



Title	一般ナル係數体ヲ有スル代數函數体 及ビ 多元環ニ就 テ II
Author(s)	稲葉, 榮次
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 227, p. 597-612
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74912
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

982. 一般ノル係數体ヲ有スル代數函數体 及ビ多元環ニ就テII

稻 葉 潔 次(海兵)

K = 属スル元 y / $\Lambda(z) = \tau$ 満足スル既約方程式ヲ
 $f(t, z) = 0$, K = 属スル元 u / $\Lambda(z, y) = \tau$ 満足
スル既約方程式ヲ $\varphi(t; z, y) = 0$, u / $\Lambda(z) = \tau$
満足スル既約方程式 $\psi(t, z) = 0$ トシタトキ, 有限個
ノ f ヲ除ケバ $\overline{f(t, z)}$ 及ビ $\overline{\varphi(t; z, y)}$ ガソレゾ
レ $\overline{\Lambda(z)}$ 及ビ $\overline{\Lambda(z, y)}$ = 於テ既約ナルトキ $\overline{\psi(t, z)} \in$
 $\overline{\Lambda(z)}$ = 於テ既約トナルコトハ定理8ノ証明デ使ツタ。コ
レハ容易ニワカルコトナノデ証明ヲ略シタガ念ノタメニ記
シテオクト, $f(t, z)$ / t = 関スル次数ヲ m , $\varphi(t; z,$
 $y)$ / t = 関スル次数 n トシタトキ $\psi(t, z)$ / 次数ハ mn
ノ約數 S デアル。

ソコデ $y^\lambda u^\mu$ ($\lambda = 0, 1, 2, \dots, m-1$; $\mu = 0, 1, 2,$
 $\dots, n-1$) ナル mn 個ノ元ハ $\Lambda(z)$ = 関シ *linear*
unabhängig デアルガ, 假定ニヨリ, $y^\lambda u^\mu \in$
 $\overline{\Lambda(z)}$ ノ上ニ於テ *linear unabhängig* デナケレバ
ナラヌ。

サテ $1, u, u^2, \dots, u^{S-1}$ ヲ $y^\lambda u^\mu$ デ表ハシタト
キ / $\Lambda(z)$ = 属スル係數デ作ツタ行列ノ *Rang* ハ S デア
ルガ, コレヲノ係數ガ *ganz* 且ツ零デナイ S 次ノ行列
式ノ値 = *prim* ナル様ニ f ヲトツテオケバ $1, \overline{u}, \overline{u}^2, \dots$

..... $\bar{u}^{s-1} \in \bar{\Lambda}(Z) =$ 於テ *linear unabhängig* アル. 従ッテ $\overline{\psi(t, Z)} \wedge \bar{\Lambda}(Z) =$ 於テ既約デアル.

サテ定理 8 及ビ定理 9 = 於テ K が $\Lambda(Z)$ の *einfach* + 有限次代数的拡大トシテアルガ, コノ *einfach* トイフ假定ハ案ハ不要デアル.

[定理 9'] Λ が代数数体カ或ハソノアル部分体 $k =$ 關シ *Dimension* 有限 = シテ正ナル体トス. K が $\Lambda(Z)$ の有限次代数的拡大体デ Λ / 代数的拡大ト *unabhängig* + ラバ, K / *Restbild* $\bar{K}$ が $\bar{\Lambda}(Z)$ / 上ノ代数函数体トナル如キ *null-dimensional* 或ハ $k(Z)$ / 上ノ *Restbildung* 無数 = 多クアル. 特ニ $\bar{\Lambda} \supset k$ / 代数的拡大トラシト得ル.

[証] $K \wedge \Lambda(Z) = y_1, y_2, \dots, y_\nu$ ヲ添加シテ出来ルモノトシ, $y_j (j = 1, 2, \dots, \nu)$, $\Lambda(Z, y_1, y_2, \dots, y_{j-1}) =$ 於ケル既約方程式 $F_j(y_j) \wedge \Lambda$ ヲ如何ニ代数的ニ拡大シテモ既約ナルコトニ變リガナイ. Λ / 代数的開拡大ヲ Λ^* トス.

y_i / $\Lambda(Z) =$ 於ケル既約方程式ガ *Exponent* e_i ヲ以テ *inseparable* ナルトキ, e_i ノ中 e カ最大ナルト假定シテイ. $e_1 = e$ ト記ス. $Z^{\frac{1}{pe}} \wedge \Lambda^*(y_1, Z) =$ 含コレル. (p ハ標数)

$y_1 \wedge \Lambda^*(Z^{\frac{1}{pe}}) =$ 於テ *separable* + 既約方程式 $F_0(y_1)$ ヲ満足スル. (*Prenzbische Akademie / Sitzungsberichte* (1934) = 於ケル *Klasse* /

論文参照)

$j > 1$ とし $F(y_j) \cap \Lambda^*(Z^{\frac{1}{pe}}, y_1, y_2, \dots, y_{j-1})$ が既約となり、separable である。そこで $K\Lambda^*$ は $\Lambda^*(Z^{\frac{1}{pe}})$ に einfach と有限次代数的拡大となる。そして $K\Lambda^*$ の Erzeugende を u とする。Konstantenverengung を行い Λ となる有限次代数的拡大 Λ' をとれば $\Lambda'(Z^{\frac{1}{pe}}, u) = K\Lambda'$ となる。

定理 8 及び定理 9 =ヨリ $u, \Lambda'(Z^{\frac{1}{pe}}) =$ 於て満足する既約方程式が $\bar{\Lambda}'(Z^{\frac{1}{pe}}) =$ 於て $\neq$ 既約となる如く Restbildung 無数 = 存在する。 $y_1^{\lambda_1} y_2^{\lambda_2} y_3^{\lambda_3} \dots y_v^{\lambda_v}$ が $\Lambda'(Z^{\frac{1}{pe}}) =$ 於て linear unabhängig となるときコレヲ $1, u, u^2, \dots$ デ表ハシタとき $\Lambda'(Z^{\frac{1}{pe}}) =$ 属スル係数がすべて p -ganz となる如く且ツこの係数ノ行列式 = 素ナルヌラ = p ヲ撰ベバ $\bar{y}_1^{\lambda_1} \bar{y}_2^{\lambda_2} \dots \bar{y}_v^{\lambda_v}$ が $\bar{\Lambda}'(Z^{\frac{1}{pe}}) =$ 關シ linear unabhängig となる。

そこで $\Lambda'(Z^{\frac{1}{pe}}) =$ 於て既約ナル $F_0(y_1) \cap \bar{\Lambda}'(Z^{\frac{1}{pe}}) =$ 於て $\neq$ 既約であり、 $\Lambda'(Z, y_1, y_2, \dots, y_{j-1}) =$ 於て既約ナル $F_j(y_j)$, $j > 1$ は $\bar{\Lambda}'(Z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{j-1})$ が既約となる。そこで $F(y_1) \cap \bar{\Lambda}'(Z) =$ 於て既約。

結局 $F_j(y_j)$ ($j = 1, 2, \dots$) は $\bar{\Lambda}(Z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_{j-1})$ が既約となり K の Restbild $\bar{K}$ へ移行する。(証終)

$K = K, \Lambda[z], \text{上}, \text{Hauptordnung } I,$
 $\text{Restbild } \bar{I} \text{ が } \bar{K}, \bar{\Lambda}[z], \text{上}, \text{Hauptordnung}$
 $\text{トナル如キ Resthomomorphism 如何ヲ調べる。}$
 $\text{Hauptordnung } I, \text{modulbasis, normal}$
 $\text{basis 等ニ関シテハ, Math. Zeitschr. Bd.}$
 $41 (1936) = \text{於ケル F. K. Schmidt / 論文参照}$
 $\text{スル。亦コノ記号ヲ説明ナシニ用フルコトガアル。}$

$[\text{Lemma 2}] \quad \Lambda$ の標数 0 ナル任意ノ体トス。
 K は $\Lambda[z]$ ノ上ノ Λ ノ代数的拡大ト独立ノ代数函数
 体トスル。

Λ^* が Λ ノ任意ノ拡大ナルトキ, K ノ $\Lambda[z]$ ノ上ノ
 $\text{Hauptordnung } I, \text{modulbasis}$ は $K^* = K\Lambda^*$
 $\text{ノ } \Lambda^*[z] \text{ ノ上ノ Hauptordnung } I^*, \text{modul}$
 $\text{basis トナル。亦コノトキ } K \text{ ノ normalbasis}$
 $\text{ハ } K^* \text{ ノ normalbasis トナル。且コレヲ、}$
 $\text{Hilfsbemertung ニ関スル Exponent ハ変}$
 ラヌ。

$[\text{定義}] \quad \Lambda = \text{有元個ノ元 (代数的デモ超越的デモ}$
 $\text{イノ)ヲ添加シテ拡大ヲ } \Lambda \text{ ノ Dimension 有限ト拡大}$
 トイフ。

$[\text{Lemma, 証}] \quad I^*$ ノアル modulbasis 或ハ
 $\text{normalbasis ヲ } b_i^* \text{ トシ, コレノ } \Lambda^* = \text{属スル標数ヲ}$
 $\text{スベチ } \Lambda = \text{添加シタモ、ハ } \Lambda \text{ ノ dimension 有限ヲ拡大}$
 $\text{デコレヲ } \Lambda' \text{ トスル。}$

I / Modulbasis b_i が $K \wedge' = K'$ / $\wedge'[\mathbb{Z}]$ / $\pm$ /
Hauptordnung I' / Modulbasis ナルコトがワカレ
バ b_i^* ト b_i トハ行列式ノ値が $\wedge' =$ 属スル如キ Trans-
formation デ結び付クカラ b_i が I^* / Modulbasis
トナル。

トコロデ $\wedge$ / dimension 有限 + 拡大 = ヨッテ b_i が
Hauptordnung / Modulbasis ナルコトヲ決ハタイ
コトヲ証スル = ハ, ーツノ不定元 x ヲ $\wedge =$ 添加シタ場合及
ビ $\wedge$ ヲ有限次代数的 = 拡大シタ場合ニツイテ証明スレバイ
イ。 Normalbasis = ツイテモ同ジ。

$$(1) \quad \wedge^* = \wedge(\infty) \text{ ナルトキ}$$

$$I^* \text{ノ元ガ } \sum_{i=1}^n Q_i(x, \mathbb{Z}) b_i \text{ ナル形} = \text{表ハサレタトスル。}$$

但シ $Q_i(\infty, \mathbb{Z})$ ハ $\wedge(\infty) =$ 於ケル $\mathbb{Z}$ / 有理函数デアアル。モ
シ $Q_i(\infty, \mathbb{Z})$ / ワチ = $\mathbb{Z}$ / 多項式ナラザルモノアリトス
レバ, ソレヲ $Q_i(\infty, \mathbb{Z})$ トシ, $Q_i(a, \mathbb{Z})$ ガ $\mathbb{Z}$ / 多項式ナ
ラザル如ク x / 値 = $\wedge =$ 属スル a ヲトラシムルコト
ヲ得。

シカモカナル a / トリ方ハ無数ニ多クアリ, シカル
= I^* / 元ノ $\wedge(\infty, \mathbb{Z}) =$ 於ケル方程式ノ係数ハソノ最高
乗ノ係数 1 トシタトキ, $\mathbb{Z}$ / 多項式トナルハザナルヲ以テ
有限個ノ a ヲ除キ, $x = a$ トシタルトキ $\sum_{i=1}^n Q_i(a, \mathbb{Z}) b_i$
ガ $I =$ 属スルコト = ナリ, $Q_i(a, \mathbb{Z})$ ハ $\mathbb{Z}$ / 多項式ナラザ
ルヲ以テ b_i が I / Modulbasis ナルコト = 反ス。

従って b_i は I^* の *modulbasis* となつてゐる。

次に b_i が *normalbasis* となることを示す。

$b_i \in \mathbb{Z}^{\exp b_i}$ が $\mathcal{V}_\infty / \Gamma_\infty$ の *modulbasis* となること、これが $\mathcal{V}_\infty^* / \Gamma_\infty^*$ の *modulbasis* となることを、 $(\mathcal{V}_\infty^* \cap \mathbb{Z})$ の分母 = 入る素因子 = すべて *ganz* となる、(集りて、即ち $\Lambda^*(\mathbb{Z}) =$ 於ける方程式の係数が最高乗の係数となる) となることを $\Gamma_\infty^* =$ 属する如き α 、(集りてある)、シカると $\mathbb{Z} \sum c_i(x) b_i \in \mathbb{Z}^{\exp b_i}$, $c_i(x) \in \Lambda^*$ となる如き元が $\mathcal{V}_\infty^* =$ 属するところとなる。これより $\Lambda^*(\mathbb{Z}) =$ 於ける満足する方程式の係数 $\Gamma_\infty^* =$ 属するが、 α の分母 $\mathbb{Z}$ の多項式の最高乗の係数が零とならざる如き $\alpha = \Lambda =$ 属する α となる値を與へ、且つ $c_i(\alpha)$ がすべて $\mathbb{Z}$ に入るやうにする。

シカラバ $\mathbb{Z} \sum c_i(\alpha) b_i \in \mathbb{Z}^{\exp b_i}$ は $\mathcal{V}_\infty =$ 属するところとなり、 $b_i \in \mathbb{Z}^{\exp b_i}$ が $\mathcal{V}_\infty / \Gamma_\infty$ の *modulbasis* となることは反する。よつて $b_i \in \mathbb{Z}^{\exp b_i}$ は $\mathcal{V}_\infty^* / \Gamma_\infty^*$ の *modulbasis* となり即ち b_i は K^* における *normalbasis* となる。

(d) Λ^* が Λ の有限次代数的拡大で $\Lambda^* = \Lambda(\alpha)$ となること I^* の元 A は $K =$ 属する係数を持つる α の多項式として表はされる。このとき $K =$ 属する係数 $\mathbb{Z}$ となる。何とならば

$$A = a_0 + a_1 \alpha + \cdots + a_{m-1} \alpha^{m-1}$$

$$a_i \in K$$

トシタトキ, $\alpha \rightarrow \alpha^\sigma + \text{ル } \Lambda^* / \Lambda / \text{上 } \text{Automorphism}$
 $\sigma = \text{ツキ}$

$$A^\sigma = a_0 + a_1 \alpha^\sigma + \dots + a_{m-1} \alpha^{\sigma(m-1)}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \dots & \alpha^{m-1} \\ 1 & \alpha^\sigma & \alpha^{\sigma^2} & \dots & \alpha^{\sigma(m-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \neq 0$$

デアルカラ α_i ハスベテ $I = \text{属スルコト}$ が容易ニワカル。
 故ニ b_i ハ I^* ノ *modulbasis* デアル。次ニ b_i が
normalbasis ナルトキハ, 即チ $b_i \mathbb{Z}^{\exp b_i}$ が $\mathbb{V}_\infty / \Gamma_\infty$
 ノ *modulbasis* ナルトキハ, $\mathbb{V}_\infty^*$ ノ任意ノ元ヲ係數
 $K = \text{属スル}$ ノ多項式ト表ハシタトキ, ソノ係數ハ $\mathbb{V}_\infty =$
 属スル。(上ト同様ニ証シ得ルカラ略ス)。故ニ b_i ハ K^*
 ノ *normalbasis* デアル。 (証終)

標數 $\neq 0$ ナルトキハ必ズシモコノ Lemma ハ成立セ
 ス (後述ノ例参照)

[定義] K ハ $\Lambda(\mathbb{Z})$ ノ上ノ Λ ノ代數的拡大ト独立ナ代
 數函数体トスル。 Λ ノアル拡大ヲ Λ^* トシ, $K / \Lambda[\mathbb{Z}]$
 ノ上ノ *Hauptordnung* ノアル *modulbasis* = シ
 テ *normalbasis* ナルト 0_i が $K^* = K \Lambda^* / \Lambda^*[\mathbb{Z}]$
 ノ上ノ *Hauptordnung* ノ *modulbasis* = シテ
normalbasis ナルトキ, カコノ代數函数体 K ハ係
 數体拡大 $\Lambda^* = \text{關シ ganz abgeschlossen}$ トイ
 フ。

標数 0 ナラバ $\wedge$ ト独立ナ代数函数体ハスベテ係数体
 拡大ニ関シ *ganz abgeschlossen* デアルガ、標数
 $\neq 0$ ナルトキハ必ズシモソウデナイ。任意ノ係数体拡大 $\wedge^*$
 $=$ 関シ常ニ $\wedge =$ アル dimension 有限ナ拡大ヲ行ヘバ
ganz abgeschlossen トナル。何トナレバ K^* /
 $\wedge^*[Z]$ / 上ノ *Hauptordnung* / アル *Modul-*
basis = シテ *Normalbasis* ナルモ、ニ於ケル $\wedge^*$
 ニ属スル係数ヲスベテ $\wedge =$ 添加シタモ、ヲ新ニ係数体トス
 レバイ。

〔定理10〕 標数 0 ナルトキ任意ノ係数体縮小ニヨリ
 $K / \wedge[Z]$ / 上ノ *Hauptordnung* I / *Modul-*
basis = シテ *Normalbasis* ナルモ、 O_i ナ適當ニ
 トレバ、 $\forall$ / *Restbild* $\bar{I}$ ハ $K / \bar{\wedge}[Z]$ / 上ノ
Hauptordnung = ナリ、ソシテ $\bar{O}_i$ ハ $\bar{I}$ / *Modul-*
basis = シテ *Normalbasis* トナル。

標数 $\neq 0$ ナルトキハ *Restbild* ガ係数体拡大 $\wedge =$ 関
 シ *ganz abgeschlossen* ナル如キ係数体縮小ナラ
 バ1常ニ成リ立ツ。ユノ際 O_i / *Exponent* ハ $\bar{O}_i$ /
 ソレニ等シ。

(証) Lemma 2 及ビ定義ニヨリ $\bar{I}$ / アル *Modul-*
basis = シテ *Normalbasis* ナルモ、 I / *Modul-*
basis = シテ *Normalbasis* トナルカラ、コレヲトレ
 バイ。

〔定理11〕 *Restbild* ガ係数体拡大 $\wedge =$ 関シテ

ganz abgeschlossen + ル如キ係数体縮小 = ヨッ
 $\overline{K}$ / 示性数ハ K / ソレト同ジデアル。

[定義] *Resthild* が係数体拡大 λ = 関シテ
ganz abgeschlossen + ル如キ係数体縮小ヲ *geschlechtstren* トイフ。

[定理 11 / 証] $\overline{I}$ / *modulbasis* = シテ *normal-basis* + ル $\overline{O}_i$ / *exponent* ヲ $\overline{W}_i$ デ示セバ

$$\overline{g} = -\sum \overline{W}_i - n + 1$$

O_i / *exponent* モ $\times$ ハリ $\overline{W}_i$ デアルカラ K / 示性数
 ハ $\overline{g}$ = 等シ。

例 1. k ハ標数 $p \neq 0$ + ル *Prinkörper* / 代数的
 閉拡大トシ, ξ ハアル不完元, 常数体ヲ $\Lambda = k(\xi)$ トス。
 $K \supset \Lambda(Z)$ / 上ノ代数函数体デ $\sqrt[p]{(Z^p - \xi)Z}$ ヲ添加シテ
 出来ルモノトス。コノ K がアル係数体拡大 = 関シ *ganz
 abgeschlossen* デナイコトヲ証スル。

K = 属スル元 A ハ

$$\begin{aligned} & C_0(Z) + C_1(Z) \{(Z^p - \xi)Z\}^{\frac{1}{p}} \\ & + \dots + C_{p-1}(Z) \{(Z^p - \xi)Z\}^{\frac{p-1}{p}} \\ & C_i(Z) \subset \Lambda(Z) \end{aligned}$$

ナル形デアル。ソノ *norm* ハ

$$\begin{aligned} & C_0(Z)^p + C_1(Z)^p (Z^p - \xi) \\ & + \dots + C_{p-1}(Z)^p (Z^p - \xi)^{p-1} Z^{p-1} \end{aligned}$$

デアルカラ, *norm* が Z^p / 有理函数 + ルトキ

$$C_1(Z) = 0, C_2(Z) = 0, \dots, C_{p-1}(Z) = 0$$

トナリ, ζ ノ元 A ハ $\Lambda(\zeta) = \text{属スルコト} = \text{ナル}$. 今 Ω ガ $\zeta^P - \xi$ ノ分子 = 入ル素因子トシ $\mathfrak{L}$ ハ ζ ノ分子 = 入ル素因子ノ乗デ次数ガ Ω ノソレ = 等シトス.

シカラバ $\frac{\Omega}{\mathfrak{L}}$ ハ $\Lambda(\zeta) = \text{属スル元} = \text{ヨツテ生ズル主因子}$ デハナイ. 亦 $\frac{\Omega}{\mathfrak{L}}$ ガ主因子 (A) ガトスルト A ノ *norm*ハ $\frac{\Omega^P}{\mathfrak{L}^P} = \left(\frac{\zeta^P - \xi}{\zeta^P} \right) = \text{等シク } \zeta^P$ ノ有理函数デアアルカラ $\frac{\Omega}{\mathfrak{L}}$ ハ主因子デナイコト = ナル.

ソコデ *Riemann - Roch*ノ定理 = ヨリ示性数ハ零ヨリ大デアアル.

サテ $\Lambda' = \Lambda(\xi^{\frac{1}{P}})$ トスレバ $K' = K\Lambda' = \Lambda'(\zeta, P\sqrt{\zeta})$ トナリ, K' ノ示性数ハ明ラカ = 零デアアル. 依ツテ K ハ係數体拡大 $\Lambda' = \text{關シ } \textit{ganz abgeschlossen}$ デハナイ.

コレ = ヨリ $\Lambda = k(\xi)$ ナルトキ $\Lambda(\zeta) = P\sqrt{(\zeta^P - \xi^P)\zeta}$ ヲ添加シタ代数函数体 K_1 = ツイテ $\bar{\Lambda} = k(\xi^P)$ ナル係數体縮小ヲ行ハバ *Geschlecht* *tren*デナイコトガワカル.

[定理 12] K ガ定理 9' = 於ケル如キ代数函数体トスル. 但シ $\Lambda(\zeta)$ ノ上デ *einfach separable*デ任意ノ代數的拡大 = 關シ *ganz abgeschlossen*トスル.

シカラバ K ノ *Restbild* $\bar{K}$ ガ亦体トナリ, K ノ $\Lambda(\zeta)$ ノ上ノ *Hauptordnung* I ノ *Restbild* $\bar{I}$ ガ

$\bar{K}$, $\bar{\Lambda}[Z]$ / 上, *Hauptordnung* トナル如ク $k(Z)$ / 上, *Restbildung* 或ハ *null-dimensional* + *Restbildung* 無敵ニ多クナル. コノトキ $\bar{I}$ / 上, *Modulbasis* $\bar{O}_i$ / *Restbild* $\bar{O}_i$ / $\bar{I}$ 上 *Modulbasis* トナル.

[証] K 上 $\Lambda(Z) = U$ ヲ添加シテ出来タモノトス. I / *Modulbasis* O_i ヲ $\sum_{j=0}^{n-1} C_{ij}(Z) U^j$ ト表ハシタトキ / $C_{ij}(Z)$ が $\mathbb{F}$ -*ganz* ナル如ク $\mathbb{F}$ ヲ撰ブ. $O_1, O_2, \dots, O_n$ デ作ツタ *diskriminant* ヲ d トシ, $d = 0$ ナル係数スベテ $\mathbb{F}$ -*ganz* ナ, Z / 最高冪 / 係数 $\mathbb{F} = \text{prim}$ ナルヲ $\mathbb{F} = \mathbb{F}$ トル. *Restbild* $\bar{K}$ が体トナル如ク $\mathbb{F}$ ヲ撰ビ, $\bar{K}$ / $\bar{\Lambda}[Z]$ / 上, *Hauptordnung* I' / 元ハ $\bar{O}_i = \text{ヨツテ表ハサレル}$. ソノトキ / 係数ハ $\frac{\bar{Q}_i}{d}$ ナル形トナル.

$\bar{Q}_i$ ハ Z / 多項式デアル. $\bar{O}_i$ が I' / *Modulbasis* ナルコトヲ云フニ d / 次数ヲ m トシ, $P_i = a_{i0} + a_{i1}Z + \dots + a_{im}Z^{m-1}$, $a_{ij} \in \Lambda$ トオクトキ $\sum_{i=1}^n \frac{\bar{P}_i}{d} \bar{O}_i$ ナル元 / 満足スル $\bar{\Lambda}(Z) = 0$ ナル方程式 / 係数がスベテ Z / 多項式トナリソノ最高冪 / 係数 / トナル / $\bar{P}_i = 0$ ナルトキニ限ルコトヲ云ハバイ.

今 $U_i = u_{i0} + u_{i1}Z + \dots + u_{i,m-1}Z^{m-1}$ トオキ u_{ij} ハ mn 個ノ不定元トスル. ($i=1, 2, \dots, n$)

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} o_j$$

$e_{ij} = 1 (i=j), e_{ij} = 0 (i \neq j)$ トスルトキ
 $|C_{ij} - x e_{ij}| \wedge E$ / characteristic equation
 デアル。 $u_{ij} = a_{ij}$ トシタトキユレノ x^{n-s}
 ノ項ノ係數ガ d^s デ割レルノハ a_{ij} ガ係數ガ $\wedge$ = 屬スル
 アル u_{ij} = 關スル齊次方程式ノ system ノ解ナルトキ
 = 限ル。 ユレガ $s = 0, 1, 2, \dots, n$ = ツイテ成立テバ

$\sum \frac{P_i}{d} o_i$ / characteristic equation / 各係數

ガ $\mathbb{Z}$ / 多項式トナルノデアルカラ、 o_i ガ I / modul-
 basis ナル限リ $\wedge$ ヲ如何ニ代數的ニ拡大シテモ $P_i = 0$
 即チ $a_{ij} = 0$ デナケレバナラヌ。 ソコデ $s = 0, 1, 2, \dots$
 $\dots, n$ トシタトキノ u_{ij} = 關スル齊次方程式ノスベテノ
 system ノ解ハ係數体 $\wedge$ ヲ如何ニ代數的ニ拡大シテモ
 $u_{ij} = 0$ ナル trivial ナ解ノミ有スル。 從ツテソノ齊
 次方程式ノ係數ニ加法、減法、乗法ヲ施シテ出来タ

Resultanten ノ中ニ零デナイモノガアル。 コレヲノ
 齊次方程式ノ係數ガスベテ p -gang ナル如ク且ツ零デナ
 イ Resultant ノ値 = prim ナル如ク p ヲ撰ベバ

$$\sum_{j=1}^n \overline{c_{ij}} \cdot \overline{o_j}$$

デ $|\overline{C_{ij}} - x e_{ij}| = 0$ / 各項 x^{n-s} / 係數ガ d^s デ割レル
 ノハ $u_{ij} = 0$ ナルトキノミデアル。 ソコデ

$\sum_{i=1}^n \frac{p}{d} \overline{O}_i$ が I に属スル $\overline{P}_i = 0$ のとき I は $\overline{P}_i$ のイデアル。
(証終)

[定理 13] 定理 12 に於て O_i が K の normal basis たるとき $\overline{O}_i$ が $\overline{K}$ の normal basis たる如き Restbildung 無数に多クアル。コノとき $\overline{O}_i$ の Exponent は O_i のソレニ等シ。

(証) O_i の Exponent を ω_i とスレバ $O_i Z^{\omega_i}$ は $\mathcal{V}_\infty / \Gamma_\infty$ の modubasis である。 $\mathcal{V}_\infty$ に属スルモノハソノ $\wedge(x)$ に於ケル方程式ノ最高係ノ係数ヲノトスレバ他ノ係数ハ Γ_∞ に属スル。 $\mathcal{V}'_\infty$ が $\wedge(x)$ に於ケル方程式ノ最高係ノ係数ヲノシタトキ他ノ係数が $\overline{\Gamma}_\infty$ に属スル如キ $\overline{K}$ ノ元ノ集リトスレバ $\mathcal{V}'_\infty$ ハ $\overline{\mathcal{V}_\infty}$ ヲ含ムガ、モシモ $\overline{O}_i Z^{\omega_i}$ が $\mathcal{V}'_\infty / \overline{\Gamma}_\infty$ の modubasis となイトスルト

$$Z \sum_{i=1}^n \overline{C}_i \overline{O}_i Z^{\omega_i} \quad (\overline{C}_i \in \overline{\Lambda})$$

ナル形ノ元が $\mathcal{V}'_\infty$ に属スルコトニナル。ソレハ

$\sum \overline{C}_i \overline{O}_i Z^{\omega_i}$ ノ満足スル characteristic equation $1 x^{n-s}$, 項ノ係数ノ次数が $-s$ より大ナラザルコトヲ意味スル。

シカル $= \sum C_i O_i Z^{\omega_i}$ ($C_i \in \Lambda$) ノ characteristic equation $1 x^{n-s}$ ($s = 0, 1, 2, \dots, n$) ノ項ノ係数ノ次数が $-s$ より大ナラザルコトハ C_i がアル

有次方程式 / system の解ナルコトデアリ, $O_i Z^{w_i}$ が $\mathcal{V}_\infty / \mathcal{T}_\infty$ / modulbasis ナル限リハフ如何ニ代数的
 ニ拡大シテモ trivial ナ解ノミヲ有スル. 即チ $C_i = 0$.
 ソコデ Resultanten ノ値ノ中ニ零デタイモノガアル.
 カコルスベテノ有次方程式ノ係数が $\mathbb{F}$ -ganz ナル如ク,
 コノ零デタイ Resultant ノ値 = prim ナル如ク $\mathbb{F}$ ヲ
 撰ベバ, $Z \sum \bar{C}_i \bar{O}_i Z^{w_i}$ / characteristic
 equation ノ係数が $\overline{\mathcal{T}_\infty}$ = 属スル, ハ $\bar{C}_i = 0$ ノトキ
 ノミトナル. ヨット $\bar{O}_i Z^{w_i}$ ハ $\mathcal{V}_\infty'$ / modulbasis
 デ $\mathcal{V}_\infty' = \overline{\mathcal{V}_\infty}$ トナル. 同時ニ $\bar{O}_i$ / Exponent が w_i
 ナルコトモ証セラレタ. (証終)

[定理 14] 定理 q' = 於ケル如キ代数函数体 K =
 於テ $\bar{K}$ が亦代数函数体デ定理 12 及び 13 = 於ケル如ク
 K / $\bar{\Lambda}[Z]$ / 上 / Hauptordnung I / Restbild
 $\bar{I}$ が $\bar{K}$ / $\bar{\Lambda}[Z]$ / 上 / Hauptordnung デ I /
 Modulbasis = シテ Normalbasis ナル O_i /
 Restbild $\bar{O}_i$ が $\bar{I}$ / Modulbasis = シテ Normal-
 basis ナル如ク Restbildung ヲ撰ブトキ $\bar{K}$ / 示
 性数 $\bar{g}$ ハ K ノ γ $g =$ 等シ.

[定義] 定理 14 - 於ケル如キ Restbildung ヲ
 Geschlechtren トイフ.

[定理 14 / 証] O_i / Exponent w_i , $\bar{O}_i$ /
 Exponent $\bar{w}_i$ トスレバ, 定理 13 = ヨツテ
 $w_i = \bar{w}_i$

$$g = -\sum w_i - n + 1$$

$$\bar{g} = -\sum \bar{w}_i - n + 1$$

$$\therefore g = \bar{g}$$

例2. Λ が標数 $\neq 2$ = シテ 代数数体或ハアル部分体
 = 関シ dimension 有限 = シテ 正ナル体トス。 $K = \Lambda(z, \sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)})$ ナル代数函数体ニ於テ a, b, c
 $\in \Lambda$ トシ $(a-b)(b-c)(c-a) \neq 0$ トス。コレノ $\Lambda[z]$
 ノ上ノ Hauptordnung I ノ Modulbasis 1
 ト $\sqrt{(z-a)(z-b)(z-c)}$ ナルコト且ツコレヲハ normal-
 basis ナルコト容易ニワカル。シカシテソノ Exponent
 ハ夫々 0 及 $\frac{1}{2}$ トナリ、依テ $g = 1$ 。

シカル $= (a-b)(b-c)(c-a) \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{p}}$ ナル
 如ク $\mathfrak{p}$ フトルトキ $\bar{I}$ ガ $\bar{K}$ ノ $\Lambda(z)$ ノ上ノ Hauptord-
 nung デノト $\sqrt{(z-\bar{a})(z-\bar{b})(z-\bar{c})}$ ガソノ
 Modulbasis = シテ normalbasis トナリ且ツ
 $\bar{K}$ ノ示性数ハ 1 デアルガ、 $(a-b)(b-c)(c-a) \equiv 0$
 $\pmod{\mathfrak{p}}$ ナル如ク $\mathfrak{p}$ フトルト、ソウハナラヌ。例ヘバ
 $a \equiv b \pmod{\mathfrak{p}}$ ナラバ $\bar{a} = \bar{b}$ デ 1 及ビ $\sqrt{(z-\bar{a})(z-\bar{b})(z-\bar{c})}$
 $= (z-\bar{a})\sqrt{z-\bar{c}}$ ハ Hauptordnung $\bar{I}$ ノ Modulbasis
 = ナラヌ。ソシテ $\bar{K} = \Lambda(z, \sqrt{z-\bar{c}})$ トナリ、ソノ示
 性数要トナル。コノ場合ノ Restbildung、geschlecht-
 tren デハナリ。

定理 12 = 於テ K ガ $\Lambda(z)$ ノ上デ einfach
 separable デ且ツ係数体拡大 = 関シテ ganz ab-

geschlossen とル假定ハ必要ナルコトハ例1ヲ見レ
 バイ。コノ場合、Restbildung、可能ナルモ、ハ
 た、上、Restbildung $\neq$ dimension 1 デ
 アルカラ 従ッテ Σ ハた、アル元 $a = \text{abbild}$ サレ
 ル。ソコデ $\bar{K} = \bar{\Lambda}(\mathbb{Z}, p\sqrt{\mathbb{Z}})$ トナリ、ソノ示性数 0 ト
 ナル。

依ッテコノ場合 *geschlechtten* + *Rest-*
bildung ハ存在セヌ。併シ一般ニ常數体 $\Lambda = \text{dimen-}$
sion 有限ナル拡大ヲ行ヒマノ代リ $\mathbb{Z}^{\frac{1}{pe}}$ ヲトレハ常ニ
 定理12ノ假定ヲ満足セシメル様ニシ得ル。separable
 デアル係數体拡大ニ關シテ ganz abgeschlossen
 デナイマツナ代数函数體ノ例ハ未ダ見ツカラヌ。

(未完)