



Title	Erdos ノ問題ニ就イテ
Author(s)	近藤, 基吉
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 225, p. 542-553
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74906
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

976. Erdős の問題 = 就イテ

近 藤 基 吉(北大)

本誌 / 第二〇五号 = 掲載サレタ角谷氏 / 書簡 / 中 = 二三ノ問題類カ出テ居テ、ソノ一ツガ Erdős / 提出シタ

「 $0 \leq x, y \leq 1$ ナル square 内 / measure 1 / 集合デ如何ナル $X + Y$ (但シ、 X, Y / 濃度ハ何レモ continuum) ナル形ノ集合ヲ含マナイモノガ存在スルカ」

デアル。コノデ $X+Y$ の意味がヨク判ラナイが先ヲ *vector sum* 即チ X ノ点 (a, b) ト Y ノ点 (c, d) トカラ作
 ラレル $(a+c, b+d)$ ノ全体カラナル集合ニ考ヘルト、
 G. Cantor ノ *hypothese du continu* ノ下ニ
 コレガ否定的ニ解決サレル。先ハムツカシイコトデハナク、
 次ノヌウニスレバト合デアアル。初メニ正方形 $R: 0 \leq x, y \leq 1$ ニ変換。

$$\theta: x' = x - \frac{1}{2}, \quad y' = y - \frac{1}{2}$$

ヲ施シテ考ヘル。 $E \subset R$ ニ含マレル測度ノ可測集合ト
 スルトキニ、 θ ニ依ツテ E ハ $\theta(E)$ ニ移ル。ソコデ $\theta(E)$
 ノ中ニ濃度代、ノ集合 Z テ作ツテ $Z + Z \subseteq \theta(E)$ ノ成立
 ツヌウニスル。其ノ仕方ハ先ヅ $Z_1 \subset \theta(E) \cdot \frac{1}{2} \theta(E)$ ノ中
 ニ選テ ($\theta(E)$ ノ可測性カラコレハ可能) スルト $Z_1, 2Z_1$
 $\in \theta(E)$ デアル。今 Z_β ($\beta < \eta < \aleph_1$) ガ $\theta(E)$ ノ中ニ選
 バレテ

$$Z_\beta + Z_\gamma \in \theta(E) \quad (\beta, \gamma < \eta)$$

ガ成立ツトスル。次ニ

$$\theta(E) \cdot \frac{1}{2} \theta(E) \cdot \prod_{\beta < \eta} (-Z_\beta + \theta(E))$$

ヲ作ル。 $\theta(E)$ ノ可測性カラコレハ空デナイ。此ノ中ノ
 一点ヲ Z_η トスル。スルト

$$Z_\eta \in \frac{1}{2} \theta(E) \quad Z_\eta \in -Z_\beta + \theta(E)$$

カラ $Z_\eta + Z_\beta \in \theta(E)$ ($\beta \leq \eta$) デアル。此ノ様ニシテ選

バレル $\Sigma_p (\beta < \aleph_1)$ の全体ヲ Σ トスレバ $\Sigma + \Sigma \subseteq \Theta(E)$
ハ明カデア。トコロデ

$$\Theta(E) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + E$$

デア。カラ、 $-\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \Sigma + \Sigma \subseteq E$ が成立ツ。故
ニ $X = -\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) + \Sigma$, $Y = \Sigma$ トスレバ $X + Y \subseteq E$ 。
シカモ X, Y ノ濃度ハ $\aleph_1 = \aleph_1$ デアル。今 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ノ假
定スレバ X, Y ノ濃度が continuum トナリ Erdős ノ
問題ガ否定的ニ解決サレル。

此処デ $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ノ假定ガ取レレバヨイガ、此方法デ
ハ困難デア。但シコノ假定ヲ「測度 μ ノ集合 A ノ $\mu(A)$ (但
シ $\mu(A) < 2^{\aleph_0}$) 但 μ ハ又測度デア」デ置換ヘルコト
ガ出来る。

次ニ、今考ヘタ問題デハ正方形 $0 \leq x, y \leq 1$ ノ殆ン
ド凡テノ点ヲ含ム集合 E ヲ考ヘタデア。ソノ代リニ
平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム集合ヲ考ヘルト次ノマウナ
事ガ云ハレル。

「 E ヲ平面上ノ殆ンド凡テノ点カラナリ、シカモ原
点 O ヲ含ム集合トスルトキニ、 E ニ含マレ、濃度が $2^{\aleph_0}$
デ、非可測デ、シカモ有理数体ニ関シテ *modul* ヲナス
モノガ存在スル (但シ $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ノ假定スル)」

証明 有理数ノ全体ヲ無限系列ニ列ベテ

$$r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$$

トスル。次ニ平面上ニアル測度 > 0 ノ有界完全集合ノ全

体ハ濃度ガ $2^{\aleph_0}$ デアルカラ、 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ = 依ッテ、此等
ヲ Ω -sequence

$$P_1, P_2, \dots, P_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega)$$

= 列ベルコトガ出来ル、其処ヲ点列 z_α ($\alpha < \Omega$) ヲ次ノ
様ニ定義スル。 $\prod_{n=1}^{\infty} \iota_n E \wedge E$ ノ性質カラ平面上ノ殆ンド

凡テノ点ヲ含ム。夫故 $= P, \prod_{n=1}^{\infty} \iota_n E \wedge E$ 又空デナイ。此中ノ
一ノ点ヲ z_1 トスル。スルト

$$(1) \quad z_1 \in P,$$

$$(2) \quad \iota \text{ヲ任意ノ有理数トスルトキ} = \iota z_1 \in E \text{ガ成立}$$

ツ。

今 z_β ($\beta < \eta < \Omega$) ガ定義セラレテ

$$(3) \quad z_\beta \in P_\beta$$

$$(4) \quad \iota_1 z_{\beta_1} + \iota_2 z_{\beta_2} + \dots + \iota_n z_{\beta_n} \quad (\iota_k, \text{有理数} \\ \beta_k < \eta) \wedge E = \text{含マレル。}$$

ガ成立ツトスル。其処ヲ

$$\prod_{\beta_k < \eta} (\iota_1 z_{\beta_1} + \iota_2 z_{\beta_2} + \dots + \iota_n z_{\beta_n} + E)$$

ヲ作ル。 $\iota_1 z_{\beta_1} + \dots + \iota_n z_{\beta_n}$ ノ集合ハ可附番デアアルカラ、
此ノ集合ハ平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ム。今コレニ含マ
レ、シカモ $P_\eta =$ 含マレル一ノ点ヲ z_η トスル。然ルトキニ
ハ $\iota_1 z_{\beta_1} + \dots + \iota_n z_{\beta_n} + \iota z_\eta$ ($\beta_k < \eta$) $\wedge E =$ 含マレ
ル。夫故ニ此ノ様ニシテ得ラレタ z_η ($\eta < \Omega$) ノ全体カラ
作ラレル *modul* m ヲ考ヘレバ、 $m \leq E$ ガ成立チ、シ

カモ m の濃度 $2^{\aleph_0}$ デアル。

次 = m が非可測デアルコトヲ示ス。 m の外測度が 0 デナイコトハ平面上ノ凡テノ測度 > 0 ノ有界完全集合ト m トが素デナイコトヨリ明カデアル。次 = m が可測デアルトスレバ、原点ヲ通ル直線 L ヲ適當ニ選ンデ $m \cap L$ が $\text{linear measure} > 0$ ノ完全集合ヲ含ムヤウニ出来ル。然ルトキニハ H. Steinhaus ノ定理カラ L ノ凡テノ点ハ m ニ含マレルコトニナル。従ツテ初メカラ E ヲ修正シテ E が原点ヲ通ル直線ヲ含ムナイ様ニシテ置ケバ (例ヘバ、 O ヲ中心トシ半径 1 ノ円周上ノ点ヲ除ク) E ニ含マレル m モ亦原点ヲ通ル直線ヲ含ムナイコトニナリ、従ツテ m ハ非可測デアル。(証明完了)

トコロデ、 Modul = 対シテ此ノ様ナコトガ云ハレルト Körper = 對シテハドウカト云フ問題が起ツテ来ルコレニ對シテハ

「 E ヲ gauss 平面上ノ殆ンド凡テノ点ヲ含ミ且ツ凡テノ real ノ有理數ヲ含ム集合トスル時ニ、 E ニ含マレル濃度 $2^{\aleph_0}$ ノ体デ gauss 平面上ノ任意ノ測度 0 ノ集合ト高々可附番個ノ要素ヲ共有スルモノが存在スル ($2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ヲ假定スル)」

証明. gauss 平面上ニアル測度 0 ノ G_δ 集合ノ全体ハ濃度が $2^{\aleph_0}$ デアルカラ、 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ ニ依ツテ此等ノ集合ヲ $\aleph_1$ -sequence.

$G_1, G_2, \dots, G_\alpha, \dots$ ($\alpha < \aleph_1$)

= 列べるコトが出来ル。又 Gauss 平面上、凡テ、点ハ
 $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ = 依ッテ $\aleph_1$ -sequence.

$$x_1, x_2, \dots, x_\alpha, \dots \quad (\alpha < \aleph_1)$$

= 列べる事が出来ル。某処デ $\{x_\alpha\}$ ($\alpha < \aleph_1$) テ帰納法 = 依
 ヲッテ次ノ様ニ定メル。

有理数ヲ係数トスル有理函数ノ全体ハ $\aleph_1$ 。デアアル。今
 夫等ヲ

$$R_1(x), R_2(x), \dots, R_n(x), \dots$$

トスル。其処デ $E_{\aleph_1} \{R_n(x) \in E - Q_1\}$ ヲ考ヘル。 $E - Q_1$
 ハ Gauss 平面上、殆ンド凡テノ点ヲ含ムカラ。此
 ノ集合ニ Gauss 平面上、殆ンド凡テノ点ヲ含ム。
 夫故ニ

$$\prod_{n=1}^{\aleph_1} E_{\aleph_1} \{R_n(x) \in E - Q_1\}$$

ハ空デナイ。此集合ノ一点ヲ z_1 トスル。然ルトキニ、ハ定
 義カラ

$$(1) \quad z_1 \in E - Q_1,$$

$$(2) \quad R_n(z_1) \in E$$

デアアル。

次ニ z_α ($\alpha < \aleph_1$) が既ニ定義セラレタトスル。

z_α ($\alpha < \aleph_1$) 全体ノ集合ヲ $S_\aleph_1$ ト置キ

$$S_\aleph_1 = \sum_{\alpha < \aleph_1} Q_\alpha$$

トスル。 $z_\aleph_1 + S_\aleph_1$ ハ又測度 0 ノ集合デアアル。トコロデ

$\mathcal{R}(\mathcal{Z}_\alpha(\alpha < \eta))$ (有理数体 = $\mathcal{Q}_\alpha(\alpha < \eta)$ を *adjoin* シテ得ラレル体) を係数域トスル $\mathcal{R}$ ノ有理函数ノ全体ハ可附番個ナル。夫等ヲ

$$R_1^*(x), R_2^*(x), \dots, R_n^*(x), \dots$$

トスル。 $\mathcal{Z}_\eta + S_\eta$ ハ測度 0 デアルカラ $E - (\mathcal{Z}_\eta + S_\eta)$ ハ又 *gauss* 平面上ノ殆んど凡テノ点ヲ含ム、夫レ故ニ $E_{\mathcal{R}} \{ R_n^*(x) \in E - (\mathcal{Z}_\eta + S_\eta) \}$ ハ又 *gauss* 平面上ノ殆んど凡テノ点ヲ含ム。従ツテ

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{\mathcal{R}} \{ R_n^*(x) \in E - (\mathcal{Z}_\eta + S_\eta) \}$$

ハ空テ + 1。コノ中ノ一系ヲ $\mathcal{Z}_\eta$ トスル。然ルトキニハ

$$(3) \quad R_n^*(\mathcal{Z}_\eta) \in E$$

$$(4) \quad R_n^*(\mathcal{Z}_\eta) \in \mathcal{Q}_\alpha \quad (\alpha < \eta)$$

ガ成立ツ。此様ニシテ得ラトタ $\mathcal{Z}_\eta$ ($\eta < \mathcal{S}_\mathcal{R}$) ノ全体カラ作ラレル体 $\mathcal{R}$ ガ求メルニデアル。夫レハ又ノ様ニシテ判ル。 $\mathcal{R}$ ノ濃度が $2^{\mathcal{S}_\mathcal{R}}$ デアルコトハ $2^{\mathcal{S}_\mathcal{R}} = \mathcal{S}_\mathcal{R}$ ヨリ明カデアル。又、 $\mathcal{R} \subseteq E$ ノ成立ツコトハ自明デアル。次ニ *gauss* 平面上ニアル測度 0 ノ集合 F ヲ考ヘル。然ルトキニハ $F \subseteq \mathcal{Q}_\alpha$ ノ成立スル $\mathcal{Q}_\alpha$ ガ存在スル。従ツテ (4) ヨリ F ニ含マレル $\mathcal{R}$ ノ要素ハ $\mathcal{R}(\mathcal{Z}_\beta (\beta < \alpha))$ ニ属スル。此ノ事カラ F ニ含マレル $\mathcal{R}$ ノ要素ノ集合ハ商々可附番デアル。即チ $\mathcal{R}$ ガ求メル体デアル。 (証明完了)

此処デ「測度 0 ノ集合トハ商々可附番個ノ点ヲ共有スル」ト云フ条件ノ説明ヲシナシレバ判ラナイヲモ知レナ

イガ、コレハ *W. Sierpinski's* = 依ッテ性質 (S)
ト呼バレルモノデ、コレカラ仲々面白いコトが云ハレ
ル。

「 $\mathcal{R}$ ノ元ノ非可附番部分体ハ非可測デアル、従ッテ
 $\mathcal{R}$ 自体ハ非可測デアル」

証明. $\mathcal{R}$ ノ非可附番部分体トスルトキニハ性
質 (S) = 依ッテ測度 > 0 デアル、ソレ故ニ $\mathcal{R}$ ガ可測デ
アレバ、 $\mathcal{R}$ ノ測度ハ正トナリ、従ッテ $\mathcal{R}$ ノ中ニ測度 0
ノ完全集合が含まレナケレバナラナイ、コレハ性質 (S)ニ
矛盾スル、故ニ $\mathcal{R}$ ハ非可測デアル。 (証明完了)

夫レデハ $\mathcal{R}$ ノ中ニ非可附番部分体が存在スルデアラ
ウカ、コレニ対シテ

「 $\mathcal{R}$ ノ中ニ $2^{\aleph_0}$ 個ノ互ニ相異ル非可附番部分体ヲ作ッ
テ、相異ルニツカ *real*ノ有理数ノミヲ共有スルモノニ出
来ル。」

証明⁽¹⁾. $\mathcal{R}$ ノ濃度ハ $2^{\aleph_0}$ デアルカラ、其ノ要素ヲ
 Ω -sequence ($\Omega \in \mathcal{R}$ ハ濃度 $2^{\aleph_0}$ ノ最小ノ順序
数)

$$x_1, x_2, \dots, x_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega)$$

ニ列ズルコトが出来ル。其処ガ $\Sigma_{\alpha\beta} (\alpha \leq \beta < \Omega)$ ヲ次
ノヤヨニ定ムル。先ツ $\Sigma_{11} = x_1$ ト置ク。今 $\Sigma_{\alpha\beta} (\alpha < \xi)$
及ビ $\Sigma_{\xi\beta} (\beta < \eta)$ ガ定義セラレタトスル。然ルトキニ
ハ $\mathcal{R}(\Sigma_{\alpha\beta} (\alpha < \xi), \Sigma_{\xi\beta} (\beta < \eta))$ ノ濃度ハ $2^{\aleph_0}$ ヨリ

(1) 守屋美賀雄氏ニ負フ所が多い。

小デアル。従ッテ此体=コレ=関スル凡テノ代数的數ヲ附加シテ得ラレル体モ濃度 < 2 也。故ニ Σ_n ノ中=此ノ新シイ体=含マレヌモノが存在スル。其ノ中デ指数ノ最小ノモノヲ Σ_{m_0} トスル。コノ様ニシテ得ラレタ Σ_{m_0} = 附シテ体 $R(\Sigma_{m_0} (\xi: \text{fix}))$ ノ全体ヲ考ヘル。コレが求ムル部分体デアルコトハ明カデアル。(証明完了)

次ニ R ノ類=関スル性質トシテハ

「 R ハ *toujours de première catégorie* デアル。即チ任意ノ完全集合=関シテ R ハ第一類デアル」

証明。今 P ヲ Gauss 平面上ニアル完全集合トスル。 $P \cap R$ ノ測度が 0 ノ時ニハコレハ高々可附着デアルカラ、 $P \cap R$ ハ勿論 P = 於テ第一類デアル。次ニ $P \cap R$ ノ外測度 > 0 ノ時ヲ考ヘル。コノ時ニハ $P \cap R$ ノ *mesure égale à 0* H ヲ定メテ $H \subseteq P$ ト出来ル。然ルニ H ノ中ニ測度 > 0 ノ *non dense* ノ完全集合が存在スル故ニ第一類集合 J ヲ定メテ $H - J$ が測度 0 デアル様ニトシ得ル。従ッテ

$$P \cap R = P \cap R \cap J + P \cap R (H - J)$$

が成立シ、 $P \cap R (H - J)$ ハ高々可附着デアルカラ $P \cap R$ ハ又 P = 於テ第一類デアル。即チ、 R ハ *toujours de première catégorie* デアル。(証明完了)

此ノ事カラ E ノ中ニ非可測デ第一類ノ体ノ含マレルコトが判ツタガ、同様ニシテ E が Gauss 平面ノ到ル所デ第二類デシカモ *Baire* ノ性質ヲ有スルトキニ。 E ノ中ニ *Baire* ノ性質ヲ有シナイテ測度 0 ノ体が存在スルコト

が示サレル。又

「 E が *gauss* 平面上ノ殆んど凡テノ点ヲ含ミ到ル所第ニ類デシカモ *Baire* ノ性質ヲ有スナレバ、 E ノ中ニ非可測デ *Baire* ノ性質ヲ有シナイ体が存在スル (230 = 3, ヲ假定スル)」

が云ハレル。

此様ナ事ヲ續ケテ行クト更ニ結果が出セルガ、此処デハコレカケニ止メテ置キタイト思フ。

追記: 性質 (S) ヲ有スル体ノ存在ニ関シテハ

「 E ヲ非可測ノ体トスル時ニ、 E = 含マレ E ト同ジ *mass-gleichlute* ヲ有シ、シカモ性質 (S) ヲ有スル体が存在スル。」

が成立スルノデ、コレヲ使ッテ E ノ中ニ性質 (S) ヲ有スル体ノ存在ヲ示スノが常道デアルト思フ。此命題ハ次ノ様ニシテ証明セラレル。

E ノ要素ヲ Ω -sequence

$$x_1, x_2, \dots, x_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega)$$

= 列ベ、 E ノ *mass-gleichlute* = 含マレル測度 0 ノ G の集合。測度 > 0 ノ完全集合ヲ夫々 Ω -sequence

$$Q_1, Q_2, \dots, Q_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega)$$

$$P_1, P_2, \dots, P_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega)$$

= 列ベル。其処デ Σ_α ($\alpha < \Omega$) ヲ次ノ様ニ定メル。

有理数ヲ係数トスル x ノ有理函数ヲ列ベテ

$$R_1(x), R_2(x), \dots, R_\alpha(x), \dots$$

トスル。其処デ $\sum_{n=1}^{\infty} E_{n\alpha} (R_n(x) \in Q_1)$ ヲ考ヘル。コレ

ハ測度ノデアアル。従ツテ、コレニ含まレタイ P, R ノ無
 x_γ ガアル。ソノ中デ γ ノ最小ノモノヲ z トスル。明
 カニ

$$(1) R_n(z) \in Q_1$$

デアアル。今 $z_\alpha (\alpha < \eta < \Omega)$ ガ定義セラレテ

$$(2) z_\alpha \in P_\alpha$$

$$(3) R(z_\beta (\beta < \alpha < \eta)) \text{ヲ係数域トスルルノ有理} \\ \text{函数 } R(x) \text{ニ對シテ } R(x_\alpha) \in Q_\beta (\beta \leq \alpha)$$

ガ成立スルトスル。其処デ $R(z_\alpha (\alpha < \eta))$ ヲ係数域トス
 ルルノ有理函数ヲ列ベテ

$$R_1^*(x), R_2^*(x), \dots, R_n^*(x), \dots$$

トスル。然ルトキニハ

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} E_{n\alpha} (R_n^*(x) \in \sum_{\alpha \leq \eta} Q_\alpha)$$

ニ測度ノデアアル。今 $P_\eta R =$ 含まレテ $S =$ 含まレタイ要
 素 x_γ ガ存在スル。ソノ中デ γ ノ最小ノモノヲ z_η トス
 ル。然ル時ニハ

$$(4) z_\eta \in P_\eta$$

$$(5) R_n^*(z_\eta) \in Q_\alpha (\alpha \leq \eta)$$

デアアル。此様ニシテ與ヘラレル $z_\alpha (\alpha < \Omega)$ ガ作ラレル
 体ガ求メルモノデアアルコトハ前ノ時ト同様デアアル。

(証明完了)

此処デ尚一ツ注意シテ置キタイコトハ

「Gauss 平面ト同ジ Massgleichläule 7 有シ、
real, 有理数ヲ含ム集合 E デ $\mathbb{R}$ (有理数ヨリ成ル体)
以外ニ体ヲ含マナイモ、カ存在スル。」

デアル。コレヲ証明スルタメニ測度 > 0 の完全集合ヲ Ω_c -
sequence = 列ベテ

$$P_1, P_2, \dots, P_\alpha, \dots \quad (\alpha < \Omega_c)$$

トスル。 P_i ノ一点ヲ取トスル。 α ($\alpha < \eta < \Omega_c$) カ定
義セラレテ (1) $\alpha \in P_\alpha$, (2) 0, α ノ定タル直線カ互ニ
相異ルトスル。今直線 0 α ($\alpha < \eta$) 上ニ +イ P_η ノ一
点ヲ取トシ $\mathbb{R} + \sum_{\alpha < \Omega_c} (\alpha)$ ヲ考ヘル。コレカ求メル集合
デアアルコトハ容易ニ判ル。