



Title	アルキメデスの vector-lattice ノ表現
Author(s)	吉田, 耕作
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 225, p. 499-502
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74902
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

972. アルキメデスの *vector lattice* の表現

吉田 耕 作 (阪大)

前 = (談話 912) = 於テ「單位ヲ有スル *vector lattice*」ノ代數的表現ヲ與ヘ、之レヲ用ヒテ角谷-Kreinノ定理「*bicompact* ノ空間ノ上ノ實數値連續函數ノ全体ノ特徴付ケ」ノ別証明ヲ與ヘタ。次イデ中野氏 (談話 917) ノ Freudenthal 流ノ方法ヲ巧ミニ用ヒテ「單位ノナイ σ -complete ノ *vector lattice*」ノ表現ヲ考ヘラレタ。ソコデ筆者ノ方法ヲ謂ベ直シテ見ルト「單位ノナイ場合」モ代數的表現が可能デ (然レ σ -completeノ假定不要)「*locally bicompact* ノ空間ノ上ノ實數値連續函數ノ全体ノ特徴付ケ」ニ導カレル様ニ思ハレマス。

Vector lattice E , 實數ヲ係數トスル線狀空間 $E =$ "non-negativeness" $f \geq 0$ が定義サレ

- i) $f \geq 0, \alpha \geq 0$ ナラ $\alpha f \geq 0$
- ii) $f \geq 0, -f \geq 0$ ナラ $f = 0$
- iii) $f \geq 0, g \geq 0$ ナラ $f + g \geq 0$
- iv) $f \geq g, (f - g \geq 0)$ ナラ *semi-order* = ヲ!!
 E ノ *lattice*, 即チ $\sup(f, 0) = f \vee 0 = f^+$
 が全テ / $f \in E$ = 對シ存在ス。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha \text{ ナラ } \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n f = \alpha f$$

(order topology 等)

が満足サレテルトスル。例 / 如ク $f^- = \inf(f, 0) = \sup(-f, 0)$, $|f| = f^+ - f^-$ ト置ク。

補助定理 1. E / linear subspace $N =$ コル linear - congruence $\equiv$ が lattice - congruence $=$ モナッテル: $f \equiv f'$, $g \equiv g'$ + ラ $f \wedge g \equiv f' \wedge g'$, 爲 / 必充條件ハ N ガイデヤル: $x \in N$ 且ツ $|y| \leq |x|$ + ラ $y \in N$, ナコトデアル。(1)

猶テ上 / 補助定理ヲ利用シテ任意 / $a > 0$ ノ標準ニシテ E ヲ表現シタイ。 $a \wedge |b| = 0$ + ル如キ b / 全体 N + イデヤルニナルカラ E/N ハ又 $i) - \vee)$ ヲ満足スル。 E/N ヲ表現スルコトニスル。即チ $\forall E =$ 於テ $a \wedge |b| = 0$ + ル $b = 0$ ト假定シテ E ヲ表現スル²⁾

補助定理 2. $b > 0$ 且ツ $E \neq \{\lambda b\}$, $-\infty < \lambda < \infty$. + ラ b ヲ含マナイ maximal ideal N ガ存在スル。 $E = N$ ガ maximal ト云フ / ハ $N \neq E$, 0 即チ N ハ non-trivial + イデヤルニシテ且ツ N 以外ニハ N ヲ含ム non-trivial + イデヤルノ存在シナイコトヲ意味スル。

証明 假定カラ b ヲ含マナイ non-trivial + イデヤル N_0 ノ存在ヲ云ヘレバヨイ。之レガ云ヘレバ。

(1) G. Birkhoff: Lattice Theory, p. 109

(2) a ハ Freudenthal, 意味 / unit $=$ ハナツテル。

maximal $\neq 0$ の存在は transfinite induction.

$E \neq \{\lambda b\}$ 故に $\bar{a} > 0$ が存在して全 α に対して $b - \alpha \bar{a} \neq 0$ とする。

α を適當にとると

$$(1) (b - \alpha \bar{a})^+ \neq 0, (b - \alpha \bar{a})^- \neq 0$$

とする。

以下其の証明。 $b - \alpha \bar{a} \neq 0$ 故に $(b - \alpha \bar{a})^+, (b - \alpha \bar{a})^-$ の何れか $\neq 0$ 。今 $(b - \alpha \bar{a})^+ \neq 0$, $(b - \alpha \bar{a})^- = 0$ 即ち $b > \alpha \bar{a}$ とする。 $\forall$ が与えられたら $\beta = \sup$ して $b \geq \beta \bar{a}$ とおき $\beta > \alpha$ 。即ち或る β (當然 $> \alpha$) = $\sup$ して $(b - \beta \bar{a})^- \neq 0$ 。 $\therefore$ $(b - \beta \bar{a})^+ \neq 0$ となる。又 $\beta > \alpha$ 故に $(b - \beta \bar{a})^+ = 0$ 即ち $b < \beta \bar{a}$ とする: $\beta \bar{a} > b > \alpha \bar{a}$ 。斯く β の $\inf$ を β' , α の $\sup$ を α' と置くと $\forall$ が $\beta' \bar{a} > b > \alpha' \bar{a}$, $\beta' > \alpha'$ 。然して $\beta' > \alpha > \alpha'$ 故に $(b - \alpha \bar{a})^+ \neq 0, (b - \alpha \bar{a})^- \neq 0$ 。

— 以上 —

然るに $(b - \alpha \bar{a})^+ \wedge \{-(b - \alpha \bar{a})^-\} = 0$ 故に non-trivial ではない。 $N_{0,1} = \bigcup_{\alpha} \{x \mid |x| \leq \eta(b - \alpha \bar{a})^+\}$, $N_{0,2} = \bigcup_{\alpha} \{x \mid |x| \leq \eta(b - \alpha \bar{a})^-\}$, 双方が b を含むことになり。 b を含む一方の N_0 とすればよい。

— 以上 —

E の表現 a を含む一方の maximal である N を $\mathcal{N}_a$ とする。補助定理 2 = $\exists N \in \mathcal{N}_a$ かつ

任意, $b \neq 0$ に対して $b \equiv \lambda a \pmod{N}$. 即ち任意, $b \neq 0$ に対して $\mathcal{H}_a$ 上で定義される函数 $\lambda = b(N) = \{\frac{b}{a}, N\}$ (中野氏の記法) が定義される. *linear lattice-homomorphism* $b \rightarrow b(N)$ は $a(N) \equiv 1$ (恒等的=) デアル且つ *isomorphism* デアル.

何者 $b \neq 0 \rightarrow \exists |b| \wedge a \neq 0$.

従って $\mathcal{H}_a \ni N \rightarrow |b| \wedge a =$ 對して $b(N) \neq 0$

Topology. $\mathcal{H}_a =$ weak topology $\rightarrow$ 入レル. $N_0 \in \mathcal{H}_a$, $\mathcal{H}_a =$ 於ける近傍 $\rightarrow$
 $\in \{ |f_i(N) - f_i(N_0)| < \varepsilon_i; f_i \in E; i = 1, 2, \dots, n \}$
 デ定義スル $\mathcal{H}_a$ は *locally bicomact* = +ル
 (Tychonoff / 定理). 然して各 $b(N)$ は $\mathcal{H}_a$ デ
continuous. $\{b(N)\}$, $b \in E$, は *bicomact*
 + $\mathcal{H}_a$ デ *continuous* + 函数, 全体, 中デ次, 意味デ
dense デアル. 即ち $\mathcal{H}_a$, 任意, *bicomact* + 部
 分集合 $\mathcal{H}$ フトルト $\mathcal{H}$ デ連続 + 任意, 函数 $C(N)$ ト
 $\varepsilon > 0$ = 對して $\sup_{N \in \mathcal{H}} |b(N) - C(N)| \leq \varepsilon$ +ル 如キ $b \in E$
 が存在スル.

証明ハ $\mathcal{H}$, 任意, 点 $N_1 \neq N_2$ = 對して $d(N_1) = 1$,
 $d(N_2) = 0$ +ル 如キ $C \in E$ ハ明カニ存在スルカラ
 Krein / 補助定理 (談話 912) カラ得ラレル.