OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Erdos ノ問題ニ就イテ
Author(s)	近藤, 基吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 225, p. 542-553
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74906
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

976. Erdös ノ問題ニ就イテ

近藤　基吉(北大)

本誌ノ第二〇五号ニ掲載サレタ角谷氏ノ書簡ノ中ニ二三ノ問題が出テ居テ、ソノーツガ Erdös ノ提出シタ

「$0 \leqq x, y \leqq 1$ ナル square 内ノ measure ノ集合デ如何ナル $X+Y$ (但シ、X, Y ノ濃度ハ何レモ continuum ヲナル形ノ集合ヲ含マナイモノが存在スルカ」

デアル。コンデ X+Y ノ意味ガヨク判ラナイガ先ヲ vector sum 即チ X ノ点(a, b) トY ノ点(c, d) トカラ作ラレル(a+c, b+d) ノ全体カラナル集合ニ考ヘルト，G. Cantor ノ hypothèse du continu ノ下ニコレガ否定的ニ解決サレル．先ハムツカシイコトデハナク，次ノヤウニスレバ十分デアル．初メニ正方形 R: $0 \leqq x, y \leqq 1$ ニ変換．

$$\theta : x' = x - \frac{1}{2}, \quad y' = y - \frac{1}{2}$$

ヲ施シテ考ヘル。EヲRニ含マレル測度ノ可測集合トスルトキニ、θニ依ッテEハ θ(E) ニ移ル．ソコデ θ(E) ノ中ニ濃度 $\aleph_1$ ノ集合 ξ テ作ッテ $\xi + \xi \subseteq \theta(E)$ ノ成立ツヤウニスル．其ノ仕方ハ先ヅ 2_1 ヲ θ(E)・$\frac{1}{2}\theta(E)$ ノ中ニ選ブ（θ(E) ノ可測性カラコレハ可能）スルト ξ_1, $2\xi_1$ ∈ θ(E) デアル．今 ξ_β ($\beta < \eta < \Omega$) ガ θ(E) ノ中ニ選バレテ

$$2_\beta + \xi_\gamma \in \theta(E) \quad (\beta, \gamma < \eta)$$

ガ成立ツトスル．次ニ

$$\theta(E) \cdot \frac{1}{2}\theta(E) \cdot \prod_{\beta<\eta} \left(-\xi_\beta + \theta(E)\right)$$

ヲ作ル．θ(E) ノ可測性カラコレハ空デナイ。此ノ中ノ一点ヲ ξ_η トスル．スルト

$$\xi_\eta \in \frac{1}{2}\theta(E) \qquad \xi_\eta \in -\xi_\beta + \theta(E)$$

カラ $\xi_\eta + \xi_\beta \in \theta(E)$ ($\beta \leqq \eta$) デアル．此ノ様ニシテ選

バレタ $\mathfrak{M}_\beta$ ($\beta < \Omega$) ノ全体ヲ各トスレバ $\mathfrak{M}+\mathfrak{M} \subseteq \theta(E)$ ハ明カデアル．トコロデ

$$\theta(E) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + E$$

デアルカラ、$-\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)+\mathfrak{M}+\mathfrak{M} \subseteq E$ が成立ッ．故ニ $X = -\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)+\mathfrak{M}$, $Y = \mathfrak{M}$ トスレバ $X+Y \subseteq E$．シカモ X, Y ノ濃度ハ共ニ $\aleph_1$ デアル．今 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ヲ假定スレバ X, Y ノ濃度が continuum トナリ Erdös ノ問題が否定的ニ解決サレル。

此処デ $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ノ假定が取レレバヨイガ、此方法デハ困難デアル。但シコノ假定ヲ「測度 0 ノ集合ノ $\aleph_\xi$ (但シ $\aleph_\xi < 2^{\aleph_0}$) 個ノ和ハ又測度 0 デアル」デ置換ヘルコトガ出来ル。

次ニ、今考ヘタ問題デハ正方形 $0 \leqq x, y \leqq 1$ ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム集合 E ヲ考ヘタノデアルガ、ソノ代リニ平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム集合ヲ考ヘルト次ノヤウナ事ガ云ハレル。

「E ヲ平面上ノ殆ンド凡テノ点カラナリ、シカモ原点 O ヲ含ム集合トスルトキニ、E ニ合同ニ、濃度ガ $2^{\aleph_0}$ デ、非可測デ、シカモ有理数体ニ関シテ modul ヲナスモノガ存在スル（但シ $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ヲ假定スル）」

証明　有理数ノ全体ヲ無限系列ニ列ベテ

$$r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n, \cdots\cdots$$

トスル．次ニ平面上ニアル測度 > 0 ノ有界完全集合ノ全

体ハ濃度が $2^{\aleph_0}$ デアルカラ、$2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ニ依ッテ、此等ヲ Ω-sequence

$$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_\alpha, \cdots\cdots \qquad (\alpha<\Omega)$$

ニ列ベルコトガ出来ル、其処デ点列 Q_α $(\alpha<\Omega)$ ヲ次ノ様ニ定義スル。$\prod_{n=1}^{\infty} r_n E$ ハ E ノ性質カラ平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム。夫故ニ $P_1 \prod_{n=1}^{\infty} r_n E$ ハ又空デナイ。此中ノ一点ヲ Q_1 トスル。スルト

(1) $Q_1 \in P_1$

(2) 凡ヲ任意ノ有理数トスルトキニ $r_1 Q_1 \in E$ ガ成立ツ。

今 Q_β $(\beta<\eta<\Omega)$ ガ定義セラレテ

(3) $Q_\beta \in P_\beta$

(4) $r_1 Q_{\beta_1} + r_2 Q_{\beta_2} + \cdots\cdots + r_n Q_{\beta_n}$ (r_k ; 有理数 $\beta_k<\eta$) ハ E ニ含マレル。

ガ成立ツトスル。其処デ

$$\prod_{\beta_k<\eta} (r_1 Q_{\beta_1} + r_2 Q_{\beta_2} + \cdots\cdots + r_n Q_{\beta_n} + E)$$

ヲ作ル。$r_1 Q_{\beta_1} + \cdots\cdots + r_n Q_{\beta_n}$ ノ集合ハ可附番デアルカラ、此ノ集合ハ平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム。今コレニ含マレ、シカモ P_η ニ含マレル一点ヲ Q_η トスル。然ルトキニハ $r_1 Q_{\beta_1} + \cdots\cdots + r_n Q_{\beta_n} + r Q_\eta$ $(\beta_k<\eta)$ ハ E ニ含マレル。夫故ニ此ノ様ニシテ得ラレタ Q_η $(\eta<\Omega)$ ノ全体カラ作ラレル module M ヲ考ヘレバ、凡ソ E ガ成立チ、シ

カモ m ノ濃度ハ $2^{\aleph_0}$ デアル。

次ニ m が非可測デアルコトヲ示ス。m ノ外測度が0デナイコトハ平面上ノ凡テノ測度 >0 ノ有界完全集合ト m トガ素デナイコトヨリ明カデアル。次ニ m が可測デアルトスレバ、原点ヲ通ル直線 L ヲ適当ニ選ンデ mL が linear measure >0 ノ完全集合ヲ含ムヤウニ出来ル。然ルトキニハ H. Steinhaus ノ定理カラ L ノ凡テノ点ハ m ニ含マレルコトニナル。従ッテ初メカラEヲ修正シテEガ原点ヲ通ル直線ヲ含マナイ様ニシテ置ケバ（例ヘバ、0ヲ中心トシ半径1ノ円周上ノ点ヲ除ク）E ニ含マレル m モ亦原点ヲ通ル直線ヲ含マナイコトニナリ、従ッテ m ハ非可測デアル。　（証明完了）

トコロデ、Modul ニ対シテ此ノ様ナコトガ云ハレルト Hilpert ニ対シテハドウカト云フ問題ガ起ッテ来ルコレニ対シテハ

「Eヲ gauss 平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ミ且ツ凡テノ real ノ有理数ヲ含ム集合トスル時ニ、E ニ含マレル濃度 $2^{\aleph_0}$ ノ体デ gauss 平面上ノ任意ノ測度0ノ集合ト高々可附番個ノ要素ヲ共有スルモノガ存在スル（$2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ヲ假定スル）」

証明．gauss 平面上ニアル測度0ノ G_δ 集合ノ全体ハ濃度ガ $2^{\aleph_0}$ デアルカラ、$2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ニ依ッテ此等ノ集合ヲ Ω-sequence．

$$Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_\alpha, \cdots\cdots \quad (\alpha < \Omega)$$

ニ列ベルコトガ出来ル。又 gauss 平面上ノ凡テノ点ハ $2^{\aleph_0}=\aleph$ ニ依ッテ Ω-sequence.

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\lambda, \cdots\cdots \quad (\lambda<\Omega)$$

ニ列ベル事ガ出来ル。其処デ $\{\xi_\lambda\}$ $(\lambda<\Omega)$ テ帰納法ニ依ッテ次ノ様ニ定メル。

有理数ヲ係数トスル有理函数ノ全体ハ $\aleph$。デアル。今夫等ヲ

$$R_1(x),\ R_2(x),\ \cdots\cdots,\ R_n(x),\ \cdots\cdots$$

トスル。其処デ $E_{x}\{R_n(x)\in E-Q_1\}$ ヲ考ヘル。$E-Q_1$ ハ gauss 平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ムカラ、此ノ集合モ gauss 平面上ノ殆ンド凡ベテノ点ヲ含ム、夫故ニ

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{x}\{R_n(x)\in E-Q_1\}$$

ハ空デナイ。此集合ノ一点ヲ ξ_1 トスル。然ルトキニハ定義カラ

(1) $\xi_1\in E-Q_1$

(2) $R_n(\xi_1)\in E$

デアル。

次ニ ξ_λ $(\lambda<\eta<\Omega)$ ガ既ニ定義セラレタトスル。ξ_λ $(\lambda<\eta)$ 全体ノ集合ヲ ξ_η ト置キ

$$S_\eta=\sum_{\lambda<\eta} Q_\lambda$$

トスル。$\xi_\eta+S_\eta$ ハ又測度 0 ノ集合デアル。トコロデ

$R(\alpha_\alpha\ (\alpha<\eta))$（有理数体＝$\alpha_\alpha\ (\alpha<\eta)$ヲ adjoin シテ得ラレル体）ヲ係数域トスル x ノ有理函数ノ全体ハ可附番個デアル．夫等ヲ

$$R_1^*(x),\ R_2^*(x),\ \cdots\cdots,\ R_n^*(x),\ \cdots\cdots$$

トスル．$\alpha_\eta+S_\eta$ ハ測度０デアルカラ $E-(\alpha_\eta+S_\eta)$ ハ又 gauss 平面上ノ至ルトコロノ点ヲ含ム．夫レ故ニ $E_x^{ns}\{R_n^*(x)\in E-(\alpha_\eta+S_\eta)\}$ ハ又 gauss 平面上ノ至ルトコロノ点ヲ含ム．従ッテ

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_x^{ns}\{R_n^*(x)\in E-(\alpha_\eta+S_\eta)\}$$

ハ空デナイ．コノ中ノ一点ヲ α_η トスル．然ルトキニハ

(ｲ) $R_n^*(\alpha_\eta)\in E$

(ﾛ) $R_n^*(\alpha_\eta)\in Q_\alpha\ (\alpha<\eta)$

ガ成立ッ．此様ニシテ得ラレタ α_η（$\eta<\Omega$）ノ全体カラ作ラレル体 Γ ガ求メルモノデアル．夫レハ次ノ様ニシテ判ル．Γ ノ濃度ガ $2^{\aleph_0}$ デアルコトハ $2^{\aleph_0}=\aleph_1$ ヨリ明カデアル．又、$\Gamma\subseteq E$ ノ成立ッコトハ自明デアル．次ニ gauss 平面上ニアル測度０ノ集合 F ヲ考ヘル．然ルトキニハ $F\subseteq Q_\alpha$ ノ成立スル Q_α ガ存在スル．従ッテ（ﾛ）ヨリ F ニ含マレル Γ ノ要素ハ $R(\alpha_\beta\ (\beta<\alpha))$ ニ属スル．此ノ事カラ F ニ含マレル Γ ノ要素ノ集合ハ高々可附番デアル．即チ Γ ガ求メル体デアル．（証明完了）

此処デ「測度０ノ集合トハ高々可附番個ノ点ヲ共有スル」ト云フ條件ノ説明ヲシナケレバ判ラナイカモ知レナ

イガ、コレハ W. Sierpiński ニ依ッテ性質(S)ト呼バレルモノデ、コレカラ仲々面白イコトガ云ハレル。

「Eノ凡テノ非可附番部分体ハ非可測デアル、従ッテE自体モ非可測デアル」

証明. E_0ヲEノ非可附番部分体トスルトキニハ性質(S)ニ依ッテ測度>0デアル。ソレ故ニE_0ガ可測デアレバ、E_0ノ測度ハ正トナリ、従ッテE_0ノ中ニ測度0ノ完全集合ガ含マレナケレバナラナイ、コレハ性質(S)ニ矛盾スル。故ニE_0ハ非可測デアル。 (証明完了)

実レデハEノ中ニ非可附無限部分体ガ存在スルデアラウカ、コレニ対シテ

「Eノ中ニ$2^{\aleph_0}$個ノ互ニ相異ル非可附番部分体ヲ作ッテ、相異ルニツガrealノ有理数ノミヲ共有スルヤウニ出来ル。」

証明[1]. Eノ濃度ハ$2^{\aleph_0}$デアルカラ、其ノ要素ヲ

Ω_C-sequence (Ω_Cハ濃度$2^{\aleph_0}$ノ最小ノ順序数)

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\alpha, \cdots\cdots \quad (\alpha < \Omega_C)$$

ニ列ベルコトガ出来ル。其処デ$Z_{\alpha\beta}$ ($\alpha \leqq \beta < \Omega_C$)ヲ次ノヤウニ定メル。先ヅ$Z_{11} = x_1$トスル。今$Z_{\alpha\beta}$ ($\alpha < \xi$)及ビ$Z_{\xi\beta}$ ($\beta < \eta$)ガ定マッテヰタトスル。然ルトキニハ$R(Z_{\alpha\beta}\ (\alpha < \xi), Z_{\xi\beta}\ (\beta < \eta))$ノ濃度ハ$2^{\aleph_0}$ヨリ

(1) 守屋美賀雄氏ニ負フ所ガ多イ。

ホデアル。従ッテ此体ニコレニ関スル凡テノ代数的数ヲ附加シテ得ラレル体モ濃度〈2ᵃ⁰デアル。故ニ $\mathfrak{X}_\alpha$ ノ中ニ此ノ新シイ体ニ含マレヌモノガ存在スル．其ノ中デ指数ノ最小ノモノヲ ξ_α トスル．コノ様ニシテ得ラレタ ξ_α ニ対シテ体 $R(\xi_\alpha)$（ξ_α: fix）ノ全体ヲ考ヘル．コレガホムル部分体デアルコトハ明カデアル。　（証明完了）

次ニ凡ノ類ニ関スル性質トシテハ

「凡ハ toujours de première catégorie デアル．即チ任意ノ完全集合ニ関シテ凡ハ第一類デアル」

証明．　今Pヲ gauss 平面上ニアル完全集合トスル．PRノ測度ガ0ノ時ニハコレハ高々可附番デアルカラ、P凡ハ勿論Pニ於テ第一類デアル．次ニP凡ノ外測度＞0ノ時ヲ考ヘル．コノ時ニハP凡ノ Marsgleichlüille Hヲ定メテ H⊆P ト出来ル．然ルニHノ中ニ測度＞0ノ non dense ノ完全集合が存在スル故ニ第一類集合Jヲ定メテ H−J ガ測度0デアル様ニ十ン得ル．従ッテ

$$P凡 = P凡J + P凡(H-J)$$

ガ成立ツノデ、P凡(H−J)ハ高々可附番デアルカラPkハ又Pニ於テ第一類デアル．即チ、凡ハ toujours de première catégorie デアル。　（証明完了）

此ノ事カラEノ中ニ非可測デ第一類ノ体ノ含マレルコトガ判ッタガ、同様ニシテEが gauss 平面ノ到ル所デ第二類デシカモ Baire ノ性質ヲ有スルトキニ、Eノ中ニ Baire ノ性質ヲ有シナイデ測度0ノ体が存在スルコト

が示サレル．又

「Eが gauss 平面上ノ始ンド兄テノ点ヲ含ミ到ル所第二類デシカモ Baire ノ性質ヲ有スナレバ、Eノ中ニ非可測デ Baire ノ性質ヲ有シナイ体が存在スル（2^c_0 = c_1 ヲ假定スル）」

が云ハレル。

此様ナ事ヲ續ケテ行クト更ニ結果が出セルが、此処デハコレ丈ケニ止メテ置キタイト思フ。

追記：　性質（S）ヲ有スル体ノ存在ニ関シテハ

「尺ヲ非可測ノ体トスル時ニ、尺ニ含マレ尺ト同ジ mass gleichlile ヲ有シ、シカモ性質（S）ヲ有スル体が存在スル。」

が成立スルノデ、コレヲ使ッテEノ中ニ性質（S）ヲ有スル体ノ存在ヲ示スノが常道デアルト思フ．此命題ハ次ノ様ニシテ証明セラレル。

尺ノ要素ヲ Ω - sequence

$$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_\alpha, \cdots\cdots \qquad (\alpha < \Omega)$$

ニ列ベ、尺ノ mass gleichlile ニ含マレル測度0ノGの集合．測度＞0ノ完全集合ヲ夫々 Ω - sequence

$$Q_1, Q_2, \cdots\cdots, Q_\alpha, \cdots\cdots \qquad (\alpha < \Omega)$$

$$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_\alpha, \cdots\cdots \qquad (\alpha < \Omega)$$

ニ列ベル．其処デ α_α $(\alpha < \Omega)$ ヲ次ノ様ニ定メル．

有理数ヲ添数トスルn次ノ有理函数ヲ列ベテ

$$R_1(x),\ R_2(x),\ \cdots\cdots,\ R_n(x),\ \cdots\cdots$$

トスル。其処デ $\sum_{n=1}^{\infty} E_{x}^{ns}\left(R_n(x)\in Q_1\right)$ ヲ考ヘル。コレハ測度0デアル。従ッテ，コレニ含マレナイ P_1 点ガアル。ソノ中デ γ ノ最小ノモノヲ ξ_1 トスル。明カニ

(1) $R_n(\xi_1)\in Q_1$

デアル。今 ξ_α $(\alpha<\eta<\Omega)$ ガ定マッテ

(2) $\xi_\alpha\in P_\alpha$

(3) 尺 $(\xi_\beta\ (\beta<\alpha<\eta))$ ヲ係数域トスル x ノ有理函数 $R(x)$ ニ対シテ $R(x_\alpha)\in Q_\beta$ $(\beta\leqq\alpha)$

ガ成立スルトスル。其処デ尺 $(\xi_\alpha\ (\alpha<\eta))$ ヲ係数域トスル x ノ有理函数ヲ列ベテ

$$R_1^*(x),\ R_2^*(x),\ \cdots\cdots,\ R_n^*(x),\ \cdots\cdots$$

トスル。然ルトキニハ

$$S=\sum_{n=1}^{\infty} E_{x}^{ns}\left(R_n^*(x)\in\sum_{\alpha\leqq\eta}Q_\alpha\right)$$

ハ測度0デアル。今 P_η 点ニ含マレテSニ含マレナイ要素 x_η ガ存在スル。ソノ中デ γ ノ最小ノモノヲ ξ_η トスル。然ル時ニハ

(4) $\xi_\eta\in P_\eta$

(5) $R_n^*(\xi_\eta)\in Q_\alpha$ $(\alpha\leqq\eta)$

デアル。此様ニシテ作ラレル ξ_α $(\alpha<\Omega)$ カラ作ラレル体ガ求メルモノデアルコトハ前ノ時ト同様デアル。

(証明完了)

此処デ尚一ツ注意シテ置キタイコトハ

「Gauss平面ト同ビ Massgleichlüle ヲ有シ、real ノ有理数ヲ含ム集合ニデ R（有理数ヨリ成ル体）以外ニ体ヲ含マナイモノガ存在スル。」

デアル．コレヲ証明スルタメニ測度 >0 ノ完全集合テ Ω_c-sequence ニ列ベテ

$$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_\alpha, \cdots\cdots \qquad (\alpha < \Omega_c)$$

トスル．P_1 ノ一点ヲ ξ_1 トスル．ξ_α $(\alpha < \eta < \Omega_c)$ ガ定義サレテ (1) $\xi_\alpha \in P_\alpha$, (2) $0, \xi_\alpha$ ノ定メル直線ガ互ニ相異ルトスル．今直線ノ ξ_α $(\alpha < \eta)$ 上ニ $+$ イ P_η ノ一点ヲ ξ_η トシ $R + \sum_{\alpha < \Omega_c} (\xi_\alpha)$ テ考ヘル．コレガ求メル集合デアルコトハ容易ニ判ル。