



Title	可換ナ Radikal ヲ持ツ Lie環 (III)
Author(s)	安倍, 亮
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 225, p. 505-519
Version Type	VoR
URL	<a href="https://doi.org/10.18910/74904">https://doi.org/10.18910/74904</a>
rights	
Note	

*The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA*

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

# 974. 可換 + Radikal を持つ Lie 環 (III)

安倍 亮 (東大)

## 無限小自己同型

表題 / 談話 (I) = 於てハ先ツ可換 + Radikal を持つ Lie 環ノ構造ヲ決定シ、次ニソノ自己同型ヲ決定シタ。  
(II) = 於てハ其等 = 必要 + 手段トシテ単純 Lie 環ノ表現ト自己同型トノ間ノ關係ヲ論ジタ。

扱テ (I) = 於テ此様ノ Lie 環 = ツイテ先ツ自己同型ヲ考ヘタノハ、 $\mathfrak{L} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{L}^1$  (Levi 分解)  $\mathfrak{L} = \mathfrak{R} + \mathfrak{S}$  ( $\mathfrak{R}$ : Radikal,  $\mathfrak{S}$ : *halb-einfach*) が自己同型ヲ除イテ $\mathfrak{L}$ ノ意的ナリマ否マノ考察ノ延長デアツタガ、更ニ次ノ様

+意味をアツクノデアレ。  $\mathcal{R}$  / 係數体が實數体又複素數  
 体ノバアヒニハ, Lie / 理論ニヨツテ  $\mathcal{R}$  = 對應スル  
*im Großen* / Lie 群  $\mathcal{G}$  が直チニ考ヘラレルガ, 係  
 數体が一般ノバアヒニハ  $\mathcal{G}$  ノ様ナモノハ考ヘラレナイ。併  
 シ  $\mathcal{R}$  が *halbeinfach* ナトキニハ  $\mathcal{R}$  / 自己同型置換ノ  
 群  $\mathcal{A}$  が  $\mathcal{G}$  / 代用ニナル。實際ハ此ハムシロ,  $\mathcal{R}$  / 無限  
 小自己同型 (*infinitesimal automorphism* 或ハ簡單  
 = *Derivation*)

$$D: D(x \circ y) = Dx \circ y + x \circ Dy,$$

$$x, y \in \mathcal{R}, \alpha, \beta \in P.$$

$$D(\alpha x + \beta y) = \alpha Dx + \beta Dy$$

/ 作ル Lie 環  $\mathcal{A}$  = 對應スル「Lie」群トモ云フベキモ  
 ナデアリ, 事實  $P$  が *perfekt bewertete Körper* / ト  
 キハ Lie 理論ノ意味デ此ノ  $\mathcal{A}$  = 對應スル。所ナ  $\mathcal{R}$  が  
*halbeinfach* ナバアヒニハ  $\mathcal{A}$  が丁度  $\mathcal{R}$  ト *iso-*  
*morph* = ナル。 ( $\because \mathcal{R}$  / *Derivation* ハ *innere*  
*Derivation*  $D_a x = a \circ x$  / ミデアリ, 且ツトベテ  
 $x \circ a =$  對シテ  $a \circ x = 0$  = ナル元  $a$  ハ  $\mathcal{R}$  / *Zentrum* /  
 元, 即チ  $a = 0$  = 限ルカラ  $D_a \longleftrightarrow a$  ナル對應ヲ  $\mathcal{A} \cong \mathcal{R}$ )  
 ト云フ, Lie 環全體トシテ云ヘハ偶然ナ事情ノタメニ,  
 此ノ  $\mathcal{R}$  ノ  $\mathcal{A}$  / 一ニ對應スル群ノ様ニモ考ヘラレルデア  
 レ。

扱フ  $\mathcal{R}$  が可換ナ *Radikal* ナ毎ナル場合ニハ  
 $\mathcal{A} \cong \mathcal{R}$  トハナラナイガ, ( $\mathcal{R}' = \mathcal{R}$  ナルニ限ツテ考

ヘルト) の  $\mathfrak{A}$  は  $\mathfrak{L}$  = 同型 + Lie 環  $\mathfrak{L}$  を含む / デ,  $\mathfrak{A}$  = 対応スル  
 自己同型群  $\mathfrak{G}$  のヲ作レバ,  $\mathfrak{R}$  = 対応スベキ群ヨリハ「大  
 キイ」群ガ出来ル。實際 (I) デ決定シタ自己同型群  $\mathfrak{G} = (A)$   
 = 於テ,  $(A^{\circ\circ})$  ( $\cong$   $n$  次元 / Vektor 群) + 此  
 Normalteiler  $\mathfrak{A}$  明カ =  $\mathfrak{R}$ , Radical  $\mathfrak{A}$  = 対応  
 スル部分デアリ,  $(A)/(A^{\circ})$  ( $\cong$   $(\bar{A}) = \mathfrak{G}$  / 自己同型中  
 の  $\mathfrak{A}$  変へ + イモ / 作ル群)  $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{G}$  = 対応スル部分デアル。  
 $(A^{\circ})/(A^{\circ\circ})$   $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{L}$  = 対応スル部分ヲモタ + イ。既 = 述  
 ベタ様ニ,  $\mathfrak{G}$  = もっとヨク対応スル,  $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{R}$  ヨリモ  $\mathfrak{R}$  /  
 Derivationen / Lie 環  $\mathfrak{A}$  デアル。ソコデ本談話デ  
 ハ  $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{G}$   $\mathfrak{A}$  求メテ見ルコト = スル。嗚然豫想サレル様 =  $\mathfrak{A}$  /  
 決定ハ,  $\mathfrak{G}$  / 決定ト殆ンド parallel = 行き, 而モ概シ  
 テズツト簡單デアル。

唯一ツ, 自己同型  $A$  が Radical  $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{A}$  変へ + イ ( $A \mathfrak{A}$   
 =  $\mathfrak{A}$ ) 事ガ全ク明カデアル = 對シテ, 任意 / Derivation  
 $D$  = 對シテ  $D \mathfrak{A}$   $\mathfrak{A}$  + 此コト / 証明ガ意外困難デアル。  
 ソレヲ先ツ第5節デ片附ケル。純代数的 = 証明出来 + イ /  
 デ止ムヲ得ガ, *transcendent* + 廻リ道ヲシテ証明スル。  
 ソレガストバ後ハ繁デアル。

Derivation  $\in$  Automorphism  $\in$  Lie  
 環 = 限ラズ任意 / linear algebra (über  $P$ ) =  
 ツイテ考ヘラレル。ソノ場合  $\mathfrak{G}$   $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{A}$  / 問 = 構造上非  
 常 = 密接 + 類似ガアレコトハ明白 + 事實デアルガ, 具体的  
 =  $\mathfrak{G}$   $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{A}$  媒介スルハ指数函数 /  $\mathfrak{A}$   $\mathfrak{A}$  + 解析的手段

テアツテ、基礎体が *perfekt* デ+ケレバウマク行カト  
 イ。即チ此ト $\mathfrak{g}$ トノ明白+平行性=對シテ、一般ノ基  
 礎体ノ場合=ハ理論的+根據ガ欠ケテ居ル訳デアアル。モッ  
 ト一般ニ、幾ツカノ不変式又ハ不変的關係=ヨツテ定義サ  
 レル一次変換ノ群 $\mathfrak{g}$ ト一次変換ノ Lie 環 $\mathfrak{g}$ トノ間ニ  
 モ(例ハバ  $x_1^2 + \dots + x_n^2$  +ル不変式ヲトレバ、 $\mathfrak{g}$ ハ直  
 交変換群、 $\mathfrak{g}$ ハ歪對称行列 Lie 環)構造ノ平行性ガア  
 ツテ、而モ一般ニハソノ媒介物ガ欠ケテ居ル。Lieノ理  
 論ヨリモット一般的+代数的+ (從ツテ基礎体=全ク關係  
 )+イ)理論ガ望マシイノ $\mathfrak{g}$ ハナイガラウカ。

### 5. Lie 環ノ charakteristische Ideale.

(定義) (Lie-) algebra  $\mathfrak{R}/\mathfrak{P}$  ノ Teilalgebra  
 $\mathfrak{h}$ ガ、 $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ Autom.  $A$ ガ不変 ( $A\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ )ト  
 トキ、 $\mathfrak{h}$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ characteristische Teilalgebra  
 ガアルト云フ。若シ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ Derivation  $D$ =對  
 シテ不変 ( $D\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ )トラバ、 $\mathfrak{h}$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ lokal-  
characteristische Teilalgebraデアアルト  
 云フコト=スル。

Lie 環ノ l.-char. Teilalgebra ハ皆= Ideal  
 デアル。∵ 任意ノ  $a \in \mathfrak{R}$  = 對シテ  $a \circ \mathfrak{h}$   
 =  $D\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}$ ガカラ。(Zassenhausハ後者ノミ  
 ヲ考ヘテ、單ニ char. Idealト名付ケテ居ル。) char.  
 Teilalgebraガ皆= Idealカドウカハ直チニハ分

ヲトイ。

[例1]  $\mathcal{R}$  7 einfach + Lie 環  $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2 (\mathfrak{g}_1 \cong \mathfrak{g}_2)$   
ノ直和トスル:

$$\mathcal{R} = \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$$

$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$  7 交換スル  $A$  がアルカラ,  $\mathfrak{g}_1$  ハ char.  $\mathfrak{g}$  ハ  $\mathfrak{g}_1$  7  
イ。然シ  $\mathcal{R}$  ノ  $D$  ハ必ず inner  $\mathfrak{g}$  アルカラ  $D\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_1$ , 即  
チ  $\mathfrak{g}_1$  ハ l.-char. Ideal  $\mathfrak{g}$  アル。

[例2]  $\mathcal{R}$  1 char. Teilalgebra  $\mathfrak{N}$ , char.  
Teilalgebra  $\mathfrak{N}'$  ハ  $\mathcal{R}$  1 char. Teilalgebra  $\mathfrak{g}$   
アル。  $\mathcal{R}$  1 l.-char. Ideal 1 l.-char. Ideal  
ハ  $\mathcal{R}$  1 l.-char. Ideal  $\mathfrak{g}$  アル等。之レヲハ定義カ  
ヲ明カ。

$\mathcal{R}$  1 Radikal, Zentrum (及一般 = aufstei-  
gende Zentralreihe 1 各項), ableitung (及  
一般 = 高次 1 Ableitung 並ビ = absteigende Zent-  
ralreihe 1 各項)。等ハスベテ定義カラ殆ンド明カナ  
様 = char. Ideal  $\mathfrak{g}$  アル。又以上ノ中 Radikal 以  
外ノ  $\mathfrak{g}$  1 同時 = l.-char. Ideal  $\mathfrak{g}$  アルコトが夫々  
1 場合 = 容易 = 証明サレル。(例ハバ Zentrum  $\mathfrak{Z}$  = 對  
シ,  $D\mathfrak{Z} \subset \mathfrak{Z}$  ナルコトハ,  $x \in \mathcal{R}, z \in \mathfrak{Z} \rightarrow D z \circ x = D$   
( $z \circ x$ ) -  $z \circ D x = D 0 - 0 = 0$   $\exists$  11 Ableitung  $\mathcal{R}'$   
=  $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} =$  對シテハ  $D\mathcal{R}' = D(\mathcal{R} \circ \mathcal{R}) \subset D\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$   
+  $\mathcal{R} \circ D\mathcal{R} \subset \mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}'$ )

殆ンド明カナコトアルガ:

定理 [5.1]  $\mathcal{R}$  が複素数体 (一般 = *perfekt bewertete Körper*) とし Lie 環  $\mathcal{R}/\mathcal{P}$ , char. Teilalgebra の同時 = l.-char. 従って Ideal である。

[証明]  $D \in \mathcal{R}$ , 任意, Derivation とすれば,  $\varepsilon > 0$  の小サクトル  $t$  とき  $e^{\pm D} (|t| < \varepsilon)$  は  $\mathcal{R}$  の Autom. である。  $\therefore v \in \mathcal{N}$  とし  $e^{\pm D} v \in \mathcal{N}$ ,  $\mathcal{N}$  は勿論閉集合であるから

$$Dv = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (e^{\pm D} v - v) \in \mathcal{N} \quad \text{q. e. d.}$$

一般 = は餘りハッキリシタ事ハ云ハナイが:

定理 [5.2]  $\mathcal{P}$  の標準  $\mathcal{O}$  の体  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{N}$  は  $\mathcal{R}/\mathcal{P}$ , char. Teilalgebra とする。

$$\mathcal{R} = u_1 \mathcal{P} + \dots + u_r \mathcal{P}, \quad \mathcal{N} = v_1 \mathcal{P} + \dots + v_s \mathcal{P}$$

$$u_i \circ u_j = \sum u_k \gamma_{ij}^k, \quad v_i = \sum u_k \alpha_i^k$$

トシ,  $\mathcal{P}^* = \Gamma(\alpha_i^k, \gamma_{ij}^k) \subset \mathcal{P}$  ( $\Gamma$ : 有理体),  $\mathcal{R}^* = u_1 \mathcal{P}^* + \dots + u_r \mathcal{P}^*$ ,  $\mathcal{N}^* = v_1 \mathcal{P}^* + \dots + v_s \mathcal{P}^*$  と置く。  $\mathcal{P}$  にミゲタク,  $\mathcal{P}^*$  は任意, 拡大体  $K = \text{對シテ } \mathcal{N}^* K \text{ が } \mathcal{R}_K^*$ , char. Teilalgebra とし,  $\mathcal{N}$  は  $\mathcal{R}$ , l.-char. Ideal である。

[証明]  $\mathcal{P}^*$  は高々有限個の独立 + 超越元ヲ含む, ミゲカラ複素数体  $K = \text{einbetten}$  される。 假定 = ヨリ  $\mathcal{N}_K^*$  が  $\mathcal{R}_K^*$ , char. Teilalgebra であるから, [5.1] = ヨリ l.-char. Ideal である。  $\mathcal{R}^*$  は Derivation

$D^*$  は  $R_K^*$  / Der. の一部だから  $D^* \subseteq R_K^*$ , 勿論  $D^* \subseteq R^*$  だから  $D^* \subseteq R^*$ , 即ち  $R^*$  は  $l$ -char. Ideal である。然るに一般に  $R$  / Der.  $D$  は,  $\gamma_{ij}^k \in P^*$  の係数を含む着次一次方程式系 / 解トシテ得ラレルモノデ, 結局  $R^*$  / Der. /  $P$  の係数トスル一次結合である。  $\therefore D \subseteq R^* \subseteq M^* P = R \therefore D \subseteq R$  g.e.d.

扱ハル  $R$  / Radical であるトイフ性質ハ  $R/m$  / Discriminante  $\neq 0$  ナルコトトス, auflösbar ナルコトヲ決ルカラ, 何レニシテモ係数  $\alpha_i^k, \gamma_{ij}^k$  ナクテ亦ル性質である。故ニ  $R^*$  /  $R_K^*$ ,  $M^*$  /  $R_K^*$  / Radical 従ツテ char Teilalgebra である。故ニ定理 [5.2] 候実ニ満足ナル:

定理 [5.3] 標数 0 / 体  $P$  / 上 / Lie 環  $R$  / Radical  $\mathfrak{R}$  は  $R$  /  $l$ -char. + Ideal である。

定理 [5.2] は, Zentrum, Ableitung 等が  $l$ -char. ナコトノ証明ニモ勿論使ヘルガ, 前ノ代数的証明ノ方が標数  $p$  ナモノ通用スル点ヲ屢ツテキル。 [5.3] ハ標数  $p$  ノ時成立ツカドウカ分ラナイ。

6. 可換 + Radical ヲ持ツ Lie 環ノ無限小自己同型。

$R$  は可換 + Radical ヲ持ツ Lie 環:  $R = R(\mathcal{G}; \mathcal{V})$ ,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}$  は halbeinfach,  $\mathcal{V}$  は  $\mathcal{G}$  / 一ツノ表現である。基礎体  $P$  / 標数ハ 0 トスル。

第 1 節 = 述べタマフ  $R = R' + \mathfrak{z}$  ( $R'$ : ableitung,

$\mathfrak{z}$ : Zentrum) デアルが, 前節 = 述べた如く =  $\mathcal{R}$  / 任意 / Der.  $D =$  對シ  $D\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}'$ ,  $D\mathfrak{z} \subset \mathfrak{z}$  デアル,  $D$  ハ  $\mathcal{R}'$  及  $\mathfrak{z}$ , Der. ヲ生ズル。遂 =  $\mathcal{R}'$  / Der.  $D_1$  ト  $\mathfrak{z}$  / Der.  $D_2$  トヲ勝手 = 組合セテ

$$x = y + z, \quad y \in \mathcal{R}', \quad z \in \mathfrak{z} = \text{對シ}$$

$$Dx = D_1 y + D_2 z$$

トオケバ任意 /  $D$  が得ラレル。然ル =  $D_2$  ハ全ク任意 / 一次族換がカラ問題ハナイ。 :  $\mathcal{R}'$  / Der. がケテ考へレバヨイ。即チ第2節ト同様  $\mathcal{R}'$  / 代リ =  $\mathcal{R}$  ト書イテ了ツテ,  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{o}; \mathfrak{a}) =$  於テ  $\mathfrak{a}$  が零表現ヲ含マナイ場合がケテ考へルコト = スル。

(I) / 記号ヲ其儘使ツテ

$\mathcal{R} = \mathfrak{o} + \mathfrak{n}$ ,  $\mathfrak{o}$ : halbeinfach + 部分環,  $\mathfrak{n}$ : Radikal,

$$\mathfrak{o} = u_1 P + \dots + u_r P, \quad \mathfrak{n} = v_1 P + \dots + v_g P,$$

$$(6.1) \quad u_i \circ u_j = u_k c_{ij}^k, \quad v_\alpha \circ v_\beta = 0,$$

$$u_i \circ v_\alpha = v_\beta d_{i\alpha}^\beta$$

$u_i \rightarrow [d_{i\alpha}^\beta]$  が  $\mathfrak{n}$  の表現加群トスル  $\mathfrak{o}$  / ( $g$  次 / ) 表現  $\mathfrak{a}$  デアル。

扱テ前節 = ヲリ, 任意 / Der.  $D =$  對シ  $D\mathfrak{n} \subset \mathfrak{n}$  デアルカラ,  $D$  ハ  $\mathcal{R}/\mathfrak{n}$  / Der. ヲ惹起ス。ソレヲ  $\bar{D}$  ト書ク。

i)  $\bar{D} = 0$  + ルバアヒ, コノ様 +  $D$  ヲ  $D^\circ$  ト書クコト = スル。即チ

$$(6.2) \quad D^\circ u_i = v_\alpha t_i^\alpha, \quad D^\circ v_\alpha = v_\beta s_\alpha^\beta$$

$$D^0 u_i \circ u_j + u_i \circ D^0 u_j = D^0 (u_i \circ u_j) = D^0 u_k C_{ij}^k = (6.2)$$

$$\text{ト(6.1)ヲ代入シテ} -v_\beta d_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha + v_\beta d_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha = v_\beta t_k^\beta C_{ij}^k,$$

即チ

$$(6.3) \quad d_{i\alpha}^\beta t_j^\alpha - d_{j\alpha}^\beta t_i^\alpha = t_k^\beta C_{ij}^k \quad \text{或ハ}$$

$$\mathcal{D}(u_i) t_j - \mathcal{D}(u_j) t_i = t_k C_{ij}^k,$$

$$t_i = \begin{bmatrix} t_i^1 \\ \vdots \\ t_i^g \end{bmatrix} \quad \mathcal{D}(u_i) = \begin{bmatrix} d_{i1}^1 & \cdots & d_{ig}^1 \\ \cdots & & \cdots \\ d_{i1}^g & \cdots & d_{ig}^g \end{bmatrix}$$

之ハ (I), (2.2) トシテ得タ方程式ト全ク同ジデアラフ。

( $u_i =$  表現  $\mathcal{D}$  ヲ對應スル行列ヲ以前ニハ  $D_i$  ト書イタガ, Der. ト紛ハシイカラ, コノデハ  $\mathcal{D}(u_i)$  ト書イタ) シタガツテ第3節ニ述ベタ Whitehead, 定理ニヨリ, 任意ノ Vektor  $w =$  對シ

$$t_i = \mathcal{D}(u_i) w \quad \text{即チ} \quad t_i^\alpha = d_{i\beta}^\alpha w^\beta$$

ガ (6.3) ノ一般解デアラル。扱テ  $v_0 = -v_\alpha w^\alpha$  トオケバ,  $v_0 \in \mathfrak{N}$  テ

$$v_0 \circ u_i = u_i \circ v_\alpha w^\alpha = v_\beta d_{i\alpha}^\beta w^\alpha = v_\beta t_i^\beta = D^0 u_i,$$

$$v_0 \circ v_\alpha = 0$$

即チ inner Der.  $v_0 \circ u_i = D_{v_0} u_i$  ト書ケルハ

$$(6.4) \quad D_{v_0} u_i = D^0 u_i, \quad D_{v_0} v_\alpha = 0 \quad \text{①} \quad \text{----- (時缺頁)}$$

$\therefore D^0 = D_{v_0} + D^S$  トオケバ,  $D^S \in \text{Der.}$  デ (6.2), (6.4) カラ

$$(6.5) \quad D^S u_i = 0, \quad D^S v_\alpha = v_\beta S_\alpha^\beta.$$

$u$   $\mathcal{A}$  の任意ノ元トスレバ,  $D^S u = 0$

$$\therefore D^S(u \circ v_j) = u \circ D^S v_j$$

即チ行列  $[S_\alpha^\beta] = S$  ト書ケバ

$$(6.6) \quad \mathcal{A}(u) S = S \mathcal{A}(u)$$

$S$  ノ表現  $\mathcal{A}$  ノ任意ノ行列ト可換チ行列 ((2.6) トチガツテ  $|S| \neq 0$  ト要シタイ) デアル。又コノ様チ行列  $S$   $\mathcal{A}$  任意ニトツテ (6.5) = ヨリ  $D^S$   $\mathcal{A}$  定義スレバ、ソレガ  $\text{Der.}$  ニナレコトモ以上カラ分ル。  $\mathcal{A}$  ノ完全可約ガカラ  $S$  ノ全体ハ *halbeinfach* チ行列環ヲ作ル。<sup>2)</sup>

ii)  $\bar{D} \neq 0$  ノ場合  $D = D_{v_0} + \hat{D}$ ,  $\hat{D} \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$  ノ形ニ分ケラレルコト, 即チ  $\text{mod}(D_{v_0})$  ノ代表トシテ必ズ  $\hat{D} \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$  ナル  $\hat{D}$  ガトレルコトガ, *im Großen* ノバアヒト全ク同様ニ証明サレル。即チ  $u \in \mathcal{A} = \mathcal{A}$   $\hat{D} u = u^*$  トスレバ  $u^*$  ハ  $\mathcal{A} = \mathcal{A}$  必ズシモ属シタイガ,  $\mathcal{R} = \mathcal{A} + \mathcal{N} = \mathcal{A}$   $u^* \equiv u^0(\mathcal{N})$  ナル  $u^0 \in \mathcal{A}$  ガ唯一ツアル。  $u, u', u'' \in \mathcal{A}$

1) 之デ *Whitehead* ノ定理ノ意味ガ非特ニハツキリスル。即チ換言スレバ「 $\mathcal{R} \in \text{Der.}$   $D^{00} \mathcal{A} \subset \mathcal{A}$ ,  $D^{00} \mathcal{N} = 0$  ナル  $\mathcal{A}$  ノ  $v_0 \in \mathcal{A}$  = 對應スル *innere Der.*  $D_{v_0}$  デアル」。

2) 無論 *assoziativ* チ環トシテ *halbeinfach* チ  $\mathcal{A}$  デアツテ *Lie* 環トシテハサウデハナイ。

$$\neq u \circ u' = u'' + \tau \circ u^* \circ u' + u \circ u'^* = u''^*$$

$$\therefore u^0 \circ u' + u \circ u'^0 \equiv u''^0 \quad (\mathcal{R})$$

コノ合同式ノ両辺ハ共  $= \delta^0 =$  属スルカラ、之レヨリ  $u^0 \circ u' + u \circ u'^0 = u''^0$  同様ニ

$$\alpha u + \alpha' u' = u'' + \tau \alpha u^0 + \alpha' u'^0 = u''^0 \quad \text{即チ } \hat{D}u = u^0$$

トオケバ、 $\hat{D}$ ハ  $\delta^0$ ノ Der. = ナル。更ニ

$$(6.7) \quad \hat{D}u = u^0, \quad u \in \delta^0; \quad \hat{D}v = Dv, \quad v \in \mathcal{R}$$

トオケバ、 $\hat{D}$ ハ  $\mathcal{R}$  全体ノ Der. = ナツテホル。又レハ  $\hat{D}$

ハ  $\delta^0$  及  $\mathcal{R}$ ノ Der. = ナツテホルコトハ既知ナルカラ、

$$\hat{D}(u \circ v) = \hat{D}u \circ v + u \circ \hat{D}v \quad \text{云ハバヨイカ}$$

$$\hat{D}u \equiv Du(\mathcal{R}) \quad \text{ヲ考慮スレバ、} \quad \hat{D}(u \circ v) = D(u \circ v) =$$

$$Du \circ v + u \circ Dv = \hat{D}u \circ v + u \circ \hat{D}v \quad \text{カラホル。従ツテ}$$

$$D^0 = D - \hat{D} \in \text{Der. } \mathcal{R}$$

$$D^0 u \equiv 0(\mathcal{R}), \quad D^0 v = 0$$

トナル。故ニ  $\mathcal{R}$ ノ議論ニヨリ  $v_0 \in \mathcal{R}$ ヲ用キテ  $D^0 = Dv_0$

ノ形ニナル。即チ

$$(6.8) \quad D = Dv_0 + \hat{D}, \quad v_0 \in \mathcal{R}, \quad \hat{D}\delta^0 \subset \delta^0$$

ナル分解ノ可能性ノ証明ガ済ムカ。扱フ  $\delta^0$ ハ halbeinfach ナルカラ

$$\hat{D}u = u_0 \circ u = Du_0 u$$

ナル  $u_0 \in \delta^0$ ガ存在スル。  $\hat{D}$ ガ  $\mathcal{R}$ ニ生ズル一次変換ヲ

$$\hat{D}v = Lv, \quad v \in \mathcal{R}$$

ト書ケバ  $\hat{D}(u \circ v) = \hat{D}u \circ v + u \circ \hat{D}v$ ハ

$$L \eta^j(u) v = \eta^j(u_0 \circ u) v + \eta^j(u) Lv$$

トナルが,  $\vartheta(u_0 \circ u) = \vartheta(u_0)\vartheta(u) - \vartheta(u)\vartheta(u_0)$  が  
 カラ

$$(L - \vartheta(u_0))\vartheta(u) = \vartheta(u)(L - \vartheta(u_0))$$

即ち  $L = \vartheta(u_0) + S$  トナリ  $S$  の表現ト可換ト行列デアイル。

$$D_{u_0} u = \hat{D} u \quad D_{u_0} v = \vartheta(u_0) v$$

デアアリ, 又

$$D^S u = 0 \quad D^S v = S v$$

ε ii) =ヨリ Der. がカラ結局  $\hat{D} = D_{u_0} + D^S$  デアイル。

従ツテ ii) ト iii)ヲ想スレバ  $\mathcal{R}$  / 任意 / Der.  $D$  の

$D = D_{u_0} + D_{v_0} + D^S$ ,  $u_0 \in \mathfrak{p}$ ,  $v_0 \in \mathfrak{h}$  / 形 = ナル。  $u_0 + v_0$   
 =  $x_0$  トオケバ

$$D = D_{x_0} + D^S, \quad x_0 \in \mathcal{R}$$

ノ形 = ナル。コノマデハ  $\vartheta$  が零表現ヲ含ムバアキニモ通用

スル。若シ  $\vartheta$  が零表現ヲ含マナイトテ,  $\mathcal{R}$  / Zentrum

= (0) トナリ,  $x_0 \leftrightarrow D_{x_0}$  / 對應ハ isomorph = ナル。

(特 =  $D^{00}$   $\mathcal{R} \subset \mathfrak{h}$ ,  $D^{00} \mathfrak{h} = 0$  ナル  $D^{00} =$  對シテ  $D^{00} = D_{v_0}$ ,

$v_0 \in \mathfrak{h}$  ナル  $v_0$  が一意的 = キマルが, 之ハ既ニ述ベタ様

=  $D^{00} u_i = v_0 \cdot t_i$  トスレバ,  $\vartheta(u_i) t_j - \vartheta(u_j) t_i$

=  $t_k C_{ij}^k$  / 解  $t_i = \vartheta(u_i) w$  ヲアラハス Vektor  $w$  が

一意的トコト = 他ナラナイ。即チ (I) = 証明シタ定理 [3.

2] / 別証ガ興ヘラレタ事 = ナル。

以上ヲ総括スルト:

定理 [6.1]

「可換トRadikalヲ持ツLie環  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(\mathfrak{p}; \vartheta)$

= 於て  $\mathfrak{A}$  の表現ヲ含メ + イトスル。  $\mathcal{R}$  / 任意 /  $\text{Der } D$   
 の次ノニツノ部分 = 一意的 = 分解サレル。

$$D = D_{x_0} + D^S,$$

$$D_{x_0} x = x_0 \circ x, \quad x \in \mathcal{R};$$

$$D^S u = 0, \quad u \in \mathfrak{A}; \quad D^S v = S v, \quad v \in \mathcal{R};$$

$x_0 = x_0$  の  $\mathcal{R}$  / 任意 / 元,  $S$  の表現  $\mathfrak{A}$  と可換 + 任意 / 一  
 次変換ヲサレル。

$D$  / 全体 / 作ル Lie 環  $(D)$  / 中 =  $\wedge$

$$(D^0) = (D_{v_0}) + (D^S), \quad \text{即チ } D^0 \mathcal{R} \subset \mathcal{R} + D^0, \text{ 作}$$

$$\text{ル Ideal.}$$

$$(D^{00}) = (D_{v_0}), \quad \text{即チ } D^{00} \mathcal{R} \subset \mathcal{R}, D^{00} x = 0$$

$$+ D^{00}, \text{ 作ル Ideal}$$

ガヲ 11,

$$(D) / (D^0) \cong (D_{u_0}) \cong \mathfrak{A}$$

$$(D^0) / (D^{00}) \cong (S) \quad (\text{可換 + 行列全体, Lie 環})$$

$$(D^{00}) = (D_{v_0}) \cong \mathcal{R}$$

コノ他 (任意 Lie 環ヲ成立ツ如ク) *innere Der.* / 全  
 体  $(D_{x_0}) = (D_{u_0}) + (D_{v_0}) \in (D)$  / Ideal ヲサレ,

$(D) = (D_{x_0}) + (D^S)$ .  $(D^S)$  の Ideal ヲ + イガ, Teil-  
 algebra ヲ + ヲ, 然ツテ  $(D)$  の  $(D_{x_0})$  上ヲ zerfallen  
 スル. *äußerer Derivationsring*

$$(D) / (D_{x_0}) \cong (S) \quad \lrcorner$$

以上ノ結果ヲ自己同型群  $(A)$  と比較シテ見ヨク。(I), [定  
 理 2] = コレバ,  $(A) = \wedge$

$(A^\circ): A^\circ \mathcal{R} = \mathcal{R} + \mathcal{L} A^\circ$ , 全体

$(A^{\circ\circ}): A^{\circ\circ} \mathcal{R} = \mathcal{R}$ ,  $A^{\circ\circ} v = v$ ,  $v \in \mathcal{R} + \mathcal{L} A^{\circ\circ}$  / 全体

ト云フ Normalteiler がアリ, ソレヲノ間ノ Faktor ハ  
 $(A)/(A^\circ) \cong (\bar{A})$  ( $\sigma$ , Autom. 中  $\sigma$  変へ + 1  $\in$  1)

$(A^\circ)/(A^{\circ\circ}) \cong (S)'$  ( $\sigma$  ト可換ヲ逆ノアル行列)

$(A^{\circ\circ}) \cong \mathcal{R}$  ト同次元ノ Vektor 群

デアツク。即チ  $(D^\circ)$  ト  $(A^\circ)$ ,  $(D^{\circ\circ})$  ト  $(A^{\circ\circ})$ ,  $(D u_0) \cong \sigma$  ト  $(\bar{A})$ ,  $(S)$  ト  $(S)'$ ,  $(D v_0) \cong \mathcal{R}$  ト  $(A^{\circ\circ})$  が夫々對應シテ居ル。 $(D)$ , Ideal  $(D x_0) \cong \mathcal{R} =$  對應スル  $(A)$  ノ Normalteiler (之ヨリ  $\mathcal{R} =$  對應スル Lie 環トシテ興味カアルノデアルカ) ノ定理 2 = ハ述ベテ + 1。基礎体  $P$  ガ perfekt デアレバ innere Autom. 1 群  $(A^i)$  フトレバヨイ。詳シク云ヘバ次ノ通りデアル。 $\sigma =$  對應スル單一連結ナ Lie 群ヲ  $\sigma_f$  トスレバ,  $\sigma$  ノ表現  $\sigma_f$  ハ  $\sigma_f$  ノ表現 = 一意的 = 延長サレルガソレモ  $\sigma_f$  ト書ク。 $\sigma_f$  ノ innerer Autom.  $\bar{A}$  ハ  $\bar{A} u = g^{-1} u g$  ノ形,  
 $\sigma_f(\bar{A} u) = \sigma_f(g)^{-1} \sigma_f(u) \sigma_f(g)$  ガカラ  $L_{\bar{A}} = \sigma_f(g)$  トオケル。 $\bar{A}$  ガラ  $g$  ハ一意的 = ハキマテ + 1 ガ,  $\sigma_f$  ノ Zentrum ハ有限個ノ元シカ含マ + 1 ノテ  $g \in$  高々有限個,  
 $\therefore L_{\bar{A}} \in$  有限多項デアル。

$$A^i = \begin{bmatrix} \bar{A} & 0 \\ T\bar{A} & L_{\bar{A}} \end{bmatrix}$$

$\in$ , シタガツテ  $\sigma_f$  ノ有限多項ノ表現ヲナス群デ,  $(D x_0) =$

對應スルト考ヘラレル。一般ノ係數体ノバアヒニモーツノ  
 $A =$  對應スル  $L_{\bar{A}}$  トシテ  $L_{\bar{A}} S$ 、全体ノ中カラ、都合ノヨ  
イ有限個(?) カラヲトルコトニシテ、上ノ  $A^i$  全体ガ群  
ヲナスマウニ出素レバ、 $(D_{\bar{A}})$  = 對應スル群ガ得ラレル訣  
デアルガ、此様ナ  $L_{\bar{A}}$  ノ選ビ方ガ分ラナイ。