



Title	一般ナル係數体ヲ有スル代數函數体 及ビ 多元環ニツイテ I
Author(s)	稲葉, 榮次
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 227, p. 579-596
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74911
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

981. 一般ナル係數体ヲ有スル代數函數体 及ビ多元環ニツイテⅠ

稻 葉 榮 次 (海兵)

代數函數体相互ノ關係ハ *classic* 十場合ニハ *algebraische Korrespondenz* ノ理論等ガアルガ、
(コレハ *kleuring* ニヨツテ抽象化サレタ)、コレハ
係數体ガ一般ナル場合、係數体ヲ種々変ヘタトキニ於ケル
代數函數体相互ノ關係ヲシラベル。係數体ヲ変ヘルノハ單
ナル拡大デハ餘リ興味がナイガ、*Restbildung* (剰餘体
ヲトルコト)ニ依ル場合ヲ考ヘルト種々應用サレル所ガア
ツテ興味がアルト思フ。(Eichlerハ Hilbertノ
*Irreduzibilitätssatz*ヲ証明スルトキニ應用シタ)。
コレハコレノ *Restbildung*ノ理論ヲ完成シテ示性數、
因子類群ノ構造等ニ関シ注目スベキ結果ガ得ラレルコトヲ
述ベタイ。

係數体ノ *Restbildung* トカ拡大トカハ後ニ述ベル
Resthomomorphism ノ概念ニ統一サレル。之レニ依
ツテ係數体ガ一般ナル場合カラ特殊ナル場合ニ移リ得ル。
係數体ガ特殊ナル場合ノ結果ヲ單ナル抽象的方法ニヨツテ
係數体ガ一般ナル場合ニ拡張スルコトガ困難ナルトキニ、
コレノ *Resthomomorphismus*ノ理論ニヨリ一般ナル場合ノ
結果ガ得ラレルコトガアル。コレハ代數函數体ニ限ラズ多
元環ニ就テモ云ヘル。更ニ一般ナル体ノ上ノ Abel 体ノ理

論ノ如キモ、モ建設シ得ルノデアイル。

§ 1

Ω が任意ノ体トスル。Rang 有限ナル Ω -Modul S が同時 = Ringデアルトスル。即チ S ハ Ω ヲ係数体トスル多元環デアアル。 n_i ($i = 1, 2, \dots, n$) ヲソノ Basis トシタトキ

$$n_i u_j = \sum_{k=1}^n c_{ijk} u_k, \quad c_{ijk} \in \Omega$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

= 於ケル Multiplikationskonstanten c_{ijk} 及ビ
1ヲスベテ含ム如キ Ω ノ Unterring $\mathfrak{R}$ トスル。 $\mathfrak{R}$
= 於ケル teilerlos + Primideal 或ハ Nullideal
 $\mathfrak{p}$ = ヨル $\mathfrak{R}$ ノ Restklassenring $\overline{\mathfrak{R}}$ トス。 $\mathfrak{p}$
ガ Nullideal ナルトキハ $\mathfrak{R}$ ハ Ω ノ Unterkörper
ナルモ、トスレバ $\overline{\mathfrak{R}}$ ハ 常ニ Körper トナル。 Ω = 於
ケル c_{ijk} = 對應スルモ、ガ $\overline{\mathfrak{R}}$ = 於テ $\overline{c_{ijk}}$ ナリトス。
シカラバ

$$\overline{n_i} \cdot \overline{u_j} = \sum_{k=1}^n \overline{c_{ijk}} \cdot \overline{u_k}$$

ナル關係 = ヨツテ $\overline{u_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) ヲ Basis トシ
 $\overline{\Omega}$ ヲ係数体トスル多元環 $\overline{S}$ が出來ル。 $\overline{S}$ $\mathfrak{R}$ ノ $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}$
= ヨル Restbild トイフコト = スル。 ユノ際 $\overline{S}$ ハ S =
Resthomomorph トイフ。 亦 Ideal $\mathfrak{p}$ ハ Abbil-

Kernideal トイフコト = スル. S / 中デ $\sum_{i=1}^n C_i u_i$,
 $C_i \in R$ + ル元 / 集合ハ S / Unterring デコレヲ S' ト記
 $\bar{S}$ / $\text{eigentliches Urbild}$ トイフ.

亦 $\sum_{i=1}^n C_i u_i$, $C_i \in R$ + ル S' / 元 / 集合ハ $S' =$ 於ケ
 ル Ideal デアツテ, コノ $\text{Ideal} =$ ヨル S' / Restklas-
 senring ガ $\bar{S}$ ト同型トナル. (以後 Resthomomor-
 $\text{phism} =$ 依ツテ生ズルモノハ bar ヲツケテ示スコト =
 スル).

$\text{Resthomomorphismus}$ ガ $\text{Basis } u_i$ / 撰ビ方
 $=$ 如何 = 關係スルカハ次ノ如クデアイル. S / 他ノ Basis
 u'_i ガ S' / Basis + ルトキハ $u'_i =$ ヨツテ作ツタ S /
 R , $\mathcal{K} =$ ヨル Restbild ハ $u_i =$ ヨツテ作ツタ S / R ,
 $\mathcal{K} =$ ヨル Restbild ト同型デアイル. 何トナレバ

$$u'_t = \sum_j b_{tj} u_j, b_{tj} \in R, u_i = \sum_t a_{it} u'_t, a_{it} \in R$$

デアルカラ u'_i / $\text{Multiplikationskonstanten}$ ハ
 $R =$ 属シ, 亦 $\sum_i \bar{C}_i \bar{u}_i = \sum_t \sum_i \overline{C_i a_{it}} \bar{u}'_t$ ノ對應ハ
 セルコト = スレバ同型トナルコトガ容易ニワカル. 一般ニ
 $R, \mathcal{K}$ / 如何 = 關係セズ S ヨリ同型ナル Restbild ノ生ゼシ
 ムル如キニツノ $\text{Resthomomorphismus}$ ノ同等 (äqu-
 ivalent) トイフ.

[定理1] $\text{Resthomomorphismus } \gamma_i =$ ヨツテ
 S / $\text{Restbild } \bar{S}$ ガ生ジ, $\text{Resthomomorphismus}$

$\bar{Y}_2 = \text{ヨツテ } \bar{S} \text{ の Restbild } \bar{S} \text{ が生ズルトキ, } S \text{ヨリ}$
 $\bar{S} = \text{同型+ル Restbild を生ゼムル如キ Resthomo-}$
 $\text{morphismus } \gamma \text{ が存在スル.}$

コノ場合 γ は γ_1 と γ_2 の積+リトイフ. $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$

[証] γ_1 は $R, \psi = \text{ヨリ, } \gamma_2$ は $\bar{R}, \bar{\psi} = \text{ヨル } \bar{S} \text{ へ}$
 ト.

$\bar{R}/\bar{\psi} = \bar{S}$ トシ, $\bar{R}$ へ $\bar{\psi}$ = 於ケル Urbild $\gamma R'$
 $\text{トスルバ } R' \subset \bar{R}. \bar{\psi} \text{ へ } \bar{\psi} = \text{於ケル Urbild } \gamma' \text{ ト}$
 $\text{スルバ } \gamma' \text{ は } R' = \text{於ケル Ideal デアツテ } \psi \text{ を含ム}$

$$R'/\psi' \cong R'/\psi/\psi'/\psi \cong \bar{R}/\bar{\psi} \cong \bar{S}$$

故ニ $\psi' \text{ は } R' = \text{於ケル teilerlos + Primideal の}$
 $\text{hullideal デアル. } \psi' \text{ は hullideal + ヲ } R' \text{ は}$
 $\text{Körper デアル. } R', \psi' = \text{ヨル Resthomomorphismus}$
 ヲトスル. (証終)

Abbildungsideal. ψ が hullideal + ルトキ
 $\bar{S} = R \text{ へ } \bar{S} \text{ の Unterkörper デアツテ } \bar{S} \text{ は } S \text{ の部}$
 $\text{分環トナル. カノ Resthomomorphismus } \gamma$
 $\text{Koeffizientenverengung トイフ. 亦 } \psi \text{ が}$
 $\text{hull デナイトキハ } R \text{ は Körper デナイ (} \in \text{シ体ト}$
 $\text{ラバ } \bar{S} \text{ は零ノミトナル). ソコデ } R \text{ の Quotienten-}$
 $\text{körper } L \text{ を作ル. } \bar{S} \cong L \text{ トナルカノ Rest-}$
 $\text{homomorphismus } \gamma \text{ Restbildung トイフ. 一般}$
 $= \bar{S} \text{ は } L = \text{同型+体ヲ含ムカラ Resthomomorphis}$

mus の Koeffizientenverengung (係数体縮小) と Restbildung、積 = + の。 R / Quotientenkörper が $\mathcal{O}$ と同型 + のとき $C_{ij}k$ が R = 含まれる + のとき、Basis u_i の変数 γ の γ Multiplikationskonstanten が R = 属する如き + の。

係数体 $\mathcal{O}$ が γ の γ 部分体 k = 関し transzendenzgrad 有限 $\mathcal{O}$ = 含まれる $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ が k / 上代数的 = 独立 + の。この場合 $\mathcal{O}$ が $k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)$ / 有限次代数的拡大 + の S の k = 関し dimension 有限 t + の + の。特 = k が Primkörper + のとき $absolute dimension$ 有限 t + の + の。

[定理 2] 任意 / 多元環 S の Koeffizientenverengung = 有り Restbild が $\mathcal{O}$ / 任意 / Unterkörper k = 関し Dimension 有限 + の如き得る。

[証] $k = C_{ij}k$ を γ の γ 添加 γ の R + の如き係数体縮小 γ の γ トレバ + の。

[定義] $\mathcal{O}$ の γ 部分体 k = ツイテ k の γ / 共通部分 γ + のとき、 γ の γ Restbildung γ k / 上 / Restbildung + の。このとき $\overline{\mathcal{O}}$ の k = 同型 + の γ 含む。

一般 = $\mathcal{O}$ / 標数 γ $\overline{\mathcal{O}}$ / 標数 γ 同 γ 如き Rest-

bildung γ Charakteristiktren トイフ。任意
 k 上 γ Restbildung γ Charakteristiktren
 デアル。

k 関シ Dimension 有限ナル $S = \gamma$ イテ k 上
 Restbildung アルトキ Ω k 関スル Trans-
 zendenzgrad ヨリ $\bar{\Omega}$ ソレヲ減ジタルモ γ ソノ
 Restbildung γ dimension トイフ。

[定理3] k 上 γ Restbildung γ dimension
 ハ要ヨリ大デアル。

[証] k 上 γ Restbildung γ dimension
 ハ明ラカニ要ヨリ小デハナイ。モシ要ナラバ、 $\bar{\Omega}$ γ hull
 = abbild サレルモ、ハ k 代数的拡大ニ属スル R ノ
 元ダレデアル。ソノ元 γ k 於テ満足スル方程式 (係數
 $\in [k, R]$) γ 作レバソノ常數項ハ γR = 属スルコトニ
 ナリ $[k, \gamma R] = 0$ 、ハツタカラ γR ハ hullideal トナ
 リ不合理デアル。

[定理4] k 関シ dimension 有限ナル $S = \gamma$
 イテ k 上 γ Restbildung γ_1 ガアリ、ソノ Rest-
 bild = ツキ、 k 上 γ Restbildung γ_2 ガア
 ルトキ

$$\dim \gamma_1 + \dim \gamma_2 = \dim \gamma_1 \gamma_2$$

[定理5] k 関シ dimension 有限ナル $S =$
 γ イテ γ ヨリ大デナリ任意 γ dimension γ k 上
 Restbildung が無數ニ存在スル。

特 = Resthild / 係數体 $\bar{S}$ かと / 有限次代數的
 拡大トナル如キ かと / 上 / Resthildung が存在ス
 ル。

(証) $\bar{S}$ ハ かと ($\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$) / 有限次代數的
 拡大トス。 $\bar{S}$ ハ $\bar{S} =$ 含マレル かと ($\xi_2, \dots, \xi_t$) / 最大
 代數的拡大 かと / 常數体トシ ξ_1 / 不定元トスル代數函數
 体ト考へ、スベテノ C_{ij} かと が $\mathbb{Z}$ -ganz トナル如ク素因
 子 $\mathbb{Z}$ フトル。分母が $\mathbb{Z} =$ 素ナル $\bar{S}$ / 元全体ヲ Ring
 R トスル。ユ / 中デ分子が $\mathbb{Z}$ デ割レル元ノ集合ハ $R =$ 於
 ケル Primideal $\mathfrak{P}_R$ デアル。 $R, \mathfrak{P}_R =$ ヨル Rest-
 bildung = ヨツテ $\bar{S}$ ハ かと / 有限次代數的拡大トナル。
 カクシテ $\bar{S}$ ハ かと = 關シテ dimension $t-1$ トナル。
 かと / Resthildungヲ繰リ返セバ $\dots$ 。(証終)

[定理6] かと = 關シ dimension 有限 t ナル S
 = ツイテ dimension r ナル かと / 上 / Resthild-
 ung ハ dimension 1 ナル r 個 / かと / 上 / Rest-
 bildung / 積ト同等デアアル。

(証) 一般 = $r \leq t$ デアルガ $r = t$ ナル場合 = 証ス
 レバ充分デアアル。何トナレバ かと = 關シテ dimension
 有限ナル S ハ $\bar{S}$ ノ部分体デ かとヲ 含ム体 かと' = 關シテモ
 dimension 有限デアアリ、又 $\bar{S}$ かと かと'ヲ 含ムトキハ、
 コノ かと / 上 / Resthildung ハ かと' / 上 / Rest-
 bildung ト考ヘテモ dimension 同ジデアアルカラ
 デアル。

Ω は R の Quotientenkörper がカラ $R =$
 於て $k =$ 関 $\searrow$ algebraisch unabhängig + e
 , 個アリ.

コレヲ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_e$ トスル. ξ_i 係数 $k =$
 属スル多項式デ $f_i =$ 属スル最低次ノ $\in$ / $f_i(\xi_i)$ トス.
 ξ_i ノ $\overline{\Omega} =$ 於テ對應スル元ヲ $\overline{\xi_i}$ トスレバコレハ $f_i(\xi_i)$
 $= 0$ ノ根デアル.

スベテノ $\overline{\xi_i}$ ヲ $k =$ 添加シタ体ヲ $\wedge$ トス. R ノ
 Quotientenkörper が Ω デアルカラ, $R =$ 属スル
 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_e$ ヲ $k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_e) =$ 添加シテ
 Ω トナル如クシ得ル. シカモ η_i ハ最高乗ノ係数 $1 =$ シ
 テ $k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_e; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{i-1})$ ナル多項式
 整域 $=$ 属スル係数ヲ有スル既約方程式ヲ満足スル如クナシ
 得ル. η_1 ノ $\overline{\Omega} =$ 於テ對應スル元 $\overline{\eta_1}$ ハ η_1 ノ $k(\xi_1, \xi_2,$
 $\dots, \xi_e) =$ 於ケル既約多項式 $=$ 於テ $\xi_i \rightarrow \overline{\xi_i}$ トシタ
 トキノ $\wedge =$ 於ケル既約因数 $\varphi_1(\eta_1)$ ヲ零ナラシム. 同様
 $= \overline{\eta_2}$ ハ η_2 ノ $k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_e; \eta_1) =$ 於ケル既約
 多項式 $=$ 於テ $\xi_i \rightarrow \overline{\xi_i}, \eta_1 \rightarrow \overline{\eta_1}$ トシタトキノ既約因数
 $\varphi_2(\eta_2)$ ヲ零ナラシム. 以下同様.

$\overline{\Omega}$ ハコレ等 $\overline{\xi_i}, \overline{\eta_i}$ ヲスベテ $k =$ 添加シテ出来タ
 体デアル.

今 $k = k(\xi_2, \dots, \xi_e), R_1 = k(\xi_1, \eta_1, \eta_2, \dots,$
 $\eta_e)$ トオキ, $k_1(\xi_1) =$ 於テ $\text{mod } f_1(\xi_1)$ トシタトキノ
 η_1 ノ満足スル既約方程式ヲ $\varphi_1^{(1)}(\eta_1) \equiv 0$ トス. コレハ

$\xi_i \rightarrow \bar{\xi}_i$, トスレバ $k, (\bar{\xi}_i) =$ 於テ η_1 / 満足スル既約方程式デアアル。同様 $= \text{mod } f_1(\xi_1)$ トシタトキ $k, (\bar{\xi}_1, \eta_1) =$ 於ケル η_2 / 満足スル既約方程式 $\varphi_2^{(1)}(\eta_2) \equiv 0$, 以下同様。

但シ $\varphi_j^{(1)}(\eta_j)$ ハ $\xi_i \rightarrow \bar{\xi}_i, \dots$ トシタトキ $\varphi_j(\eta_j)$ トル因数ヲ有スル方ナリトス。カナル $\varphi_1^{(1)}(\eta_1), \dots, \varphi_\nu^{(1)}(\eta_\nu)$ 及ビ $f_1(\xi_1)$ ヲ Basis トスル Ideal ハ $R_1 =$ 於ケル teilerlos + Primideal デ, コレニヨル 剰余体ハ k_1 / 有限次代数的拡大デアアル。カクノ如キコトヲ繰ル返シ, 最後ニ $k = \bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \dots, \bar{\xi}_{t-1}$ ヲ添加シタ体 $k^{(t-1)}$ ヲ係數体トシテ $k^{(t-1)}[\xi_t, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_\nu]$ ヲ R_t トシタトキ, $f_t(\xi_t)$ ハ $k^{(t-1)}$ = 於ケル既約因数デ $\bar{\xi}_t$ / 満足スルモ, $f_t^{(t)}(\xi_t)$, $k^{(t-1)} =$ 於テ $\text{mod } f_t^{(t)}(\xi_t)$ トシタトキノ $\varphi_j^{(1)}(\eta_j)$ ($j = 1, 2, \dots$) / 既約因数デ $\bar{\eta}_j$ / 満足スルモ, $\varphi_j^{(t)}(\eta_j)$ ヲ Basis トシタ $R_t =$ 於ケル Primideal = ヨル Restbildung = ヨリテ丁度 t 個ノ dimension 1 ナル Restbildung / 積 / 結果カ得ラレル。

ユノ結果ノ Restbild ハ $\bar{\Omega}$ ヲ係數体ニ有シ, $R/\mathfrak{p}$ ニヨル結果ト同一デアアル。 (証終)

〔定義〕 Ω ノソレニ含マレル Primkörper = 關スル Transzendenzgrad カ有限デ $\bar{\Omega}$ / ソレニ含マレル Primkörper = 關スル Transzendenzgrad = 零シトキコノ Restbildung ヲ null-dimension-

nal トイフ. 特 = Ω が代数数体 + ルトキハ absolut
null-dimensional + Restbildung トイフ.

[定理 7] Ω の標数 $p \neq 0$ + ラバ null-dimensional
+ Restbildung ハ存在セヌ. Ω の標数 $p = 0$
+ ルトキハ null-dimensional + Restbildung
存在シ, $\bar{\Omega}$ の標数 $\neq 0$ トナル. 即チ null-dimensional
+ Restbildung ハ charakteristiktren
デハナイ.

(証) $\bar{\Omega}$, null = abbild + ルル $\in$ / a ハ $\Omega =$
属スル Primkörper k の代数的拡大 = 属スル. ソコデ
標数 $\neq 0$ + ルトキハ, a がアル有限体 = 属シ, $a^{p^f-1} = 1$
トナリ, 1 が Abbildungsideal $\mathfrak{p} =$ 属スルコト =
ナリ $\mathfrak{p} = R$ トナツテ不合理.

次 = 標数 = 0 + ルトキハ, a ハ k , 有限次代数的拡大
= 属スルカラ a , $k =$ 於テ満足スル既約方程式 (係数 $\in R$)
ハ常数項ハ $\mathfrak{p} =$ 属シ, 従ツテアル有理素数 p' が $\mathfrak{p} =$ 属
スル.

故 = 任意ノ R ノ元 $\omega =$ ツイテ $p'\omega \in \mathfrak{p}$. $\therefore \bar{\Omega}$ ノ標
数 = $p' \neq 0$ トナル.

(系) Ω ノ標数 $\neq 0$ + ラバ Restbildung ハスベテ
Charakteristiktren デアル. 一般 = Restbildung
ガ charakteristiktren + ラバ $\bar{\Omega}$ ハ $\Omega =$ 含マレ
ル Primkörper, algebraisch-abgeschlossen
Hülle = 同型 + ル $\in$ / $\supset$ 含ム.

§ 2

S が 特 = 常數体 $\wedge$ 不定元 z を有スル代數函数体ノ場合 = ツイテ考フ。コノ場合ハ $\Omega = \wedge(z)$ デアル。 $\wedge$ ハアル *Integritätsbereich* I ノ *Quotientenkörper* デアルトスル。 I = 於ケル *teilerlos* + *Primideal* $\mathfrak{p}$ フトリ、 $\wedge(z)$ ノ元 = シテ係數ガスベテ I = 屬シ、分母ノ係數ノ内 = $\mathfrak{p}$ = 屬サスモノアルトキ、カナル元ヲ $\mathfrak{p}$ -ganz トイフ。カナル元ノ集合ハ *Ring* デアツテコレヲ R トスル。 R = 於テ分子ノ係數ガスベテ $\mathfrak{p}$ = 屬スル如キモ、ノ集合ハ R = 於ケル *teilerlos* + *Primideal* デアル。

コレヲ *Abbildungsideal* $\mathfrak{p}$ = トル。 $\bar{\wedge} = I/\mathfrak{p}$ トスルトキ $R/\mathfrak{p}$ ハ $\bar{\wedge}(z)$ ト同型デアル。 *Restbild* ハ $\wedge(z)$ ノ係數体トスル多元環デアルガコレガ亦代數函数体ナルカト云フニ必ズシモノシデハナイ。

[定理 8] $\wedge$ ハ有限次代數數体或ハ任意ノ常數体ヲ有スル代數函数体トスル。 K ハ $\wedge(z)$ ノ有限次 *einfach* + 代數的拡大体トシ、且ツ $\wedge$ ノ代數的拡大ト *unabhängig* トスル。シカラバ *Restbild* $\bar{K}$ ガ亦 $\bar{\wedge}(z)$ ノ有限次 *einfach* + 代數的拡大体 = シテ $\bar{\wedge}$ ノ代數的拡大ト *unabhängig* ナル如キ *Restbildung* が無數 = 存在スル。

(証) $\wedge$ が有限次代數數体ナルトキハアル *Primideal* = ツイテ *ganz* + 元全体ヲ I トシ、ソノ中デソノ *Primideal* デ割レル元全体ヲ $\mathfrak{p}$ トスル。 $\wedge$ が代數函数

体 Λ に α がアル素因子ニツイテ ganz 元全体ヲ I ニトリ,
 I ノ中デソノ素因子ヲ割レル元全体ヲ $\mathfrak{f}$ トスル. シカラバ有限個ノ $\mathfrak{f}$ ヲ除キ, Restbild が定理 δ ノ如クナルコトが云ヘル.

K ハ $\Lambda(x) = n$ ヲ添加シテ生ジタトスルトキ, K ハ $\Lambda(x)$ ヲ係數体トシ, $1, n, n^2, \dots, n^{n-1}$ ヲ Basis トスル多元環ト考ヘラレル. 但シ

$$u^n + C_1 u^{n-1} + \dots + C_n = 0$$

コノ C_i ハ $\text{Multiplikationskonstanten}$ = 相當スル.

Restbildung = ヨツテ $\bar{\Lambda}(x)$ ヲ係數体トシ, $1, \bar{u}, \bar{u}^2, \dots, \bar{u}^{n-1}$ ヲ Basis トスル多元環 $\bar{K}$ が出来ル. 但シ

$$\bar{u}^n + \bar{C}_1 \bar{u}^{n-1} + \dots + \bar{C}_n = 0$$

コノ式ノ左辺ノ $\bar{u}$ ノ多項式が $\bar{\Lambda}(x) = 0$ 於テ既約ナルカ, 或ハ $\bar{K} = \text{Nullteiler}$ がナイコトがワカレバ, $\bar{K}$ ハ体トナルノデアル. ソレヲ証明スルノニハ Λ ヲ任意ニ代數的ニ拡大シテ証明シテヨイ. (Λ が代數體ノ場合ハ Eichler ノ証明ガアルガ, コノデハ別ノ方法ヲ採ル)

[Lemma] $K = \Lambda(x, y)$ ナルトキ x ノ $\Lambda(y)$ = 於テ満足スル既約方程式 $f_y(x)$ トシ $\overline{f_y(x)}$ ハ絶対既約ナリトス. シカラバ y ノ $\Lambda(x) = 0$ 於テ満足スル既約方程式ヲ $\varphi_x(y)$ トスルトキ $\overline{\varphi_x(y)}$ モ絶対既約トナル. 但シ有限個ノ $\mathfrak{f}$ ヲ除ク.

$$(証) \quad f_y(z) = \frac{p(z, y)}{A(y)}$$

$p(z, y)$ は y, z の多項式, $A(y)$ は y の多項式トス. y は Λ の代数的拡大 = 属せヌカラ $\varphi_z(y)$ ト $A(y)$ は素デ $p(z, y)$ は $\varphi_z(y)$ デ割レル.

$$f_y(z) = \frac{\varphi_z(y) K(y, z)}{A(y)}$$

$$L_z(y) \varphi_z(y) + M_z(y) A(y) = 1 \dots \dots \dots (1)$$

多項式 $A, p, k, L, M, f_y, \varphi_z$ 等ノ係数 p -gangナル如ク y ヲ撰ブ. $A(y), \varphi_z(y), f_y(z)$ ノ最高環ノ係数ハ1トス. $\overline{\varphi_z(y)}$ がモシ可約ナラバ y ハ $\overline{\varphi_z(y)}$ ノ因数 $\overline{\psi_z(y)}$ ヲ零ナラシム.

$$\overline{\psi_z(y)} = \frac{\overline{Q(y, z)}}{\overline{B(z)}}$$

$Q(y, z)$ は y, z ノ多項式 / $B(z)$ ハ z ノ多項式デアイル. $\overline{B(z)}$ ト $\overline{f_y(z)}$ トハ素デ

$$\begin{aligned} \overline{\psi_z(y)} &= \frac{\overline{f_y(z)} \cdot \overline{G(y, z)}}{\overline{B(z)}} \\ &= \frac{\overline{\varphi_z(y)} \cdot \overline{G(y, z)} \cdot \overline{K(y, z)}}{\overline{A(y)} \cdot \overline{B(z)}} \end{aligned}$$

$\overline{A(y)}$ ト $\overline{\varphi_z(y)}$ ハ (1) = 依リ素デアイルカラ $\overline{\psi_z(y)}$ ハ $\overline{\varphi_z(y)}$ デ割レルコト = ナリ不合理デアイル.

[定理 8 ノ証] Λ ノ代数的閉拡大ヲ Λ^* トス. $K\Lambda^*$ = 於ケルアルー次ノ素因子 Q ヲトリ, Riemann-Roch

ノ定理ニヨリ $\frac{Q^r}{Q} = y$, $(Q, Q) = 1$ ナル K ノ元 y ナル,

但シ r ハ素数トス。 Λ^* ノ代リニ Λ ノアル有限次代数的拡大 Λ' ナレバ $K\Lambda' = K'$ トス。

K' ハ $\Lambda'(y)$ ノ r 次代数的拡大トナル。 Q ガ $\Lambda'(y) =$ 属スルナラバ $\Lambda'(y) =$ Q ヲ添加シテ K' トナル。

Q ノ $\Lambda'(y) =$ 於ケル既約一次方程式ハ勿論 $\Lambda'(y) =$ 於テ絶対既約デアルカラ Lemma ニヨリ y ノ $\Lambda'(Q) =$ 於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(Q)} =$ 於テ既約トナル。(有限個ノ p ヲ除キ)

ソコデ Q ノ $\Lambda'(y) =$ 於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(y)} =$ 於テ既約ナルコトが言へレバ, Q ノ $\Lambda'(Q) =$ 於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(Q)} =$ 於テ既約トナル。 Q ガ $\Lambda'(y) =$ 属サヌトキハ $\Lambda'(y) = Q$ ヲ添加スレバ K' トナル。(r ガ素数カカラ) ソコデ K' ハ $\Lambda'(Q) = y$ ヲ添加シタモノトナル。 Q ノ $\Lambda'(y) =$ 於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(y)} =$ 於テ絶対既約ナルコトが云へルナラバ, Lemma ニヨリ有限個ノ p ヲ除キ y ノ $\Lambda'(Q) =$ 於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(Q)} =$ 於テ絶対既約トナル。 Q ハ $\Lambda'(Q, y)$ ヲ生ゼシムルカラ Q ノ $\Lambda'(Q) =$ 於ケル既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(Q)} =$ 於テ絶対既約デアル。(以上ハ有限個ノ p ヲ除イテイヘル)

ソコデ問題ハ Q ノ $\Lambda'(y) =$ 於ケル絶対既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(y)} =$ 於テ絶対既約ナル如ク亦 Q ノ $\Lambda'(y) =$ 於ケル絶対既約方程式ガ $\overline{\Lambda'(y)} =$ 於テモ絶対既約ナル如クシ得ルコト

p (有限個, $p \nmid \ell$) 証明スレバイ。 $\Lambda(\mathbb{Z}, y)$ 或ハ $\Lambda'(u, y)$ $\mathbb{K}'$ トシ $\Omega = \Lambda'(y)$ トシテ $\mathbb{K}'$ / Restbild $\overline{\mathbb{K}'} = \Lambda$ Nullteiler カ + イ ヤ ウ = ナル コトヲ 言ヘバ イ。 $\mathbb{K}' / \Lambda'(y)$ / Λ / Hauptordnung / Modulbasis $w_1, w_2, \dots, w_r$ トス。 w_i $\mathbb{K}$ 或ハ $\mathbb{Z}$ デ表ハシタトキ 及 ビ $\mathbb{K}$ 或ハ $\mathbb{Z}$ w_i デ表ハシタトキノ係数 p -ganz ナル如ク p ヲ撰ブ。

$$\chi = \frac{Le}{\alpha \alpha'} = (B) + \text{ル元} \text{及ビ} \frac{Q \zeta}{\alpha''} = (A) + \text{ル元ヲト}$$

ル。 但シ α', α'' ハ α / 素因子ノ $\ni$ 含 $\ni$ $Le \in \Lambda$ ハ $Q = \text{素}$ トスル。 (コレハ Riemann-Roch / 定理ニヨリ可能)

$$AB = \frac{Le \zeta}{\alpha' \alpha''} \text{ ハ } p\text{-ganz} \text{デ} Q = \text{素} \text{デア} \text{ル。}$$

$$AB \equiv k_0 \pmod{Q_y}, \quad k_0 \in \Lambda$$

A, B w_i デ表ハシタトキ係数 p -ganz ナル如ク, 亦ハ k_0 カ p -素ナル如ク p ヲ撰ブ。

$$w_i \equiv \sum_{j=1}^n a_{ij} A^j \pmod{Q_y^r}, \quad a_{ij} \in \Lambda'$$

トシ, a_{ij} カスベテ p -ganz ナル如ク p ヲトル。 Q_y^r / Modulbasis ハ明ラカニ $y w_i$ デアルカラ $\sum c_i w_i$, $c_i \in \Lambda'$ ハ $c_i = 0$ ノトキニ限り Q_y^r = 属スル。

故ニ $|a_{ij}| \neq 0$. $p \nmid |a_{ij}|$ = 素ナル如クトル。 シカラバ c_i カ p -ganz + Λ' / 元デスベテハ p = 属セヌ

トスルトキ

$\sum c_i w_i \equiv \sum k_j A^j \pmod{Q_y^r}$, $k_j \in K'$
 +ラバ k_j ハスベテハ $\mathcal{P}$ -属セヌ. サテ K' ノ任意ノ元 E
 フトツタトキ

$$E w_i = \sum_{j=1}^r \mu_{ij} w_j$$

トシタトキ E , $\text{horm} | \mu_{ij} |$ ノ係数ガスベテ $\mathcal{P}$ -属ス
 ルトキハ $\overline{E} \wedge \overline{K}' = \text{於ケル Nullteiler}$ デアル. $\overline{E}$ ガ零
 +ルトキ以外カ>ル事ノタイコトヲ云ヘバイ。

$$\text{今 } E = \sum_{i=1}^r c_i [y] w_i \text{ トシ } c_i [y] \text{ ハ } y \text{ ノ多項式ヲスベ}$$

テハ y デ割レズ且ツ常数項ノ中ニ $\mathcal{P}$ -素ナルモノガアル場
 合ニツイテナル (係数ハ勿論スベテ $\mathcal{P}$ -ganz)

$$\sum_{i=1}^r c_i [y] w_i \equiv k_\nu A^\nu \pmod{Q_y^{\nu+1}}$$

$$0 \leq \nu < r$$

トシ k_ν ハ $\mathcal{P}$ -素トシテ $\nu > 0$ ($k_\nu A^\nu$ ノ項ノ前ニ $\mathcal{P}$ -属ス
 ルモノガアルトキハ左辺ニ移シテ考ヘル). $\nu = 0$ +ラザ
 ルトキハ B^ν フ乗ジ

$$\sum c_i [y] w_i B^\nu \equiv k_\nu A^\nu B^\nu \equiv k_\nu k_0^\nu \pmod{Q_y}$$

$\sum c_i [y] w_i B^\nu$ ハ ganz デコ, $\text{horm} \wedge \sum c_i [y] w_i$
 , horm ト B^ν , horm ノ積デアル. B^ν , horm ガ
 $\mathcal{P}$ -ganz ナルコトハ容易ニワカル。

$$\sum c_i [y] w_i B^r = k_0 k_0^r + \theta$$

$$\theta \in Q_y$$

θ は ganz. γ / 満足スル γ 次ノ方程式ノ最高乗ハ γ 以外ノ係数ハスベテ y デ割レル。何トナレバ θ ト Q -Beitrag γQ^S トシタトキ $S \geq \gamma$ ナルトキハ明ラカザカラ $S < \gamma$ トス。 $(S, \gamma) = 1$. y デ割レス係数ヲ有スル項アリトシ, γ / 中デ Q -Beitragノ最小ナル項ガ θ^μ ノ項ナリトスル。 $(\mu, \gamma) = 1$. シカラバ γ / 項ノ Q -Beitragハ $Q^{\mu S}$ デアル。 $(\mu, \gamma) = 1$. 他ノ項 $\theta^{\mu'}$ ノBeitragハ $Q^{\mu' S}$ 。

$\mu' S \equiv \mu S \pmod{\gamma}$ ナルトコトハナイカラ不合理トナル。
 γ / コデ $k_0, k_0^r + \theta$ ノ normノ常數項ハ $k_0^r k_0^{\gamma r}$ デユレハ p = 素デアル。 γ / コデ $\sum c_i [y] w_i$ ノ normノ係数ハスベテハ p = 属サス。即チ $\sum \overline{c_i [y] w_i}$ ノ normハ零デハナイ。故ニ $K' =$ ハ *hullteiler* ナイ。

(証終)

K ガ Λ ノ代数的拡大ト *unabhängig* デナイトキハ $\overline{K}$ ガ体トナル如キ *Restbildung*ノ存在セヌコトガアル。例ヘバ $\Lambda = k(\xi)$ デ, k ハ標數 $\neq 0$ ナル *Primkörper*ノ代数的開拡大デ ξ ハ不定元トスル。シカラバ $K = \Lambda(\sqrt[p]{\xi}, \zeta)$ ハ如何ナル *Restbildung* = ヨツテモ体トナラス。何トナレバ定理 17ノ系ニヨリ可能ナ *Restbildung*ハ k ノ上ノ *Restbildung*ノミデ *dimension 1* デアル。 γ / コデ ξ ガ k ノ元 a = *abbild*サレルカラ $u^2 - \xi = 0$ ハ常

ニ可約トナル。

尚定理5ト定理8ニヨリ

〔定理9〕 Λ が任意ノ体デ $K \subset \Lambda(Z)$ ノ *einfach*
ト有限次代数的拡大体デ Λ ノ代数的拡大ト *unabhängig*
デ且ツ Λ ノアル部分体 L ニ関シテ *Dimension* 有限トス
ル。シカラバ K ノ *Restbild* $\bar{K}$ が $\bar{\Lambda}(Z)$ ノ上ノ代数函数
体デアル如キ $L(Z)$ ノ上ノ *Restbildung* 無数ニアル。
特ニ $\bar{\Lambda}$ ヲ L ノ代数的拡大トラシメ得ル。

(未完)

〔附記〕 本紙第223号ニ於ケル *Iderbrand* ノ
Lemma ニツイテノ記事中 C が (e_1, e_2) ノ約数ナルコ
ト及ビ (B) ノ結果が成立ツコトハ *Bauer* が1940年
ニ *Szeged* ノ *Acta* ニ発表シテキルコトヲ 守屋氏ヨリ
御注意が有リマシタ。