OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Lie algebra ノ Faktorensystem
Author(s)	安倍, 亮
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 226, p. 560-574
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74909
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

979. Lie Algebra ノ Faktorensystem

安倍　亮

通常ノ群論ニ於テ,「アラユル可能ナ」群ノ構造ヲ決定シヨウト思ヘバ，先ヅアラユル單純群ヲ決定シテ，次ニソレラヲ Kompositionsfaktoren ニモツ群ヲ合成スルコトガ問題ニナル。ソコデ Normalteiler 𝔑 ト Faktorgruppe $\mathfrak{F}=\mathfrak{G}/\mathfrak{N}$ ヲ與ヘテ $\mathfrak{G}$ ヲ決メルコトガ問題ニナルガ，ソレハ Schreier ノ Erweiterungstheorie ニ依ッテ少クトモ形式的ニハ答ヘラレル。Zassenhaus ガ指摘シテヰル様ニ（über Lie'sche Ringe mit Primzahlcharakteristik（Hamburg XIII, 1939）5頁），Schreier ノ理論ハ（Lie 群ヲ仲介トシテ）Lie algebra ニ於テモ analog ニ建テルコトガ出來ルノハ勿論デアラウ。

ソレハ「アラユル可能ナ」Lie algebra ノ構造ノ決定ニ，少クトモ形式的ニハ一ツノ手段ヲ提供スルデアラウ。而モ有限群ナドノバアヒヨリ簡單ナコトハ，Lie Algebra $\mathfrak{R}$ ノ Radikal ヲ $\mathfrak{N}$，$\mathfrak{N}$ ノ逐次ノ Ableitung ヲ $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}''$, …… トセバ

$$\mathfrak{R}\supset\mathfrak{N}\supset\mathfrak{N}'\supset\cdots\cdots\supset\mathfrak{N}^{(m)}=0$$

ナル Hauptreihe（$\mathfrak{R}$ ノ Ideal ノ Reihe）ガアッテ，$\mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ ノミガ halbeinfach，ソノ他ノ Faktor ハ可換デアル。先ヅ下カラ可換ナ Faktor ニヨル Erweite-

rung ヲ繰返シテ一般ノ auflösbar ナ Lie Algebra ル ヲ決定スル。(勿論ソレガ実行出来ルト云フノデハナイ。zweistufig meta-abelsch 位デモ既ニカナリ困難デアルノソシテ最後ノ $\mathfrak{N}$ カラ $\mathfrak{R}$ ヘノ Schritt ハ所謂 Levi ノ定理, Erweiterungstheorie ノ言葉デ言ヘバ「$\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{N}$ ノ上デ zerfallen スル」ニ依ッテ可ナリ容易ニナル。*)

§1. Faktorensystem

係数体 P ハ任意ノ体トスル。P ノ上ノ Lie-algebra

$$\mathfrak{R} = u_1 P + \cdots\cdots + u_r P + v_1 P + \cdots\cdots + v_n P$$

ノ中デ

$$\mathfrak{N} = v_1 P + \cdots\cdots + v_n P$$

ガ Ideal ヲナストスル; $\mathfrak{R} \circ \mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}$. $\mathfrak{S} = \mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ トシテ, ソノ構造ハ

(1) $\bar{u}_i \circ \bar{u}_j = \bar{u}_k \gamma_{ij}^k$, $\gamma_{ij}^k \in P$

デアラハストスル。但シ $\bar{u}_i$ ハ u_i ノ mod $\mathfrak{N}$ ノ Klasse デアル。又 $\bar{u}_k \gamma_{ij}^k$ ハ $\sum_{k=1}^{r} \bar{u}_k \gamma_{ij}^k$ ヲアラハス. 以下同様。扨 $v \in \mathfrak{N}$ ニ對シテ

(2) $u_i \circ v = D(u_i) v \in \mathfrak{N}$

---

*) 勿論上カラ作ッテ行ク方法モ考ヘラレル。即チ $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}$, $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}'$, ……, $\mathfrak{R}/\mathfrak{N}^{(m-1)}$, ト云フ順ニ作ルノデアル。此ノ時ハ可換 Ideal ノ擴大ノミガ繰返サレル。

$\mathfrak{M}$ノーツノー次変換$D(u_i)$ヲ生ズルガ，之レハ$v, w \in \mathfrak{M}$トスルトキ，u_i, v, wニ関スル Jacobi 條件ニヨッテ

I. $D(u_i)(v \circ w) = D(u_i)v \circ w + v \circ D(u_i)w$

ヲ滿足シナケレバナラナイ。即チ$D(u_i)$ハ$\mathfrak{M}$ノ無限小自己同型、或ハ Derivation デアル。次ニ$u_i \circ u_j$ヲ考ヘルニ，(1)ニ依ッテ$u_i \circ u_j \equiv u_k \gamma_{ij}^k (\mathfrak{M})$デアルカラ

(3) $u_i \circ u_j = u_k \gamma_{ij}^k + a_{ij}$, $a_{ij} \in \mathfrak{M}$

$u_i \circ u_j = -u_j \circ u_i$, $u_i \circ u_i = 0$デアルカラ

II. $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$

又u_i, u_j, vニ関スル，Jacobi 條件

$$u_i \circ (u_j \circ v) - u_j \circ (u_i \circ v) = (u_i \circ u_j) \circ v$$

ニ(2)及(3)ヲ代入シテ

III. $D(u_i)D(u_j)v - D(u_j)D(u_i)v = D(u_k)v\gamma_{ij}^k + a_{ij} \circ v$

又u_i, u_j, u_kニ関スル Jacobi 條件ニ於テ

$$u_i \circ (u_j \circ u_k) = u_i \circ (u_l \gamma_{jk}^l + a_{jl})$$

$$= u_m \gamma_{il}^m \gamma_{jk}^l + a_{il}\gamma_{jk}^l + D(u_i)a_{jk}$$

デアルカラ，i, j, kヲ循環シテ加ヘ合セテ，(第一項ノ和ハ0)

IV. $a_{il}\gamma_{jk}^l + a_{jl}\gamma_{ki}^l + a_{kl}\gamma_{ij}^l + D(u_i)a_{jk}$

$$+ D(u_j)a_{ki} + D(u_k)a_{ij} = 0$$

定義. Lie algebra $\mathfrak{f}$, Basis ニ對應シテ Lie algebra $\mathfrak{v}$, Derivation $D(u_i)$ ガアッテ, r^2 ケノ元 a_{ij} ガII, III, IV ノ條件ヲ滿足スル a_{ij} ノ System ヲ $\mathfrak{f}$ gehöriges Faktoren system aus $\mathfrak{v}$ ト名付ケ, $(D(u_i), a_{ij})$ ト書クコトニスル。

$\mathfrak{R}/\mathfrak{v} \cong \mathfrak{f}$ トル Lie-algebra $\mathfrak{R}$ ガアレバ, 上ノ樣ニシテ Faktorensystem ガ定マルガ, 逆ニ Faktorensystem カラ $\mathfrak{R}$ ガ作レル事ハ上ノ議論ヲ逆ニ辿レバヨイ。即チ

定理 I Lie-algebra $\mathfrak{f} = \bar{u}_1 P + \cdots\cdots + \bar{u}_r P$, $\bar{u}_i \circ \bar{u}_j = \bar{u}_k \gamma_{ij}^k$ ノ階数 r ダケノ個數ノ, Lie-algebra $\mathfrak{v}$, Derivation $D(u_i)$, $i = 1, \cdots\cdots, r$, 即チ

I $\quad D(u_i)(v \circ w) = D(u_i)v \circ w + v \circ D(u_i)w;$

$v, w \in \mathfrak{v}$

ヲ滿足スル $\mathfrak{v}$, 一次變換 $D(u_i)$ ト, r^2 個ノ $\mathfrak{v}$ ノ元 a_{ij} ガアッテ

II $\quad a_{ij} = -a_{ji}, \quad a_{ii} = 0$

III $\quad D(u_i)D(u_j)v - D(u_j)D(u_i)v = D(u_k)v\,\gamma_{ij}^k + a_{ij} \circ v$

IV $\quad a_{il}\gamma_{jk}^l + a_{jl}\gamma_{ki}^l + a_{kl}\gamma_{ij}^l + D(u_i)a_{jk} + D(u_j)a_{ki} + D(u_k)a_{ij} = 0$

ヲ滿足スルトキ, 換言スレバ $(D(u_i), a_{ij})$ ガ $\mathfrak{f}$ ニ屬

ルヤツノ Faktorensystem トルトキ，

$$\mathfrak{R} = u_1 P + \cdots\cdots + u_\gamma P + \mathfrak{N},$$

ハ計算規則

(2) $u_i \circ v = -v \circ u_i = D(u_i)v, \quad v \in \mathfrak{N},$

(3) $u_i \circ u_j = u_k \gamma_{ij}^k + a_{ij}$

ニヨッテ Lie-algebra ニナリ、$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ デアル。逆ニ $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{R}/\mathfrak{N}$ ナル $\mathfrak{R}$ ハ総テ此様ニシテ得ラレル。

証明. $\mathfrak{R}$ ガ實際 Lie-algebra ナル事. $x \circ y = -y \circ x$, $x \circ x = 0$ ハ，u_i, u_j ニ関シテハ $\gamma_{ij}^k = -\gamma_{ji}^k$ トIIヨリ，u_i, v ニ関シテハ $\mathfrak{R}$ ニオケル計算規則ノ定義ヨリ，$v, w\ (\in \mathfrak{N})$ ニ関シテハ $\mathfrak{N}$ ガ始メカラ Lie-algebra ナルコトヨリ出ル。

又 Jacobi 條件ハ，u_i, u_j, u_k ニ関シテハIVヨリ，u_i, u_j, v ニ関シテハIIIヨリ，u_i, v, w ニ関シテハIヨリ，カノ中デハ元々カノ Jacobi 條件ヨリ夫々出ル。

§2. Assoziierte Systeme, Zerfallen.

$\overline{u}_i$ ノ代表トシテ u_i ノ代リニ $u_i^* = u_i + t_i,\ t_i \in \mathfrak{N}$ ヲトレバ

$$\begin{aligned} D(u_i^*)v &= u_i^* \circ v = u_i \circ v + t_i \circ v \\ &= D(u_i)v + t_i \circ v \\ u_i^* \circ u_j^* &= u_i \circ u_j + u_i \circ t_j - u_j \circ t_i + t_i \circ t_j \\ &= u_k^* \gamma_{ij}^k - t_k \gamma_{ij}^k + a_{ij} + D(u_i)t_j \\ &\quad - D(u_j)t_i + t_i \circ t_j \end{aligned}$$

トナル。ソコデ

定義. $\mathfrak{f}$ = 属スル $\mathfrak{v}$ ノニツノ Faktorensystem $(D(u_i), a_{ij})$, $(D(u_i^*), a_{ij}^*)$ ガアルトキ, ソノ間ニ

(AI) $D(u_i^*)v = D(u_i)v + t_i \circ v$, $v \in \mathfrak{v}$

(AII) $a_{ij}^* = a_{ij} - t_k \gamma_{ij}^k + D(u_i)t_j - D(u_j)t_i + t_i \circ t_j$

ヲ満足スル $t_1, \cdots\cdots, t_r \in \mathfrak{v}$ ガ存在スレバ, 之等ハ互ニ assoziiert デアルトイフ。*) コノコトヲ

$$(D(u_i), a_{ij}) \sim (D(u_i^*), a_{ij}^*)$$

ト書クコトニスル。

定理2 $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*$ ハ共ニ $\mathfrak{v}$ ノ $\mathfrak{f}$ ヨル拡大, 即チ $\mathfrak{R}/\mathfrak{v} \cong \mathfrak{f}$, $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{v} \cong \mathfrak{f}$ ナル Ideal $\mathfrak{v}$ ヲ持ツトスル。$\mathfrak{v}$ ヲ elementweise ニ固定シ且ツ $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ト $\mathfrak{R}^*/\mathfrak{v}$ ノ $\mathfrak{f}$ デ対応スル Restklasse カ互ニ対応スルヤウナ $\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}^*$ ノ同型対応ガアルトキ, $\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}^*$ ハ $\mathfrak{v}$-isomorph デアルト云フコトニスル。$\mathfrak{R}$ ト $\mathfrak{R}^*$ トガ $\mathfrak{v}$-isomorph ナル必要且ツ十分ナ條件ハ, $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}^*$ ニ対応スル Faktoren-system ガ互ニ assoziiert ナル事デアル。

証明 殆ンド明デアラウ。

系 $\mathfrak{R}/\mathfrak{v}$ ノ Restklasse ノ代表ガ夫自身 $\mathfrak{R}$ ノ Teilalgebra ヲナス様ニ取レルトキ, $\mathfrak{R}$ ハ $\mathfrak{v}$ ノ上デ

---

*) assoziiert ナル関係ガ, 反射律, 対称律, 推移律ヲ満足スルコトハ, ソノ意味カラ殆ンド明カデアラウ。仍論AI, IIダケカラ形式的ニ証明スルコトモ出来ル。

zerfallen スルト云フ。ソノタメニハ，Faktoren-system ニ對シテ

(Z) $a_{ij}=t_k\gamma_{ij}^k-D(u_i)t_j+D(u_j)t_i-t_i\circ t_j$

ヲ滿足スル $t_1,\cdots\cdots,t_n\in\mathfrak{A}$ ガ存在スルコトガ必要且十分デアル。

§3. Faktorensystem ノ存在ニ關シテ

ムトヲトヲ與ヘタトキ，$\mathfrak{f}$ ニ屬スルムノ Faktoren-system ハ少クトモ一ツハ何時デモ存在スル。ソレハ直和 $\mathfrak{f}+\mathfrak{A}$ ニ對應スルモノデ，$D(u_i)=0$，$a_{ij}=0$ デアル。

併シナガラノ Derivation ノ集合 $D(u_1),\cdots\cdots,D(u_n)$ ヲ勝手ニ與ヘラレモ，必ズシモ $(D(u_i),a_{ij})$ ノ形ノ Faktorensystem ガアルカドウカハ分ラナイ。一般ニ $\mathfrak{A}$ ノ元ガムニ生ズル innere Der. ヲ $\underline{\mathfrak{v}}$ ト書クコトニスル。$\underline{\mathfrak{v}}$ ノ全体ハムノ Der. 全体ノ作ル Lie 環 $\mathfrak{L}$ ノ中デ Ideal $\mathfrak{J}$ ヲ作ル。條件 III ハ

III $D(u_i)\circ D(u_j)=D(u_k)\gamma_{ij}^k+\underline{a_{ij}}$

ト書ケルカラ，兎モ角

$$D(u_i)\circ D(u_j)\equiv D(u_k)\gamma_{ij}^k\ (\mathrm{mod.}\ \mathfrak{J})$$

デナケレバナラナイ。換言スレバ $\overline{u_i}\longrightarrow D(u_i)\ \mathrm{mod}\ \mathfrak{J}$ ハ $\mathfrak{f}$ ノ $\mathfrak{L}/\mathfrak{J}$ 内ヘノ表現*) デナケレバナラナイ。少クトモ之ハ $D(u_i)$ ノ滿足スベキ必要條件デアル。サテ斯様ナ $D(u_i)$ ガ與ヘラレタバ，III カラ $\underline{a_{ij}}$ ガキマル；從ツテ

zerfallen スルト云フ。ソノタメニハ，Faktoren-system ニ對シテ

(Z) $a_{ij} = t_k \gamma_{ij}^k - D(u_i)t_j + D(u_j)t_i - t_i \circ t_j$

ヲ滿足スル $t_1, \cdots\cdots, t_r \in \mathfrak{A}$ ガ存在スルコトガ必要且十分デアル。

§3. Faktorensystem ノ存在ニ關シテ

ハトヲ與ヘタトキ，$\mathfrak{f}$ ニ屬スル $\mathfrak{A}$ ノ Faktoren-system ハ少クトモ一ツハ何時デモ存在スル。ソレハ直和 $\mathfrak{f}+\mathfrak{A}$ ニ對應スルモノデ，$D(u_i)=0$, $a_{ij}=0$ デアル。

併シナガラ Derivation ノ集合 $D(u_1), \cdots\cdots, D(u_r)$ ヲ勝手ニ與ヘラレモ，必ズシモ $(D(u_i), a_{ij})$ ノ形ノ Faktorensystem ガアルカドウカハ分ラナイ。一般ニ $v \in \mathfrak{A}$ ガ $\mathfrak{A}$ ニ生ズル innere Der. ヲ $\underline{v}$ ト書クコトニスル。$\underline{v}$ ノ全体ハ $\mathfrak{A}$ ノ Der. 全体ノ作ル Lie 環 $\mathfrak{L}$ ノ中デ Ideal $\mathfrak{J}$ ヲ作ル。條件 III ハ

III $D(u_i) \circ D(u_j) = D(u_k)\gamma_{ij}^k + \underline{a_{ij}}$

ト書ケルカラ，兎モ角

$$D(u_i) \circ D(u_j) \equiv D(u_k)\gamma_{ij}^k \pmod{\mathfrak{J}}$$

デナケレバナラナイ。換言スレバ $\overline{u_i} \longrightarrow D(u_i) \bmod \mathfrak{J}$ ハ $\mathfrak{f}$ ノ $\mathfrak{L}/\mathfrak{J}$ 内ヘノ表現*) デナケレバナラナイ。少クトモ之ハ $D(u_i)$ ノ滿足スベキ必要條件デアル。サテ斯様ナ $D(u_i)$ ガ與ヘラレヽバ，III カラ $\underline{a_{ij}}$ ガキマル；從ツテ

a_{ij} が mod. $\mathfrak{z}(\mathfrak{r})$ ($\mathfrak{r}$, Zentrum) デ一意的ニキマル。a_{ij} ヲ mod $\mathfrak{z}(\mathfrak{r})$ デ適當ニトッテ條件 IV が成立ツヤウニデキレバ，Faktorensystem が作レタコトニナルが，夫ハ一般ニハ出來ルカドウカ分ラナイ。從ッテ $\mathfrak{o} \longrightarrow \mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ ノ表現ナル $D(u_i)$ ニ對シテモ，必ズ Faktorensystem がアルカドウカハ分ラナイ。然シナガラ，次ノ定理が成立ツ。

定理3 III が成立ツナラバ，IV ノ左辺

$$a_{ijk} = a_{il}\gamma^l_{jk} + a_{jl}\gamma^l_{ki} + a_{kl}\gamma^l_{ij} + D(u_i)a_{jk} + D(u_j)a_{ki} + D(u_k)a_{ij}$$

ハ，Zentrum $\mathfrak{z}(\mathfrak{r})$ ニ屬スル。

〔証明〕 $\underline{a_{ijk}} = 0$ ヲ云ヘバヨイ。III カラ

$$\underline{a_{ij}} = D(u_i)\circ D(u_j) - D(u_k)\gamma^k_{ij}$$

デアルカラ

$$\underline{a_{il}\gamma^l_{jk}} = D(u_i)\circ D(u_l)\gamma^l_{jk} - D(u_m)\gamma^m_{il}\gamma^l_{jk} \text{ 等}$$

$$\underline{D(u_i)a_{jk}} = D(u_i)\circ \underline{a_{jk}} = D(u_i)\circ(D(u_j)\circ D(u_k)) - D(u_i)\circ D(u_l)\gamma^l_{ij} \text{ 等.}$$

i, j, k ヲ循環シテ加ヘ合セルト

$$\sum_{(i,j,k)} D(u_i)\circ(D(u_j)\circ D(u_k)) = 0$$

及ビ

$$\sum_{(i,j,k)} \gamma^m_{il}\gamma^l_{jk} = 0$$

---

*) 前頁脚註 表現 = Homomorphismus !

ヨリ　$\underline{a_{ijk}} = 0$　　q.e.d.

従ッテ特別ナ場合ニハ Faktorensystem ノ存在ガウマク云ヘル。例ヘバ

i) $\mathfrak{z}(\mathfrak{r}) = (0)$ ノ時

コノトキハ $\overline{u_i} \longrightarrow D(u_i) \bmod \mathfrak{N}$ ガ表現ニナッテ居レバ，a_{ij} ハIII カラ一意的ニ決ル。ソノ a_{ij} ヲ用ヒテ作ッタ IV ノ左辺 a_{ijk} ハ定理3ニヨリ Zentrum ニ属スルカラ 0，即チ IV ハ自働的ニ満足サレ，従ッテ $(D(u_i), a_{ij})$ ハ Faktorensystem ニナル。$D(u_i)$ ノ代リニ $\bmod \mathfrak{N}$ ノ別ノ Vertreter ヲトッテモ，結局 assoziiert ナ system ガ得ラレルニ過ギナイ。即チ

定理4　「$\mathfrak{r}$ が ohne Zentrum ナラバ，$\mathfrak{f}$ ノ $\mathfrak{k}/\mathfrak{r}$ 内ヘノ表現トソノ $\mathfrak{f}$ ニヨル Erweiterung トガ一対一ニ対応スル。」（特ニ零表現ニハ直和ガ対応スル）

ii) $\mathfrak{r}$ が abgeschlossen ナル時。

即チ $\mathfrak{z}(\mathfrak{r}) = (0)$ デ而モ $\mathfrak{r}$ ノ Derivation ガ尽ク inner 即チ $\mathfrak{k} = \mathfrak{N}$ ナルバアヒデアル。此ノトキ $\mathfrak{f}$ ノ $\mathfrak{k}/\mathfrak{N}$ 内ヘノ表現ハ零表現シカナイ。故ニドンナ $\mathfrak{f}$ ヲトッテキテモ $\mathfrak{r}$，$\mathfrak{f}$ ニヨル Erweiterung ハ唯一ツ，即チ直和 $\mathfrak{f}+\mathfrak{r}$ デアル。

定理5　「Lie-algebra $\mathfrak{k}$ ノ abgeschlossenen ナ Ideal $\mathfrak{r}$ ハ必ズ直和因子デアル。即チ $\mathfrak{k}=\mathfrak{r}+\mathfrak{f}$

ナル Ideal $\mathfrak{f}$ ガ必ズアル。」

標数体ノ Charakteristik ガ 0 + ラ halbeinfach + Lie-Algebra ハ abgeschlossen デアル。従ッテ halbeinfach + Ideal ガアレバ，ソレハ必ズ直和因子デアル。

附記　群論ノ場合ハ $\mathfrak{k} = (A, B, \cdots\cdots)$ ヲ $\mathfrak{v} = (\sigma, \tau, \cdots\cdots)$ デ erweitern スルトシテ，$\sigma = \mathfrak{k}$ ノ Autom. S_σ ヲ對應セシメ，ソレト $\mathfrak{k}$ ノ元 $C_{\sigma,c}$ トガ §1 ノ III ニ相應シテ III'. $(A^{S_c})^{S_\sigma} = A^{C_{\sigma,c} S_{\sigma c}}$，IV ニ相應シテ IV'.

$$C_{\sigma,c}\, C_{\sigma c,\rho}\, C_{c,\rho}^{-S_\sigma}\, C_{\sigma,c\rho}^{-1} = e$$

ヲ満足スルトキ，$(S_\sigma, C_{\sigma,c})$ ヲ Faktorensystem ト云フ。本節ニ述ベタコトハスベテ群デモ成立ツ。$\mathfrak{k}$ ノ Automorphismengruppe ヲ $A_\mathfrak{k}$，ソノ中 innere Autom. ノ作ル Normalteiler ヲ $J_\mathfrak{k}$ トセバ，先ヅ III' カラ $\sigma \longrightarrow S_\sigma$ ハ $\mathfrak{v} \longrightarrow A_\mathfrak{k}/J_\mathfrak{k}$ ノ表現デナケレバナラナイ。ソノトキ III' ヲ満足スル $C_{\sigma,c}$ ヲトレバ，定理3ニ相應シテ，IV' ノ左辺ガ $\mathfrak{z}(\mathfrak{k})$ ニ属スル。定理4'「$\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = (e)$ ナラ，$\mathfrak{v} \longrightarrow A_\mathfrak{k}/J_\mathfrak{k}$ ノ表現ト $\mathfrak{k}$ ノ $\mathfrak{v}$ ニヨル Erweiterung トガ一對一ニ對應スル」定理5'「$\mathfrak{k}$ ガ abgeschlossen，即チ $\mathfrak{z}(\mathfrak{k}) = (e)$, $A_\mathfrak{k} = J_\mathfrak{k}$ ナラ，$\mathfrak{k}$ ヲ如何ナル $\mathfrak{v}$ デ拡大シテモ直積 $\mathfrak{k} \times \mathfrak{v}$ シカナイ」モ成立ツ。

§4. 可換 Ideal の擴大。

$\mathfrak{M}$ が可換ナル場合ヲ考ヘル。コノトキハ $\bar{u}_i$ ノ Vertreter u_i ノ取リ方如何ニ係ハラズ，$D(u_i)$ ハ変ラナイカラ $D(u_i)$ ノ代リニ D_i ト書ク。I — IV ハ

I　自ラ満足サレル。

II　$a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$

III　$D_i D_j - D_j D_i = D_k \gamma_{ij}^k$

IV　$a_{il}\gamma_{jk}^l + a_{jl}\gamma_{ki}^l + a_{kl}\gamma_{ij}^l + D_i a_{jk} + D_j a_{ki} + D_k a_{ij} = 0$

即チIIIハ簡単ニ $\bar{u}_i \to D_i$ ガ $\mathfrak{f}$ ノ表現ナルコトヲアラハス；$\mathfrak{M}$ ヲ表現加群トスル表現デアル。表現 $u_i \to D_i$ ガ與ヘラレレバ，$(D_i, 0)$ 即チ zerfallen スル Faktorensystem ハ何時デモ存在スル。

assoziiert ノ條件ノ中 (AI) ハ $D_i^* = D_i$ トナリ，$(D_i, a_{ij}) \sim (D_i, a_{ij}^*)$ ノ條件ハ

(AII)　$a_{ij}^* = a_{ij} - t_k \gamma_{ij}^k + D_i t_j - D_j t_i$ ナル $t_1, \cdots\cdots, t_r$ ノ存在デアル。Zerfallen ノ條件ハ

(Z)　$a_{ij} = t_k \gamma_{ij}^k - D_i t_j + D_j t_i$

トナル。

定理6　$\mathfrak{M}$ ガ可換ナルトキハ，$\mathfrak{f}$ ノ $\mathfrak{M}$ ヲ表現加群トスル任意ノ表現 $\bar{u}_i \to D_i$ ニ對シ (D_i, a_{ij}) ノ形ノ Faktorensystem ハ存在スル。

D_i ヲ決メタ時 (D_i, a_{ij}) ノ全体ハ

$$(D_i, a_{ij}) + (D_i, b_{ij}) = (D_i, a_{ij} + b_{ij})$$

ナル加法ニヨリ加法群ヲ作ル。a_{ij} ハ一次方程式系II, IVノ解ダカラ，a_{ij} ノ群ハアル有限次元ノ Vektorgruppe ヲナス。ソノ中デ，zerfallen スル。

$$a_{ij} = t_k \gamma^k_{ij} - D_i t_j + D_j t_i$$

ハ Vektoruntergruppe ヲナス。従ッテ assoziiert ナモノヲ Klasse ニ纏メテモ Vektorgruppe ヲナス。即チ $\mathfrak{N}$ ニヨル拡大ニ於テ D_i ヲキメレバ，拡大全体ガ上ノ加法デ Vektorgruppe ヲナス。

〔注意〕 $\mathfrak{N}$ ガ一般ナルトキハ，$D(u_i)$ ヲ決メテモ，Faktorensystem a_{ij} ト b_{ij} ノ和ハ Faktorensystem ニナラナイ。ソレハ III ガ満足サレナイカラデアル。モシ $\mathfrak{f} \to \mathfrak{k}/\mathfrak{N}$ ノ Bild ガ $\mathfrak{N}$ ノ上デ zerfallen スレバ，

$$D(u_i) \circ D(u_j) = D(u_k)\, \gamma^k_{ij}$$

ナルヤウニ $D(u_i)$ ガ選ベル。コノ $D(u_i)$ ヲ固定スレバ III ハ $a_{ij} = 0$ 即チ $a_{ij} \in \mathfrak{z}(\mathfrak{N})$ デアリ，ソレト II, IV ノ解ナル a_{ij} ハ此ノ時ハ加法デ Vektor 群ヲナス。又 $D(u_i)$ ヲ固定シテアルカラ $t_i \in \mathfrak{z}(\mathfrak{N})$ デ，シタガッテ (Z) ハ本節ノ (Z) ノ形ニナリ，zerfallen スルモノハ部分群ニナル。カクシテ始メニ與ヘタ $\mathfrak{f} \to \mathfrak{k}/\mathfrak{N}$ ニ對應スル拡大全体ガ Vektor 群ヲナス。$\mathfrak{N}$ ガ可換ナルバアヒニハ，$\mathfrak{N} = (0)$ トナルカラ，$\mathfrak{k}$ ノスベテノ部分環ハ $\mathfrak{N}$ ノ上デ zerfallen スル．即チ上ノ特別ノ場合ニナル。

例1. $\mathfrak{g}$: halbeinfach

係数体ノ標数ガ0ナラ必ズ zerfallen スル。ソレハ以前ニ詳シク述ベタコトガアルガ，要スルニ、表現 D_i ニ對シテ IV ヲ満足スル a_{ij} ガアレバ，必ズ(Z)ノ形ニナルコトヲ云ヘバヨイ。ソコデ IV ヲ a_{ij} ニツイテ解クタメニ IV ノ両辺ニ D^k ヲカケテ k デ加ヘル。途中ノ計算ヲ略シタガ結果ハ

$$C a_{ij} + D^k a_{kl} \gamma^l_{ij} - D_i (D^k a_{kj}) + D_j (D^k a_{ki}) = 0$$

トナル。$C = D^k D_k$ ハ Casimir 行列ト呼バレルモノデアル。表現ガ零表現ヲ含マナイナラ，C ハ逆ガアッテ

$$t_i = - C^{-1} D^k a_{ki}$$

ト置ケバ直チニ(Z)ガ成立ツ。C ガ零表現ヲ含ム場合モ容易ニ出ル。之ヨリカラ，一般ニ可解ナルノ halbeinfach ナ $\mathfrak{g}$ ニヨル Erweiterung ガ必ズ zerfallen スルト云フ Levi ノ定理モ直チニ得ラレル。

例2. $\mathfrak{g}$: 可換　　即チ $\mathfrak{r}$ ガ (zweistufig) meta-abelsch ノ場合

II　$a_{ij} = - a_{ji}$,　$a_{ii} = 0$

III　$D_i D_j = D_j D_i$

IV　$D_i a_{jk} + D_j a_{ki} + D_k a_{ij} = 0$

(Z)　$a_{ij} = - D_i t_j + D_j t_i$

一例トシテ $\mathfrak{r} = (\nu)$ ガ一次元ノトキヲ考ヘテ見ヨウ。

$\mathfrak{f}$ ノ一次ノ表現ハ

i) 零表現カ

ii) $\mathfrak{f}/\mathfrak{f}_{r-1}$ ノ true + 表現，但シ $\mathfrak{f}_{r-1}$ ハ $r-1$ 次元ノ Ideal (= Teilmodul)

$\mathfrak{f}_{r-1}=(u_2, u_3, \cdots\cdots, u_r)$ ナル如クトリ u_i ノ係数ヲ適當ニスレバ，$D_1 v = v$, $D_2 v = 0, \cdots\cdots, D_r v = 0$

i) IV ハ自ラ満足サレル。故ニ $a_{ij} = -a_{ji}$, $a_{ii} = 0$ 以外，$\{a_{ij}\}$ ハ全ク任意デアル．

(Z) ハ $a_{ij} = 0$ トナル。 ∴ Erweiterung ノ Vektorgruppe ノ次元ハ $\{a_{ij}\}$ ノ独立ナ部ノ數，即チ $\frac{1}{2}r(r-1)$ デアル。

$$\begin{cases} u_i \circ u_j = v\alpha_{ij}, \quad \alpha_{ij} = -\alpha_{ji}, \ \alpha_{ii} = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad i, j = 1, \cdots\cdots, r \\ u_i \circ v = 0 \end{cases}$$

ii) $i, j, k \neq 1$ ナラ IV ハ自然ニ成立ッテ居ル。故ニ $i = 1$ トスレバ IV ハ

$$a_{jk} = 0, \quad j, k \neq 1;$$

II ハ $a_{1j} = -a_{j1}$, $a_{11} = 0$

トナル。Zerfallen ノ條件ハ

(Z) $a_{jk} = 0$, $a_{1j} = -t_j$ $\quad j, k \neq 1$

即チ $t_1 = 0$, $t_j = -a_{1j}$ トオケバ常ニ満足サレル。

故ニ此ノ場合ハ必ズ Zerfallen スル。

$$\begin{cases} u_i \circ u_j = 0 \\ u_1 \circ v = v \\ u_j \circ v = 0, \quad j \neq 1 \end{cases}$$