



Title	群トソノ lattice ニツイテⅢ
Author(s)	岩澤, 健吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 225, p. 519-542
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74905
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

975. 群 G の $\text{lattice} = \text{ツイテ III}^{1)}$

岩 澤 健 吉 (東大)

I. 前ノ續キトシマシテ今度ハ主トシテ
有限デアルヤウナ Element ヲ含ム M -group ノ構造ニ
ツイテ述ベテ見タイト思ヒマス。

II = 述べマシタ様ニ 有限ノ M -group ノ構造ハハ
ツキリ定メルコトが出来ルノデアリマスガ、以下ノ考察ニ
於テハ唯ニ、三ノ簡單ナ事實ガケテ用ヒマス。

2. 念ノタメニモウ一度、定義記号ナドノ主ナモノヲ
挙ゲテオキマス。

群 G ノ部分群ヲ $a, b, c, \dots$ トシ a, b カラ生
成サレタ G ノ部分群ヲ $a \sim b$, a ト b トノ共通部分群ヲ
 $a \wedge b$ デ表ハシマス。 $a, b, \dots$ ノ全体ハ明カニ lattice
 $L(G)$ ヲツクリ、コレヲ G ニ属スル lattice ト呼ブコ

トニシマス。 $\mathcal{G}$ が M -group デアルトイフノハ $L(\mathcal{G})$ が modular lattice デアルコトヲ意味シマス。

即チ $\alpha \subseteq \beta$, b が $\mathcal{G}$ ノ部分群トスルトキ

$$\alpha \cup (\beta \cap b) = (\alpha \cup b) \cap \beta \quad (1)$$

又 (1) =ヨリ $\alpha \cup b \supseteq \beta \supseteq \beta \cap b$ ト

$\alpha \supseteq \beta \supseteq \alpha \cap b$ トナル β トハ一対一ニ對應シ lattice isomorphism

$$\alpha \cup b / b \cong \alpha / \alpha \cap b \quad (2)$$

ヲ與ヘマス。

サテ先ツ

定理1. $\mathcal{G}$ が任意ノ M -group トスレバ $\mathcal{G}$ ノ element 有限ノ order 有スルモノ、全体ハ $\mathcal{G}$ ノ characteristic subgroup ヲツクル。

証明 以下ニ於テモ屢々出テ来マスカラ有限ノ order 有スル element ヲ略シテ E -element, 無限ノ order 有スル element ヲ U -element ト呼ブコトニシマス。 A, B が E -element トスルトキ $AB \in \text{亦 } E\text{-element}$ デアルコトヲ云ヘバヨイワケデス。
 $\alpha = \{A\}$, $b = \{B\}$ トシテ (2) ヲ適用スレバ $\{A, B\}$ ハ有限ノ群, 即チ

$\{A, B\} \supset \alpha_1 \supset \alpha_2 \supset \dots \supset 1$ ナル chain ハ常ニ有限ニ終ルコトガ分リマス。 C が $\{A, B\}$ ニ含マレル U -element トスレバ $\{C\} \supset \{C^2\} \supset \{C^4\} \supset \dots$ ハ無限ノ chain ヲ作りマスカラ、コレハ前ニ述ベタコトニ反シ

マス。ヨツテ $\{A, B\}$ ノ element ハ凡テ E-element
特ニ AB ハ E-element デアリマス。

II = 於テハ $\phi = \phi$ + ル場合ヲ考察シマシタ。ヨツテ IX
下 = 於テハ $\phi \neq \phi$, 即チ ϕ が少クトモ $\cup$ -element
ヲ含ム場合ヲ調べヨウト思ヒマス。

補助定理 I. ϕ 7 M-group, A, B 7 ϕ 1 element

トシ $\{A\} \cap \{B\} = 1$, 且ツ A ハ $\cup$ -element トスル。

然ラバ B 7 含ム $\{A, B\}$ ノ部分群ハ

$$\{A, B\}, \{A^2, B\}, \{A^3, B\}, \dots, \{B\}$$

= ヨツテ 興ヘラレル。

証明 $\alpha = \{A\}$ $\beta = \{B\}$ トシテ (2) 7 適用スレバ

$$\alpha \cap \beta = 1 \text{ + ル故 } \{A, B\} / \{B\} \simeq \{A\}$$

$\{A\}$ ノ部分群ハ明カニ $\{A\}, \{A^2\}, \{A^3\}, \dots$ デ
スカラ、コレカラ 定理ヲ得マス。

コノ補助定理ニヨリ ϕ ノ $\cup$ -element ト E-element
トノ関係ヲ興ヘル次ノ定理ガ得ラレマス。

定理 2. A 7 $\cup$ -element, B 7 E-element トシ,

$$\text{ソノ order } 7 m \text{ トスレバ } A B A^{-1} = B^r, (m, r) = 1.$$

即チ A ハ $\{B\}$ ノ normaliser $N(\{B\})$ = 含マ
レル。

証明. $\alpha = \{A\}$, $\beta = \{B\}$ トスレバ $\alpha \cap \beta = 1$ デア

ルカラ、補助定理 I = ヨリ、 β 7 含ム $\alpha \cup \beta$ ノ部分群
ハ

$$\{A, B\}, \{A^2, B\}, \{A^3, B\}, \dots, \{B\}$$

ニ限リマス。従ツテ $\{B, ABA^{-1}\}$ ハコレヲノウチノ
ドレカト一致スルワケデスガ $B \in ABA^{-1} \in E\text{-element}$
デスカラ定理1ニヨリ $\{B, ABA^{-1}\}$ ハ $E\text{-element}$
ノミヲ含ム。

ヨツテ $\{B, ABA^{-1}\} = \{B\}$, $ABA^{-1} = B^r$ トナリマス。

証終

コノ定理ヲ用ヒテ次ノ重要ノ結果が得ラレマス。

定理3. $M\text{-group}$ $\mathcal{G} =$ 於テ $\mathcal{G} \neq \mathcal{G}$ トラバ $\mathcal{G}$ ハ
 $abel$ 群デアル。

証明 Σ ツノ $\mathcal{U}\text{-element}$, A, B テ $\mathcal{G}$ ノ任意ノ
 $element$ トシマス。定理2ニヨリ $\Sigma A \Sigma^{-1} = A^{\alpha}$ 。
 $B \Sigma$ モ亦 $\mathcal{U}\text{-element}$ デスカラ ($B \Sigma$ ガ $E\text{-element}$
トラバ定理1ニヨリ $B^{-1}(B \Sigma) = \Sigma \in E\text{-element}$
トナル)

同様ニ $(B \Sigma) A (B \Sigma)^{-1} = A^{\beta}$, ヨツテ $BA^{\alpha}B^{-1} = A^{\beta}$,

即チ B ハ A ノ $normaliser$ $N(\{A\}) =$ 含マレル。

A, B ハ $\mathcal{G}$ ノ任意ノ $element$ デアツタノデスカラ、
コレカラ $\mathcal{G}$ ハ $abel$ 群デナケレバ $hamiltonian$
 $group$ デナケレバトラヌコトが分リマス。後者ノ場
合ニハ $\mathcal{G}$ ハ $quaternion$ $group$ $\mathcal{Q}_8$ ヲ含ミマス。
定理2ニヨリ $\Sigma \mathcal{G} \Sigma^{-1} = \mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ ハ有限群デスカラ
 Σ ハ適宜ト巾 $\Sigma^r = \Sigma$ 。ヲトレバ Σ ト $\mathcal{G}$ ノ各

$element$ トハ $commutative$ トナリマス。サテ
 $\mathcal{G}_1 = \{\mathcal{G}, \Sigma\} / \{\Sigma^4\}$ トスレバ $\mathcal{G}_1$ ハ 2-group デ

勿論 M -group デナケレバナリマセンガ $\Pi = \text{ヨレバ } 2\text{-group}$ デ
 Quaternion group ヲ含ムモ、 Γ ハ $\text{of } (2, 2, \dots, \dots, 2)$ 型 abel 群トノ直積 デナケレバナリマセンカ
 ラ、コレハ矛盾デス。ヨツテ Γ ハ abel 群 デナケレ
 バナリマセン。 証終

(of が M -group デナイコト、従ツテ矛盾ヲ生ズル
 コトハ勿論直接計算シテモ容易ニ分リマス)

3. $\text{次} = \text{of}/g$ ノ構造、一般ニ 1 以外ノ element ガ凡
 テ U-element デアル如キ M -group ノ構造ヲ調べ
 ルヲケマスガ、大分面倒デスカラ、補助定理ニヨリ段々片
 付ケテ行クコトニシマス。

補助定理 2. of ヲ M -group, A ヲ of ノ U-element ,
 B ヲ任意ノ element トスルトキ、適當ニ整数 d, β ニ對シ

$$B A^d B^{-1} = A^\beta \quad (3)$$

ヲラバ $d = \beta$, 即チ $B A^d = A^d B$ トナル。

証明 先ツ $\{A\} \cap \{B\} \neq 1$ トシテ $A^\mu = B^\nu$ トシマス

(3) ノ両辺ヲ μ 乗スレバ $B^{-1} A^d \mu B^1 = A^d \mu = A^\beta \mu$

ヨツテ $d\mu = \beta\mu$, $d = \beta$

$\text{次} = \{A\} \cap \{B\} = 1$ トシマス。一般ニ γ ヲ任
 意ノ整数トスルトキ $\alpha = \{A^\gamma\}$, $b = \{B\}$,

$c = \{A\}$ トシテ (1) ニヨツテ計算スレバ

$$\begin{aligned} \{A\} \cap \{A^\gamma, B\} &= c \cap (\alpha \cup b) = \alpha \cap (b \cap c) \\ &= \alpha = \{A^\gamma\} \end{aligned}$$

(3) カラ $A^\beta \cap \{A^d, B\} = \text{含マレマスカラ}$, 上ノ計

真=ヨリ $A^\beta \in \{A^\alpha\}$. 一方 $A^\alpha = B^{-1} A^\beta B$ カラ
 $A^\alpha \in \{A^\beta, B\}$, ヨツテ $A^\alpha \in \{A^\beta\}$, コレカラ
 $\alpha = \pm \beta$, $A^\alpha = A$, トオケバ

$$BA, B^{-1} = A, \pm 1.$$

ヨツテ $BA, B^{-1} = A, \pm 1$ ト假定シテ矛盾ヲ生ズルコト
ヲ示シマス。 $B^2 A, B^{-2} = A$, カラ $B^2 \in \{A, B\}$
, $\text{Center} = \text{属シ}$, 又 $\{A^4\}$ ハ明カニ $\{A, B\}$,
normal subgroup デアリマスカラ

$$\bar{G} = \{A, B\} / \{A^4, B^2\} \text{ トオケバ } \bar{G} \text{ ハ}$$

$$\bar{A}^4 = 1, \bar{B}^2 = 1, \bar{B}\bar{A}, \bar{B}^{-1} = \bar{A},$$

=ヨリ與ヘラレマスガ、コレガ $M\text{-group}$ デナイコ
トハ容易ニ分リマスカラコレハ矛盾デアリマス。

証終

ユノ補助定理ヲ用ヒテ先ヅ次ノコトヲ証明シマス。

定理4. G 7 $M\text{-group}$ トシ G 1 element ハ
1ヲ除ケバ凡テ $\cup\text{-element}$ ナリトスル。ユノトキ
 A, B 7 G 1 任意1 element, $\{A\} \cap \{B\} \neq 1$ ト
スレバ $\{A, B\}$ ハ *cyclic group* デアル。

証明. $AB = BA$ ナルコトヲ云ヘバ $\{A, B\}$ ハ
torsion 1 ナイ *abel 群* デ $\{A\} \cap \{B\} \neq 1$ デスカ
ラ容易ニコレガ *cyclic* デアルコトが分リマス。ヨ
ツテ $A \neq BAB^{-1}$ ト假定シテ不合理ヲ導クコトニシマ
ス。 $\{A\} \cap \{B\} = \{x\}$, $x = A^\mu$ トスレバ x ハ
 $\{A, B\}$ 1 *center* = 属スル故 $(BAB^{-1})^\mu = A^\mu$.

即チ $\{BAB^{-1}\} \cap \{A\} \neq 1$ デアリマスカラ

$$\{A\} \cap \{BAB^{-1}\} = C, A^\alpha = BAB^{-1} = C \text{ トオケ}$$

バ前補助定理ニヨリ $\alpha = \beta$ ナルコトが分リマス。

ヨツテ

$$A_1 = A, A_2 = BAB^{-1}, A_1^\alpha = A_2^\alpha = C = \{A_1\} \cap \{A_2\},$$

$$\overline{\mathcal{G}} = \{A_1, A_2\} / \{C\}$$

トスレバ $\overline{\mathcal{G}}$ ハ E-element $\bar{A}, \bar{A}_2$ ニヨリ生成サレ

マスカラ定理 1 ニヨリ $\overline{\mathcal{G}}$ 1 element, order ハ
凡テ有限デ特ニ $(\bar{A}, \bar{A}_2^{-1})^\gamma = 1$ ナル γ が存在シマス。

$(A, A_2^{-1})^\gamma = C^\gamma$ トオケバ, 假定ニヨリ A, A_2^{-1} , order
ハ無限デスカラ $(A_1 = A_2$ ナルトキハ定理ハ明ラカ)

$$C^\gamma \neq 1, \gamma \neq 0.$$

$$\text{コノデ } \mathcal{a} = \{A, C^\gamma\}, \mathcal{b} = \{A_2 C^\gamma\}, \mathcal{c} = \{A_1\}$$

トスレバ容易ニ

$$\begin{aligned} \mathcal{a} \subseteq \mathcal{c}, \mathcal{a} \cap \mathcal{b} &= \mathcal{c} \cap \mathcal{b} = \{(A, C^\gamma)^\alpha\} \\ &= \{C^{1+\alpha\gamma}\} \end{aligned}$$

又 $\mathcal{a} \vee \mathcal{b}$ ハ $(A, C^\gamma)(A_2 C^\gamma)^{-1} = A_1 A_2^{-1} = C^\gamma$ ナ含
ム故

$$\mathcal{a} \vee \mathcal{b} = \{A, C^\gamma, A_2 C^\gamma, C^\gamma\} = \{A_1, A_2\} = \mathcal{c} \vee \mathcal{b}.$$

$$\text{ヨツテ (2) カラ } \mathcal{a} = \mathcal{c}, \{A_1^{1+\alpha\gamma}\} = \{A_1\}. \gamma \neq 0$$

ナル故, コレハ不合理デアリマス。

証終

次ニ A, B ナ $\mathcal{U}$ -element トシ $\{A\} \cap \{B\} = 1$ ナル場
合ヲ考察スルヲケデスカ、ソノ首ニ矢張り補助定理ヲ導ケ
テオキマス。

補助定理 3. $G = \{A, B\}$ が M -group トシ

$A^2 = B^2 = 1$ トスレバ G は有限群デアル。

証明. 定理 1 = ヨリ. トモカク G の各 element, order は有限デアリマス。ヨッテ $C = A^r B$, $C^r = 1$ トスレバ $G = \{A, C\}$ デ $ACAC = 1$ 即チ $ACA^{-1} = C^{-1}$ 。

G は高々 order $2r$, 有限群デアルコトが分リマス。

証終

補助定理 4. $G = \{A, B\}$ が M -group, A, B は $\mathcal{U}$ -element デ $\{A\} \cap \{B\} = 1$ トスル。コノトキ G が Index 有限, abelian normal subgroup α を含トバ G はソレ自身 abel 群デアル。

証明. 假定 = ヨリ G/α は有限群デアルカラ A^α , $B^\beta \in \alpha$ トル α , β が存在シマス。 α は abel 群ナル故 $A^\alpha B^\beta = B^\beta A^\alpha$. $\{B^\beta A B^{-\beta}\} \cap \{A\} \neq 1$
(2) = ヨリ

$$\frac{\{B^\beta A B^{-\beta}, A\}}{\{A\}} \cong \frac{\{B^\beta A B^{-\beta}\}}{\{B A B^{-1}\} \cap \{A\}}$$

$\{B^\beta A B^{-\beta}\} \cap \{A\} \neq 1$ デアルカラ $\{B^\beta A B^{-\beta}\}$ ト $\{B^\beta A B^{-\beta}\} \cap \{A\}$ トノ間 = 有限個シカ部分群ガナリ。ヨッテ左辺ノ $\{B^\beta A B^{-\beta}, A\}$ ト $\{A\}$ トノ間 = 有限個シカ部分群ガナリ。補助定理 1 = ヨレバ $\{A\}$ ト $\{A, B\}$ トノ間 = アル部分群ハ $\{A, B\}$, $\{A, B^2\}$,

$\dots, \{A\}$ が成り立つ。 $\{B^{\rho}AB^{-\rho}, A\} \neq \{A\}$ と
 スレバ $\{B^{\rho}AB^{-\rho}, A\} = \{A, B^{\gamma}\}$. 然ル $= \{A, B^{\gamma}\}$ と $\{A\}$ との間 $= \{A, B^{\gamma}\}, \{A, B^{2\gamma}\}, \dots$
 ナル無限個ノ部分群が存在スルカラ $\{B^{\rho}AB^{-\rho}, A\} = \{A\}$
 デナケレバナラヌ。ヨツテ $B^{\rho}AB^{-\rho} = A^{\varepsilon}$, 補助定
 理 2 = ヨリ $B^{\rho}AB^{-\rho} = A$. $\{ABA^{-1}\} \cap \{B\} \neq /$
 デアルカラ今ト同シ考察ヲ繰返セバ $AB = BA$.

以上ノ補助定理ヲ用ヒテ次ノ結果ガ得ラレマス。

定理 B. ϕ 7 任意ノ M-group, A, B 7 ϕ ノ
 U-element トシ $\{A\} \cap \{B\} = /$ トスレバ
 $AB = BA$.

証明. $\phi = \{A, B\}$ トシテヨイワケデス。証明ハ帰謬
 法 = ヨリ ϕ が abel 群 ナイト假定シテ矛盾ヲ導
 クコト = シマス。

先ヅ ϕ ノ 1 以外 = E-element 7 含マヌコトヲ証
 明シマス。

$x \neq /$ 7 E-element トスレバ $\{x\} \cap \{B\} = /$
 ナル故 (2) = ヨリ $\{x, B\}$ と $\{B\}$ とノ間ノ部分群
 ハ $\{x\}$ ノ部分群ト $/ : /$ = 對應シマス。然ル = 補助
 定理 1 = ヨレバ $\{x, B\} = \{A^{\alpha}, B\} \neq \{A^{\alpha}, B\}$ と
 $\{B\}$ とノ間 $= \{A^{\alpha}, B\}, \{A^{2\alpha}, B\}, \{A^{3\alpha}, B\}, \dots$
 $\dots, \{B\}$ ナル無限 = 多クノ部分群が存在シマスカラ
 コレハ矛盾デアリマス。

サテ $\phi_1 = \{B, ABA^{-1}\}$, $\phi_2 = \{B^2, AB^2A^{-1}\}$ トシマ

ス。

$\{A\} \cap \{B^2\} = 1$ カラ、矢張り補助定理 1 カラ

$\mathcal{O}_2 = \{A^B, B^2\}$ トカケマス。 $AB^2A^{-1} \in \mathcal{O}_2$ ナスカラ

$\mathcal{O}_2 \cap \{A, B^2\}$, *normal subgroup* トナリマ

ス。一方 $\mathcal{O} = \{AB, B\}$ $\{AB\} \cap \{B\} = 1$ ナル故

($\{AB\} \cap \{B\} \neq 1$ トスレバ初メニ述ベタ注意及ビ定

理 4 カラ $(AB)B = B(AB)$, $AB = BA$ トナリ $\mathcal{O}$ ハ

abel 群 トナッテ 假定ニ反シマス。)

同様ノ考察ヲ $\mathcal{O} = \{AB, B\}$, $\mathcal{O}_2 = \{B^2, (AB)B^2(AB)^{-1}\}$

= 對シテ行ハバ $\mathcal{O}_2$ ハ又 $\{AB, B^2\}$, *normal*

subgroup トナリ結局 $\mathcal{O}$, *normal subgroup*

デアアルコトガ分リマス。

同ジ様ニシテ (モット簡單ニ) $\mathcal{O}_1$ ガ $\mathcal{O}$ デ *normal*

デアアルコトモ分リマス。サテ $\mathcal{O}_1/\mathcal{O}_2$ ハ *order* 2 ナル

element $\bar{B}$, $\bar{A}\bar{B}\bar{A}^{-1} = \bar{B}$ ニヨリ生成サレタ *M-group*

デスカラ補助定理 3 ニヨリ有限群デアリマス。ヨッテ

今 $\mathcal{O}/\mathcal{O}_2$ ガ無限群デアルトスレバ $\mathcal{O}/\mathcal{O}_1$ モ亦無限群

デナケレバナリマセン。

然ルニ $\mathcal{O}_1$ ハ B ヲ含ム故、補助定理 1 ニヨリ

$\mathcal{O}_1 = \{A^B, B\}$ 又ハ $\mathcal{O}_1 = \{B\}$ デアリマスガ、前者ノ

場合ニハ $\mathcal{O}/\mathcal{O}_1$ ハ有限群ニナリマスカラ $\mathcal{O}_1 = \{B\}$ 。

$\{B\}$ ハ $\mathcal{O}$, *normal subgroup* デスカラ

$ABA^{-1} = B^2$, 補助定理 2 ニヨリ $AB = BA$ 。コレハ

假定ニ反シマス。ヨッテ $\mathcal{O}/\mathcal{O}_2$ ハ有限群 $\mathcal{O} \neq \{A, B^2\} \supset \mathcal{O}_2$

ナル故 $\phi \neq \phi_2$. 有限 M -group ϕ meta-abel
群デアリマスカラ (II 参照) コレカラ $\phi \neq \phi'$ ナルコ
トが分リマス。

$\{A\} \cap \{B\} = 1$, 且ツ $\phi' \neq 1$ デアリマスカラ $\{A\} \not\subseteq \phi'$
又ハ $\{B\} \not\subseteq \phi'$. 今 $\{A\} \not\subseteq \phi'$ ト假定シマス。

$\{A\} \neq \{A\} \cup \phi'$ ナル故, 補助定理 1 = ヨリ $\{A\} \cup \phi'$
 $= \{A, B^u\}$, $u \neq 0$. $\{A\} \cup \phi' / \phi'$ ハ A カラ生成
サレタ cyclic group デスカラ適當 = v トレバ
 $B^u \equiv A^v (\phi')$ 即チ $B_1 = B^u A^{-v} \in \phi'$. $\{A\} \cup \phi' = \{A,$
 $B_1\}$. サテ $\{A\} \cap \{B_1\} = 1$ トスレバ定理 4 = ヨリ
 $\{A\} \cup \phi'$ ハ abel 群 $\phi / \{A\} \cup \phi'$ ハ有限群デスカ
ラ、補助定理 4 = ヨリ $\phi \simeq$ 亦 abel 群トナリ假定 =
反シマス。ヨツテ $\{A\} \cap \{B_1\} = 1$.

ϕ' ハ $\{A, B_1\}$ ノ部分群デ B_1 ヲ含ムカラ補助定理 1
= ヨリ $\phi' = \{A^r, B_1\}$ 又ハ $\phi' = \{B_1\}$, 先ツ $\phi' =$
 $\{B_1\}$ トセヨ。補助定理 2 = ヨリ B_1 ハ ϕ' center
= 属シ $\{A\} \cup \phi' = \{A, B_1\}$ ハ abel 群デアリマス。
 $u \neq 0$ トスレバ $\phi / \phi' \cup \{A\}$ ハ有限次 / element カ
ラ $\bar{A}, \bar{B}$ カラ生成サレルカラ有限群, ヨツテ補助定
理 4 = ヨリ ϕ ハ abel 群トナリマス。 $u = 0$ トスレ
バ $B_1 = B^u$ デアルカラ $\{B\}$ ハ ϕ normal sub-
group; $ABA^{-1} = B^s$, 補助定理 2 = ヨリ $s = 1$,
 $AB = BA$, 即チ ϕ ハ abel 群。

何レ = シテモ矛盾トナリマス。 $\phi' = \{A^r, B_1\}$ トスレ

バ G/G' は有限群デス。結局今マデノ所デ G が abel 群デナイトスレバ $G \neq G'$, G/G' は有限群デアルコトガホリマシタ。

コノデ G' は abel 群デアリマセン。(補助定理4) 且ツ $G' = \{A^x, B\}$ デスカラ G ノ代リニ G' ヲトツテ考ヘレバ $G' \neq G''$, G'/G'' は有限群。 $G'' = \{A^y, B\}$ デスカラ $G'' \neq G'''$, G''/G''' は有限群トナリマシタ。ヨツテ G/G''' は有限群デスカ、有限ノ M -group は meta abel 群デアルカラ、コレハ矛盾デス。即チ定理ハ証明サレタ。 証終

定理4, 5 が直チニ

定理6. G が M -group トシ /X 外ノ G ノ element ノ order ハスベテ無限デアルトスレバ G は abel 群デアル。

4. 初メニ G ノ任意ノ M -group, G ノ E -element ノ全体カラ出来タ normal subgroup トシマス。定理6 ニヨリ G/G は torsion ノ E -abel 群デアリマス。今ソノ rank ヲ n トシマス。($n = \infty$ デモヨイ) 先ツ $n \geq 2$ トシマス。然ルトキハ G ノ $\{A\} \cap \{B\} = 1$ + $n = \infty$ ノ E -element A, B ノ含ミマス。

サテ G ノ任意ノ E -element C ヲトレバ $\{A\} \cap \{C\} = 1$ 又 $\{B\} \cap \{C\} = 1$ ($\{A\} \cap \{C\} \neq 1$, $\{B\} \cap \{C\} \neq 1$ ナラバ $\{A\} \cap \{B\} \neq 1$ トナリ 假定ニ反スル)。ヨツテ

例へば $\{A\} \cap \{C\} = 1$ トシマス。定理5カラ $AC = CA$ 。
 コノトキ又 $\{B\} \cap \{C\} = 1$ ナラバ $BC = CB$ 。
 $\{B\} \cap \{C\} \neq 1$ トシテ $B^\rho = C^\gamma$ トスレバ $\{AC\} \cap \{B\} = 1$
 $(\{AC\} \cap \{B\} \neq 1, (AC)^\delta = B^\varepsilon$ トスレバ
 $A^\delta C^\delta = B^\varepsilon, A^\delta = B^\varepsilon C^{-\rho\delta}$ コレハ $\{A\} \cap \{B\}$
 $= 1$ (= 反スル)。ヨツテ矢張り定理5カラ $(AC)B = B(AC)$ 。
 $AB = BA$, ナル故コレカラ $BC = CB$ 。即チ任意ノ

U -element $C =$ 對シ常 $= AC = CA, BC = CB$ ナリ
 マス。更ニ $\in$ ウーツ任意 $= U$ -element D ナトル:
 $AD = DA, BD = DA, \{C\} \cap \{D\} = 1$ ナラバ勿論
 $CD = DC, \{C\} \cap \{D\} \neq 1$ ノトキハ $\{A\} \cap \{C\} = 1$
 ナルコトカラ前ト同様ニシテ $\{AD\} \cap \{C\} = 1$ 。ヨツテ
 $(AD)C = C(AD), CD = DC$ 。

即チ $\mathcal{G}$ ノ任意ノニツノ U -element ハ互ニ交換可
 能トナリマス。次ニ $E \in \mathcal{G}$ ノ任意ノ element, $C \in$ 任意
 ノ U -element トスレバ AE ハ U -element デスカラ
 $(AE)C = C(AE)$ 。ヨツテ $AE = EA$ 。即チ E -element
 ト U -element トモ交換可能。 $\mathcal{G}$ ハ abel 群デスカラ
 結局 $\mathcal{G}$ 自身 abel 群デアルコトが分リマス。即チ

定理7. $\mathcal{G}$ ナ任意ノ M -group, $\mathcal{G}$ ナ $\mathcal{G}$ ノ有限次ノ
 element 全体カラ出来ル normal subgroup
 トスルトキ abel 群 $\mathcal{G}/\mathcal{G}$ ノ rank が ≥ 2 デアルナ
 ラバ $\mathcal{G}$ ハ abel 群デアール。

5. 以下 abel 群デナイ様ナ $\mathcal{G}$ ナ考察スルコトニシ

マス。初メ $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ が free cyclic group デアル場合
ヲ考ヘ $\mathcal{H}$ generator ヲ選ビマス:

$\mathcal{G}/\mathcal{H} = \{\bar{g}\}$. $\mathcal{H}$ は abel 群 デスカラ $\mathcal{H}$ レヲ pri-
mary + component ノ直積 トシテ、 $\mathcal{H}$ ノ $\mathcal{H}$ ツヲ $\mathcal{P}$ ト
シマス。 $\mathcal{P}$ ノ 各 element ノ order ハ 素数 p ノ巾 デ
アリマス。 $\mathcal{P} =$ 於テ $X^{p^k} = 1$ ヲ満足スル element X
ノ全体 ノツクル部分群ヲ $\mathcal{P}_k$ ($k=0, 1, 2, \dots$) ト書ク
コトニシマス。 order p ナル任意ノ element A ヲ
トレバ定理 2 ニヨリ

$$\bar{g} A \bar{g}^{-1} = A^r.$$

コノ $r \not\equiv 1 \pmod{p}$ ト假定スレバ $\bar{g}$ ノ巾 $\bar{g}$ ヲ適當ニ
トルコトニヨリ、

$$\bar{g}_1 A \bar{g}_1^{-1} = A^{r_1}, \quad r_1 \not\equiv 1, \quad r_1^q \equiv 1 \pmod{p}$$

トスルコトが出来マス。 但シコノ q ハ $p \neq q$ ナル素数。
ソコデ $\{\bar{g}_1, A\} / \{\bar{g}_1^{p^q}\}$ ヲ考ヘレバ、コレハ order
 $p^2 q$ ナル群 デアリマスが計算ニヨリ容易ニ M -group
デナイクトが分リマス。(II 参照) ヨツテ $r \equiv 1 \pmod{p}$
デナケレバナリマセン。即チ

$$\bar{g} A \bar{g}^{-1} = A.$$

サテ $\mathcal{P}_k$ ノ 各 element ニ対シ適當ニ整数 r_k が $\pmod{p^k}$
デ一意的ニ定マツテ

$$\bar{g} A \bar{g}^{-1} = A^{r_k}$$

トナツタト假定シマス。($k=0, 1$ ノトキハ明ラカ) ソ
コデ今 order p^{k+1} ナル element B ヲ一ツトリマス。

定理 2 =ヨリ

$$Z B Z^{-1} = B^r \quad (1)$$

$B^p \in \mathcal{P}_k$, $Z B^p Z^{-1} = (B^p)^r = (B^p)^{r_k}$ カラ

$$r \equiv r_k \pmod{p^k} \quad (2)$$

ヨツテ $\{B, \mathcal{P}_k\}$ / 各 element $U =$ 対シテハ

$$Z U Z^{-1} = U^r \quad (3)$$

トカケルコトが分ります。 C 7 order p^{k+1} + 1 任意
/ element トシマス。 $\{B\} \cap \{C\} \neq 1$ + ラベ

$C \in \{B, \mathcal{P}_k\}$ + ル故 (3) カラ

$$Z C Z^{-1} = C^r$$

$\{B\} \cap \{C\} = 1$ トシテ

$$Z C Z^{-1} = C^{r'}, \quad Z (BC) Z^{-1} = (BC)^{r''}$$

コレカラ

$$B^{r''} C^{r''} = B^r C^{r'}$$

故ニ $r'' \equiv r' \equiv r \pmod{p^{k+1}}$

即チ $Z C Z^{-1} = C^r$.

ヨツテ $\mathcal{P}_{k+1}$ / 任意 / element $\nabla =$ 対シ

$$Z \nabla Z^{-1} = \nabla^r \quad (4)$$

が成立シマス。 $r = r_{k+1}$ トオケバ r_{k+1} ハ (4) = ヨリ

$\pmod{p^{k+1}}$ デ一意的ニ定マルコトハ明カデス。 且ツ

(2) カラ

$$r_k \equiv r_{k+1} \pmod{p^k} \quad (5)$$

今 $\mathcal{P}_0 = 1_0 \subset \mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}_2 \subset \dots$

ナル列ガアル所カラ先 ヅツト一致シタトシテ $\mathcal{P}_{k-1} \neq \mathcal{P}_k$,

$$p_k = p_{k+1} = \dots + \text{ル} \text{キ} \wedge \alpha = \alpha(p) = \gamma_k$$

トオキマス。又上ノ chain が一致セズ = 無限 = ツジク ト
キハ上記考察 = ヨリ、各 k ($k = 1, 2, \dots$) = 對シ
 γ_k が $\text{mod. } p^k$ テ一意的 = 定マリ、且ツ $\gamma_k \equiv \gamma_{k+1}$
 $\text{mod } p^k$ + ル故 $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k, \dots$ ハ p -adic
ノ意味デ収斂シマスカラ

$$\alpha = \alpha(p) = \lim \gamma_k$$

トオキマス。

然ラバ、イザレノ場合ニモ $\mathcal{F}$ / 任意ノ element $X =$
對シ

$$\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^{-1} = X^\alpha$$

ト書クコトが出来マス。(α が p -adic number テ
アル時ノ上ノ式ノ意味ハ明カト思ヒマス)

但シ $\gamma_1 = 1$ デスカラ (5) カラ

$$\alpha \equiv 1 \quad \text{mod. } p.$$

$$p=2 \text{ノ} \text{トキニハ特ニ} \bar{A}^4 = \bar{Z}^2 = 1, \bar{Z} \bar{A} \bar{Z}^{-1} = \bar{A}^{-1} \text{ + ル}$$

群ガ M -group デナイト云フコトカラ前ト同様ニシテ

$$\alpha \equiv 1 \quad \text{mod. } 4 \text{ヲ得ル。}$$

マトメテ云ヘバ $\mathcal{F}$ ノ各 component $\mathcal{F} =$ 對シ
 $\alpha(p) \equiv 1 \quad \text{mod. } p$ ($p=2$ + ラバ $\alpha(2) \equiv 1 \quad \text{mod. } 4$)
+ ル一途ノ p -adic number $\alpha(p)$ ヲトレバ、任意ノ
 $X \in \mathcal{F} =$ 對シテ

$$\mathcal{Z} \times \mathcal{Z}^{-1} = X^{\alpha(p)} \quad (6)$$

トスルコトが出来ルコトニナリマス。ユ、 = α ハ $\mathcal{F}$ /

element, order, maximum $\neq p^n$ ($n = \infty$ 入レテ) トスレバ $\text{mod. } p^n$ テ一意的 = 定マリマス。
 $\mathcal{G}/\mathcal{G}$, Erzeugende $\wedge \mathcal{G}$ 又 $\wedge \mathcal{G}^T$, class = 限ル
 故 $\wedge(p)$ $\wedge \mathcal{G} =$ ヨツテ定マルバセリデナク、逆数モ入レ
 テ云ヘバ $\mathcal{G} =$ ヨツテ $\text{mod. } p^n$ テ一意的 = 定マルコトニ
 ナリマス。

次 $\mathcal{G}$ $\neq$ torsion バカリ、任意、abel 群トシ
 各 primary component = 對シ $\wedge(p) \equiv 1 \text{ mod. } p$
 ($p=2$ トラバ $\wedge(2) \equiv 1 \text{ mod. } 4$) ナル $\wedge(p)$ フト
 リ (3) = ヨリ、コレ $\neq$ free cyclic group $\neq$ 拡張
 シテ $\mathcal{G}$ フツクレバ當 $= M$ -group が得ラレルコトヲ証
 明シマス。ソノタメ = 先サ A, B $\neq \mathcal{G}$, 任意, element
 トスルトキ適當 = 整数 α, β フトレバ

$$AB = B^\alpha A^\beta \quad (7)$$

トナルコトヲ証明シマス。 A 又 B が $\mathcal{G} =$ 属スルトキ
 (4) が殆ント明カデアリマスカラ $A = A_1 \mathcal{G}^\alpha$, $B = B_1 \mathcal{G}^\beta$,
 $A_1, B_1 \in \mathcal{G}$, $\alpha, \beta \neq 0$ トシマス。

$h_1 = \{\mathcal{G}, A_1, B_1\}$ トスレバ h_1 ハ有限 abel 群

$\mathcal{G}_1 = \{A_1, B_1\}$ フツデ cyclic = 拡張シタモノデアリマ
 ス。

$\mathcal{G}_i$, p_i -Sylowgroup $\neq \mathcal{P}_i$ ($i = 1, \dots, r$) ト
 スレバ $\mathcal{P}_i$, 各 element $A_i =$ 對シ (3) カラ

$$\mathcal{G} A_i \mathcal{G}^T = A_i^{r_i} \quad r_i \equiv 1 \text{ mod. } p_i$$

($p=2$ 時 $r \equiv 1 \text{ mod. } 4$)

トナリマス。ヨツテ $\mathfrak{G} \cap \mathcal{P}_i = \text{アル } \mathcal{P}_i^{n_i}$ 次, Automorphismヲ與ヘマスカタ $\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}^{p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r}}$ トスレバ

$\mathcal{C}_1, \mathfrak{h}_y =$ 於ケル Centraliser ハ丁度 $\{\mathcal{C}_1, \mathfrak{G}_0\}$ トナリマス。

$\{A\} \cap \{\mathfrak{G}\} = \{\mathfrak{G}^s\}, \{B\} \cap \{\mathfrak{G}\} = \{\mathfrak{G}^t\}$ トスレバ $\mathfrak{G}^{st}$ ハ A 及ビ B ト交換可能, 従ツテ A, B ト交換可能. ヨツテ $\mathfrak{G}^{st} \in \{\mathcal{C}_1, \mathfrak{G}_0\}, \mathfrak{G}^{st} \in \{\mathfrak{G}_0\}$. 従ツテ $st = p_1^{m_1} \cdots p_r^{m_r}$ 且 $(k, p_i) = 1, m_i \geq n_i (i = 1, \cdots, r)$ トスルコトが出来マス。

今 $\bar{\mathfrak{h}}_y = \mathfrak{h}_y / \{\mathfrak{G}^{st}\}$ トオキマス。 $\bar{\mathfrak{h}}_y$ / p_1 -Sylow-group ハ $\{\bar{\mathcal{P}}_1, \mathfrak{G}^{p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r} k}\}$ デアリマスが容易ニ分ルヌ $\bar{\mathfrak{h}}_y =$

$$\bar{\mathfrak{h}}_y = \{\bar{\mathcal{P}}_1, \mathfrak{G}^{p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r} k}\} \times \{\bar{\mathcal{P}}_2 \times \cdots \times \bar{\mathcal{P}}_r, \mathfrak{G}^{p_1^{m_1}}\}$$

デアリマスカタ p_1 -Sylowgroup デ $\bar{\mathfrak{h}}_y$ デ normal デアリマス。

同様ニシテ各 Sylowgroup が凡テ normal subgroupデアルコトが知ラレマス。即チ $\bar{\mathfrak{h}}_y$ ハ nilpotent デ且ツ各 Sylowgroup ハアル abel 群ヲ cyclic group デ拡張シタ形ニナツテキマス。例ヘバ p_1 -Sylow-group ハ $\{\bar{\mathcal{P}}_1, \mathfrak{G}^{p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r} k}\}$ デ $\bar{\mathcal{P}}_1$ / 各 element $\bar{A} =$ 對シ

$$\mathfrak{G}^{p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r} k} \bar{A} \mathfrak{G}^{-p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r} k} = \bar{A}^S$$

$$S \equiv 1 \pmod{p}. \quad (p=2 \text{ トラバ } S \equiv 1 \pmod{4})$$

ヨッテ $\overline{h}_y =$ 對シテハ適當=整數 x, y フトレバ
 $\overline{A}\overline{B} = \overline{A}^x \overline{B}^y$

ガ成立スル (II 参照)

即チ $AB \equiv B^x A^y \pmod{Z^{st}}$,

$$AB = B^x A^y Z^{kst}$$

然ルニ $Z^{st} = A^u$ デアルカラ

$$AB = B^x A^{y+ku} = B^x A^y \quad x=x, y=y+ku.$$

コレカラ α, β フ ϕ , 任意, 部分群 トスレバ

$$\alpha\beta = \beta\alpha \quad (5)$$

ガ成立シマス。 ($\alpha\beta$ ハ $A \in \alpha, B \in \beta$ +ル $A, B =$ 對シ
 テ AB +ル 全体デス。 $\alpha\beta = \beta\alpha$ +ラバ $\alpha\beta = \alpha\beta$
 $= \beta\alpha$) 任意, 部分群 $\alpha, \beta =$ 對シテ (5) ガ成立スルト
 キ ϕ フ quasi-hamiltonian group ト呼ブコ
 ト=シマシタ。 (II 参照) quasi-hamiltonian
 group ガ M-group デアルコトハヨク知ラレテキマ
 スカラ²⁾ コレデ 証明 サレマシタ。

ヨッテ

定理 8. ϕ フ M-group, ψ フ ϕ ノ 有限次,
 element ノ 全体カラ出来ル ϕ ノ normal sub-
 group トスルトキ ϕ/ψ ガ free cyclic group
 デアレバ ϕ ノ 次ノ如キ構造ヲ有ス。

$\phi/\psi = \{Z\}$ トシ ψ ノ p-component フ
 トスレバ ψ ノ 任意, element $A =$ 對シ

$$\exists A A^{-1} = A^{\alpha(p)} \quad (*)$$

$$\alpha(p) = \alpha(p) \wedge$$

$$\alpha(p) \equiv 1 \pmod{p}$$

$$(p=2 \text{ のとき } \alpha \equiv 1 \pmod{4})$$

＋ p -adic number $\mathbb{F}$ の element の order の最大 p^n ($n = \infty$ を入れば) トスレバ $\pmod{p^n}$ の逆数を入れば云へ、一意的に定まる $\mathbb{F}$ である。

逆 = torsion ばかり、任意、abel 群 G の

(*) = $\exists$ free cyclic group $\mathbb{F}$ の拡張 $\mathbb{F}$ コレ G トスレバ G は quasi-hamiltonian group トナル。従って勿論 M-group である。

次 = 一般の場合ヲ考察シマス。abel 群 G/H , rank が ≥ 2 である、定理 7 = $\exists$ G は abel 群 $\mathbb{F}$ として $\text{rank}(G/H) = 1$ トシマス。即ち G/H は有理数 / 加法群 / 部分群ト isomorph = したりマス。ヨッテ適当 =

$$G \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G \quad (8)$$

＋ G の normalreihe $\mathbb{F}$ トリ G_i/H free cyclic group, G_{i+1}/G_i ($i = 1, 2, \dots$) は素数 p_i 次 cyclic group トスルコトが出来マス。 $(G_{i+1}; G_i) = p_i$. (8) なる列が有限個しか部分群ヲ含マナレバ G/H 自身 free cyclic トナリ、ソレハ定理 8 = $\exists$ 與ヘラレマス。一般ニハ (8) の可附番個 / 部分群列ヲツク

ルヲケデス。

サテ任意 $\mathcal{O}_i$ ($i=1, 2, \dots$) フトレバソレハ定理
 δ = 與ヘラレタ構造ヲ有シマス。

$$\mathcal{O}_i / \mathcal{O} = \{\bar{z}_i\}, \quad \bar{z}_i A \bar{z}_i^{-1} = A^{\alpha_i(p)}, \quad A \in \mathcal{P} \quad (9)$$

$[\mathcal{O}_{i+1} : \mathcal{O}_i] = p_i$ テ $\bar{z}_{i+1}^{p_i}$ ハ $\mathcal{O}_i / \mathcal{O}$ ヲ生成シマスカラ
コノ = 特ニ

$$\bar{z}_{i+1}^{p_i} = \bar{z}_i E_i, \quad E_i \in \mathcal{O} \quad (10)$$

トナル様ニ $\bar{z}_{i+1}$ フトルコトが出来マス。

(9) カラ

$$\alpha_{i+1}(p)^{p_i} \equiv \alpha_i(p) \pmod{p^2} \quad (11)$$

$$\bar{z}_{i+1} \bar{z}_i \bar{z}_{i+1}^{-1} = \bar{z}_i E_i^{1 - \alpha_{i+1}} \quad (12)$$

(9) — (11) = ヨリ $\mathcal{O}$ カラ $\mathcal{O}_i$ = 次第 = 拡張サレテ行ク様子
ガワカリマス。 逆ニ $\mathcal{O} = \{\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots\}$ フ次ノ様
ニツクル； 各素数 p = 對シ $\alpha_i(p) \equiv 1 \pmod{p}$ ($p=2$
ナラバ特ニ $\alpha \equiv 1 \pmod{4}$) ナル $\alpha_i(p)$ ($i=1, 2, \dots$)
ヲ (11) フ満足スルモノヲトリ， 又 $\mathcal{O}$ カラ任意ニ E_i フトレ
バ (9), (10), (12) = ヨリ， 次々ニ $\mathcal{O}, \mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \dots$
ナレ拡張ヲ得ルコトが出来ル， (Schreier / Erweiterungssatz!) ³⁾

ソノ $\mathcal{O}_i$ / 全体ヲ $\mathcal{O}_i$ トスル。 然ラバ $\mathcal{O}_i$ ハ M-group
デアル。

何故ナラバ $\mathcal{O}_i$ / 任意ノ element A, B フトレバ $A,$
 B ハ共ニアル $\mathcal{O}_i$ = 含マレテキルガ $\mathcal{O}_i$ ハ定理 δ = 與ヘ

フレタ構造ヲ有スル故

$$AB = B^x A^y$$

ヲ満足スル整数 x, y が存在スル。ヨツテ G ハ quasi-hamiltonian, 従ツテ勿論 M-group デアルマス。

定理 9. G ハ M-group, φ ハ G ノ有限次 / element 全体ヲ生成ル normal subgroup トスルトキ G/φ , rank が 1 + ラバ G ハ次ノ如キ構造ヲ有ス。

$$G = \{ \varphi, z_1, z_2, \dots \}$$

φ / p -component $\neq \varphi$, $A \in \varphi$ / 任意 / element トスルトキ

$$z_i A z_i^{-1} = A^{\alpha_i(p)}$$

$\alpha_i = \alpha_i(p) \pmod{p^n}$ ($p^n \in \varphi$ / element / 最高 / order) $\neq$ 一意的ニ定マル p -adic number $\neq$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i(p) &\equiv 1 \pmod{p} \\ (p=2 \text{ + ラバ } \alpha &\equiv 1 \pmod{4}) \\ \alpha_{i+1}(p)^{p_i} &\equiv \alpha_i(p) \pmod{p^n} \end{aligned} \right\} (**)$$

$$z_{i+1}^{p_i} = z_i E_i$$

$$z_{i+1} z_i z_{i+1}^{-1} = z_i E_i^{1-\alpha_{i+1}} \left(z_{i+1} E_i z_{i+1}^{-1} = E_i^{\alpha_{i+1}} \right)$$

p_i ハ γ ル素数 (p = 無関係 = i ダケ = ヨツテ定マル)
又 $E_i \in \varphi$ / element デアル。

逆 = 任意 / 素数列 $\{p_i\}$, φ / 任意 / element

1 列 $\{E_i\}$ 及び各 p = ツイテ (**) フ満足スル
 p -adic number 1 列 $\{\alpha_i(p)\}$ = 對シ上記
 relation = ヨリ與ヘラレル群 G ハ quasi-
 Hamiltonian トナリ、從ツテ modular トナ
 ル。

コノ定理及ビ定理 7 カラ直チニ

定理 10. 無限 1 order フ持ツ element フ含ム
 群 G = 於テハ quasi-Hamiltonian group
 ト M -group トハ一致スル。

即チ G 1 任意 1 部分群 a, b, c $a \subseteq c$ = 對シ

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$$

が成立スルコト。

$$ab = ba = a \cup b$$

が成立スルコトハ等値ナルノデアリマス。コレハ一寸
 面白いコトヲ思ヒマス。

以上ニヨリ無限 1 order フ持ツ element フ含
 ム M -group 及ビ quasi-Hamiltonian group
 ノ構造ハ一應分ツタト云ヘルカト思ヒマス。 (終)

(脚註)

- 1) コレハ“群トソ 1 lattice = ツイテ I” (紙上談話會談話
 909) 及ビ“群トソ 1 lattice = ツイテ II” (位相數
 學次号) ノ續キデアリマス。II = 証明ナシテ述ベタ有
 限群ニ關スル定理ニツイテハ東大紀要 vol 4. Part 3
 フ参照下サイ。

(脚註ツヅキ)

- 2) 例へば次の様=証明サレマス。 $\alpha \subseteq \beta + \gamma$ トキ $\alpha^\vee(b \cap \gamma)$
 $= (\alpha^\vee b) \cap \gamma$ ヲ云へバヨイワケデスガ $\alpha^\vee(b \cap \gamma)$
 $\subseteq (\alpha^\vee b) \cap \gamma$ ハ明カデアリマスカラ $\alpha^\vee(b \cap \gamma) \equiv$
 $(\alpha^\vee b) \cap \gamma$ ヲ証明シマス。 $\alpha^\vee b = \alpha b = b\alpha$ デス
カラ右辺=含マレル element $\wedge C = AB, A \in \alpha,$
 $B \in b, C \in \gamma$ 。 $A^{-1}C = B, A \in \beta + \gamma$ 故
 $B \in b \cap \gamma$ 。 ヲツテ $C = AB \in \alpha^\vee(b \cap \gamma)$ 。
- 3) 例へバ Zassenhaus, Lehrbuch der grup-
pen theorie I. S. 89.