x - \frac{1}{K} = 0$$

1 正根を持つ。 $\left[K = \max_{2 \leq k \leq n} |a_k| \right]$

(証明) $f'(z) = 1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + n a_n z^{n-1}$

$z = r \cos \theta$ とすれば

$$\begin{aligned} R\{f'(z)\} &= 1 + 2a_2 r \cos \theta + 3a_3 r^2 \cos 2\theta + \dots \\ &\quad \dots + n a_n r^{n-1} \cos(n-1)\theta \end{aligned}$$

故に $|R\{f'(z)\}| \geq 1 - K(2r + 3r^2 + \dots + nr^{n-1})$

右辺が 0 にならない代数方程式 $1 - K(2r + 3r^2 + \dots + nr^{n-1}) = 0$ の正根 ρ を有する。故に $r < \rho$ とすれば

$$|R\{f'(z)\}| > 0$$

故に熊代氏の定理により凸状領域 $|z| < \rho = \rho(f(z))$ は単葉となる。

(定理 4) $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$ が $|z| < 1$ で単葉であるとき $|f(z)| < M$ とすれば $|2 + a_2 M| \leq 2M$

(証明) $g(z) = \frac{f(z)}{\{f(z) - M\}^2}$ は容易に計算により

$|z| < 1$ で正則単葉となることが判る。 $g(z)$ を展開すれば

$$g(z) = \frac{1}{M^2} z + \frac{2 + a_2 M}{M^3} z^2 + \dots$$

Bieberbach の評価により

$$\left| \frac{2 + a_2 M}{M} \right| \leq 2$$

即ち $|2 + a_2 M| \leq 2M$

(完) $g(z) = \frac{1}{f(z) - M}$ トシテ、上述ノ論法ヲ用フレバ
 $|1 + a_2 M| \leq 2M$

ヲ得ル。又 $|a_2 M| \leq 2M$ ナル故、 $a_2 M$ ハ三ツノ等円

$|z + 2| \leq 2M$, $|z + 1| \leq 2M$, $|z| \leq 2M$ ノ共通開領域 D ノ

中ニアル。従ツテ a_2 ハ D ヲ、原点ヲ相似ノ中心トシテ $\frac{1}{M}$

ナル相似比ヲミツ開領域 D^* ノ中ニアルコトが判ル。

—— (完) ——