



Title	一ツノ抽象積分
Author(s)	泉, 信一
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 226, p. 555-559
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74908
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

978. ーツノ抽象積分

泉 信 一 (東北大)

積分論ヲ抽象化スルノ=種々ノ方法ガトラレテ居ルガ
其ノウチ一番多ク問題ニサレテルノガ Banach 空間ヲ
値域トスル函数ノ積分論デアアル。カ・ル積分論デハ函数
 $f(x)$ ノ(通常ノ意味ノ)絶対値ニ對應スルモノト
 $\|f(x)\|$ ガトラレル。コノコトハ Banach 空間ヲ値域
トスル場合ニハモットモナ事デアアルガ、積分論ヲ抽象化ス
ル時ニモット“適當ノ絶対値”ヲモツ空間ニ値域ヲトル方
ガ理論ガ円滑ニ進メラレルダラウト思ハレル。ソコデ函数
ノ値域トシテ Banach 空間ノ代リニベクトル束ヲトル。
ソシテ Bochner 積分¹⁾ニ相當スルモノヲコノ場合ニ作ッ
テ其者ヲ比ベテ見ヨウ。

1. 考フル函数 $f(x)$ ノ定義域ヲ簡單ノ $X = K$ -
元ノユークリッド空間 R_K トシ且ツソノ値域ヲ σ -complete
ベクトル束 ∇ ニトル。函数 $f(x)$ ニ對シテ

$$R_K = \sum_{k=1}^n E_k, \quad E_i \cap E_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

$$x \in E_k \Rightarrow f(x) = a_k \in \nabla^{(2)}$$

1) Bochner, Fund. Math., 20. 著者 積分論参照

2) $A \cap B$ ハ A ト B トノ共通部分, $\emptyset$ ハ空集合且 $X \Rightarrow Y$ ハ命題
 X カラ命題 Y ガ結論サレルコトヲ意味スル。

トナル $\{a_k\}, \{E_k\}$ ($k=1, 2, \dots, n$) が存在スルトキ,
 $f(x)$ ヲ 單函數ト云フ。コノ = 各 E_k ハ可測集合トナル。
 カナル $f(x)$ ノ積分ヲ

$$\int f(x) dx = \sum |E_k| a_k$$

= ヲツテ定義スル。

$f(x)$ が單函數列ノ殆ンドスベテノ 点デノ極限トシテ
 表ハサレルトキ, $f(x)$ ハ可測デアルト云フ。コノ = 極限
 ハ *relative uniform star convergence* = トル。
 乃チ $f(x)$ = 對シテ次ノ ヌウナ單函數列 $\{f_n(x)\}$ が定マリ,
 任意ノ 部分列 $\{f_{n_k}(x)\}$ = 對シテ殆ンドスベテノ 点デ

$$|f_{n_k}(x) - f(x)| \leq \lambda_{n_k}(x) g(x), \quad \lambda_n = \lambda_{n_k}(x) \downarrow 0$$

トナル $\{\lambda_n\}$ 及ヒ $g(x) \in \nabla$ が定ル。

$\{f_n(x)\}$ がコノ意味デ $f(x)$ = 收斂スルトキ

$$f_n(x) \rightarrow f(x) (*) \quad \text{又ハ} \quad (*) \lim f_n(x) = f(x)$$

ト書ク。

然ルトキ

(1, 1) $f(x)$ が可測ナラバ, $|f(x)|$ モ亦可測デアル。

(1, 2) 可測函數ノ一次和モ亦可測デアル。

(1, 4) $f_n(x)$ ($n=1, 2, \dots$) が可測デ且ツ (*) $\lim f_n(x) = f(x)$ が存在スルナラバ, $f(x)$ モ亦可測デア
 ル。

2. $f(x)$ が可測デアルトナル。從ツテ殆ンドスベテ
 ノ 点デ $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ トナル單函數列 $\{u_n(x)\}$ が存

在スル。ユゝ = 収斂ハ以上ニ述ベク意味デアル。特ニ
條件

[2.1] $\sum |u_n(x)|$ が収斂スルトキニハ

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

[2.2] $\sum \int |u_n(x)| dx$ が収斂スル。

ヲ満足様 = $\{u_n(x)\}$ がトラレル時 $f(x)$ ハ可積分デアルト
云フ。¹⁾ ソシテ $f(x)$ ノ積分ヲ

$$\int f(x) dx = \sum \int u_n(x) dx$$

ニヨッテ定義スル。

之ガ Lebesgue 積分ニナルコトハ容易ニ証明出来ル。²⁾

特ニ ∇ ヲ Banach 束トスルトキニハ上ノ意味ノ収斂
ハ norm ニ関スル収斂ト同ジニナルカラ Bochner 積
分ト一致スル。此ノ場合ニハ $\nabla = (S)$ (可測函数ノ無体)
ノ場合が含まレテルガ、Bochner 積分ノ場合ニハソウ
デナイ。³⁾ 乃チ上ノ積分ハ Bochner ノ互ニニ含ミモシナ
イシ、含まレモシナイガ、函数空間ノ例トシテ Bochner
ノ場合ニハ入ラナイニツノ重要ナ場合が入ッテ来ル。

1) Macneille, *Proc. Nat. Acad.*, 1941 参照。

2) 之ハ Bochner, *Proc. Nat. Acad.*, 1940 ノヨリニ来リ。

3) 河田嶺, 全国紙上談話會, 1941, 一目及ビ *Proc. Imp. Acad.*
1941 参照。

上ノ積分ハ收斂ヲ $(*) - \lim$ ニトツタケレドモ, *relative uniform convergence* スハ *order-limit* ヲトツテ, ∇ = アル種ノ假定ヲ入レルト以上ノ様ナ方法ヲ 用ニ及ビ第三ノ積分ヲ定義スル事カ出来ル。

3. 次ニ上ノ積分ニヨル *Fourier* 解析ニツイテ述ベヨウ。

特ニ $K=1$ トシ, 2π ノ周期トスル可積分函数ダケヲ考ヘル。ソノタメニ ∇ ガ次ノ公理ヲ満ストスル:

{3.1} 單位 Π ガ存在シテ, $\Pi > 0$

$\lambda \Pi$ ヲ單ニ λ ト書ク。

$f(x)$ ノ *Fourier* 級數ヲ通常ノ様ニ定義スルコトカ出来ル。之ヲ

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

ヲ表ハス。

次ニ ∇ ノ元素 f ニ對シテ¹⁾

$$\{3.2\} \quad f^2 \equiv \sup (2\lambda f - \lambda^2; -\infty < \lambda < \infty)$$

ヨツテ定義スル。然ルトキ

{3.3} 殆ンドスベテノ x = 對シテ $f^2(x)$ ガ存在スルヲハバ, a^2, a_n^2, b_n^2 ($n=1, 2, \dots$) ガ存在スル

1) F. Riesz, *Acta de Szeged* 7 (1941) Izumi and Nakamura, *Proc. Imp. Acad.*, 1940 参照

更ニ通常ノ方法デ次ノ定理ガ証明サレル。

(3.4) 殆ンドスベテノ x ニ對シテ $f^2(x)$ ガ存在シ

テ且ツ $\int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$ ガ存在スル (カ、ル f 7 L^2 = ゴクス

ルト云フ) ナラバ

$$\frac{a_0^2}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx$$

之レ乃チ *Bessel* ノ不等式デアル。コノ定理ハ *Bochner* 積分ノ場合ニハ成立シ+カッタモノデアル。ソコデ *Bochner* 積分ノ場合ヨリモ *Fourier* 解析ヲ行フコトガ出来ル。

Bessel ノ不等式ガケデ証明出来ル定理ハ *Fourier* 級數論ニハ澤山アルカラ、ソレ等ハ大抵成立スル。例ハ

(3.5) $f(x) \in L^2$ 且 $f(x) \in Lip^\alpha (\alpha > 1/2)$ ナラバ

$$\sum (|a_n| + |b_n|) < \infty$$

(3.6) $f(x) \in L^2$, $f(x) \in BV$ (有界変分函數ノ無体) 且 $f(x) \in Lip^\alpha (\alpha > 0)$ ナル時ニ $\sum (|a_n| + |b_n|) < \infty$

(3.7) $f(x) \in C$, $f(0) = f(2\pi)$ 且 $a_0 \geq 0$, $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) ナラバ, $f(x)$ 7 *Fourier* 級數ハ一樣ニ収斂スル。