OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	単位ヲ有スル vector束ニ就テ, III
Author(s)	吉田, 耕作; 深宮, 政範
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 226, p. 574-578
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74910
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

980. 單位ヲ有スル vector 束ニ就テ, III

吉田耕作，深宮政範(阪大)

前談話 912, 916 ノ結果ヲ"代數的"ニ擴張スルトalgebras ノ基本定理"algebra EヲソノradicalRデ剩餘類ヲトツタトキ E/R ハ semi-simple ニナリ，從ツテ E/R ハ total matric algebras 直和トシテ表現デキル"ニparallel ナ形ニ vector 束ノ表現定理ガ得ラレル樣デアルカラ之ヲ述ベラミタイ.
(種々 discuss シ且ツ多クノ hints ヲ與ヘラレタ中山氏ニ感謝シタイ)

Vector 束ノ定義　實數（$\alpha, \beta, \cdots\cdots$ デ表ハス）ヲ係數トスル加法群（ソノ要素ヲ $x, y, z, \cdots\cdots$ デ表ハス）ニ於テ次ノ條件ヲ滿足スル semi-order $\geqq$ ガ定義サレラルトキEヲ vector 束ト呼ブ:

(1) $f \geqq g$ ト $f-g \geqq 0$ トハ同等

(2) $f \geqq 0$, $\alpha \geqq 0$ ナラ $\alpha f \geqq 0$

(3) $f \geqq 0,\ -f \geqq 0$ ナラ $f = 0$

(4) $f \geqq 0,\ g \geqq 0$ ナラ $f+g \geqq 0$

(5) $\geqq$ ノ意味デ E ハ束ヲ作ル．即チ全テノ f ニ對シ join $f \vee 0 = f^+$ ガ定ル。(1)

尚 E ハ單位 $I > 0$ ヲ有スルトスル：

(6) 全テノ f ニ對シ $\alpha I \geqq f \geqq -\alpha f$ ナル如キ α 定ル。

前談話 912, 916 ノ結果ニヨレバ E が Archimedes ノ公理

(A) $\underset{n\to\infty}{\text{order limit}} \frac{1}{n} f = 0$ for all $f \geqq 0$

ヲ満足スル ナラバ E ハ E ノ maximal ideal M ノ全体 $\mathfrak{M}$ ノ上デ定義サレタ函數ニヨッテ lattice-isomorphic ニ表現ガキル。(然モ I ハ $\mathfrak{M}$ ノ上デ恒等的ニ 1 ナル函數トシテ)。

以下ニハ (A) ヲ<u>假定セズ</u>ニ議論スル。

<u>ideal</u> E ノ linear subspace N ガ與ヘラレタルトキ linear-homomorphism $E \to E/N$ ガ lattice-homomorphism 即チ $a \equiv a',\ b \equiv b'$ (N) ナラ $a \cup b \equiv b \cup b'$ ナルタメノ必充條件，N ガ ideal ナルコト：$x \in N$ 且ツ $|y| \leqq |x|$ ナラ $y \in N$. デアル。$0 \neq N,\ E \neq N$ ナル如キ ideal ヲ non-

(1) $f \wedge 0 = f^-,\ f = f^+ + f^-;\ |f| = f^+ - f^- = f \vee (-f)$ 等既知。

trivial，又自分自身及び E 以外ノ ideal ニ含マレナイ様ナ non-trivial ideal ヲ maximal デアルト云フ。non-trivial ideals ノ transfinit ナ increasing sequence.

$$N_1 < N_2 < \cdots\cdots < N_\eta < \cdots\cdots,\quad \eta < \omega$$

ガ與ヘラレタトキ $x \equiv y(N_\omega)$ ヲ少クトモ一ツノ $\eta < \omega$ ニ對シテ $x \equiv y(N_\eta)$ ニヨッテ定義スルトキ N_ω ハ上カラ ideal ナル。N_η 全テ non-trivial ダカラ $I \neq 0\ (N_\eta)$, $\eta < \omega$, ヨッテ $I \neq 0\ (N_\omega)$. 即チ N_ω モ亦 non-trivial. 故ニ E ハ maximal ideal ヲ有スル。

Radical 或ル $\alpha > 0$ ニ對シテ $\alpha |I| > n |a|$ $(n = 1, 2, \cdots\cdots)$ ナル如キ a ヲ nilpotent デアルト呼ブ。E ノ maximal ideal M ノ全体ニ，intersection ideal $R = \bigwedge_{M \in \mathfrak{M}} M$ ヲ radical ト呼ブ。

定理 (i) E/R ハ $\{M/R\}_{M \in \mathfrak{M}}$ ノ上ニ定義サレタ実函数ニヨッテ lattice-isomorphic ニ表現サレル。(1) 然モ I ハ恒等的ニ 1 ナル函数ニヨッテ (ii) R ハ nilpotent ナ要素ノ全体ニ一致スル。

---

(1) 之レ等函数ノ全体ハ，適當ニ topology ハレタ $\{M/R\}$ ノ上ノ連續函数ノ全体ト中デ一様収斂ノ意味ガ dense ニナル（前談話）カラ algebras ノ場合ノ“進和表現”ニ相應スルト考ヘテヨイ。

証明 (i) E/M, $M \in \mathfrak{M}$ が実数ノ作ル vector 束ト lattice isomorphic ($I \longleftrightarrow I$ ナル如ク) ナコトサヘ云ヘバヨイ。所ガ M ノ maximality カラ E/M ハ simple 即チ ideal ヲ含マナイ。

simple + vector 束 E' ハ nilpotent + $a \neq 0$ ヲ含マナイ。若シ a ガ nilpotent + ラ $(|x| \leqq \eta |a|)_{\infty,\eta}$ ナル如キ元ノ全体ハ non-trivial ideal ナルカラ、従ッテ simple + vector 束 E/M ハ (A) ヲ満足スルカラ前談話ノ結果ニヨリ実数全体ト思ッテヨイ。

(ii) nilpotent + a ハ一ニ示シタ如ク non-trivial ideal ニ含マレルカラ $\in M$, $M \in \mathfrak{M}$. 従ッテ a nilpotent + ラ $\in R$.

逆ニ $a > 0$ ガ nilpotent デナイトスルト $a \in R$ 即チ a ヲ含マヌ $M \in \mathfrak{M}$ ガ存在スルコトヲ示ストヨイ。以下其証明。

假定ニヨリ $na \neq I$ + ル如キ正整数 n が存在スル。$na \geqq I$ + ラ勿論 $na \in M$, $M \in \mathfrak{M}$ ダカラ $na \neq I$ ト假定スル。然ラバ $p = I - (na) \wedge I > 0$. コノトキボン ノ正整数 m ニ對シテモ決シテ $mp \geqq I$ トハナラナイ。

若シ然ラズトスレバ $\frac{I}{m} \leqq I - (na) \wedge I$

従ッテ $na \wedge I = na \wedge (1 - \frac{1}{m}) I$, 之レヨリ

$$\{na - (1 - \tfrac{1}{m}) I\} \wedge \tfrac{1}{m} I = \{na - (1 - \tfrac{1}{m}) I\} \wedge 0 \leqq 0$$

従テ $\left[\{na - (1 - \frac{1}{m}) I\} \wedge \frac{1}{m} I\right] \vee 0 = \{na - (1 - \frac{1}{m}) I\}^{+} \wedge \frac{1}{m} I = 0$

ヲ得ル。之ヨリ $\{na - (1-\frac{1}{m})I\}^{+} = 0$

即チ $na \leqq (1-\frac{1}{m})I$ ヲ得テ[1] $na \leqq I$ ニ矛盾スル。

以上

---

(1) 一般ニ $b \geqq 0$, $b \wedge I = 0$ ナラ $b = 0$. 何者, $b > 0$ トスルト $b < aI$ ヨリ $0 < b = b \wedge aI$. 之レハ $a < 1$ ナラ $b \wedge I = 0$ ニ矛盾. 又 $a \geqq 1$ ナラ $0 = \frac{0}{a} < \frac{b}{a} \wedge I \leqq b \wedge I$ デ $b \wedge I = 0$ ニ矛盾スル。