



Title	抽象M一空間ノ表現ニ就テ
Author(s)	大塚位相數學談話會
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 227, p. 629-643
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74915
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

985. 抽象M-空間ノ表現ニ就テ

大塚位相数学談話會

抽象M空間ヲ實際ニアル *bicompact space* ノ上
ノ連続函数族トシテ表現スルコトハ角谷氏, M. Krein,
吉田氏ニヨッテ解決サレ, 又 *normed ring* トノ關係
モ注意サレテキル。此処デハ F. Riesz ノ積ヲ定義スル
方法ヲ紹介シ, 兼ネテ *normed ring* ノ應用トシテ解決
スルト云フコトヲ考ヘタイト思ヒマス。(位相数学III, 1.
p.66, 本誌 889, 912 参照)

$\mathcal{L}$ ヲ実数ヲ係数トスル *vector space* デ, *semi-
order* = ツイテ以下ノ條件ヲ満足スルモノトスル。

- (i) $x \geq y$ ト $x - y \geq 0$ トハ同等。
- (ii) $x \geq 0$, $\lambda \geq 0$ + ラバ $\lambda x \geq 0$ (λ ハ實數)
- (iii) $x \geq 0$, $-x \geq 0$ + ラバ, $x = 0$
- (iv) $x \geq 0$, $y \geq 0$ + ラバ, $x + y \geq 0$
- (v) $\mathcal{L}$ ハ *semiorder* = 關シテ束ヲ作ル。
- (vi) 任意ノ $x \in \mathcal{L}$ ハ $\mathcal{L}$ ノ特定ノ元 $e > 0$ (*unit
element*) = 對シテ有界: 或ル實數 α ヲ取レバ
 $-\alpha e \leq x \leq \alpha e$
- (vii) $0 \leq y \leq \alpha e$ が任意ノ正數 α = 對シテ成立スレバ,
 $y = 0$

此処デ $x_+ = x \vee 0$, $x_- = (-x) \vee 0$, $|x| = x_+ + x_- = x \vee (-x)$,

$$\|x\| = \frac{\text{fin}}{\lambda e \geq |x|} \lambda \text{ トスレバ}$$

$$(1) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \\ \|x\| = 0 \iff x = 0$$

ヲ満足スル。

(Viii) $\mathcal{L}$ ハ $\| \cdot \|$ norm-topology = ヨツテ complete デアル。

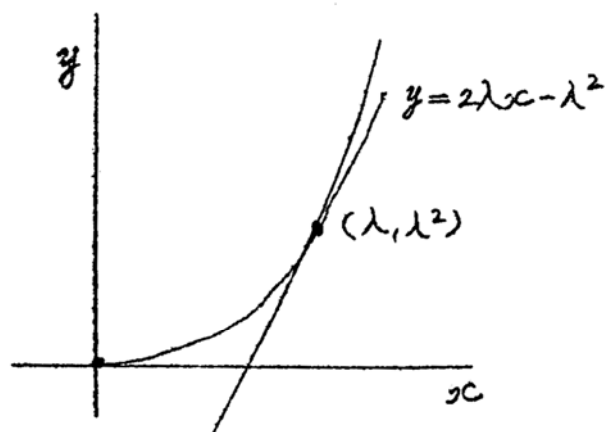
以上ノ條件 (i) — (viii) ヲ満足スル $\mathcal{L}$ デ, 任意ノ $x, y =$ 對シテ $x \cdot y$ ヲ定義シテ ring トスルコトが出来ルコトヲ, F. Riesz, *Sur la théorie ergodique des espaces abstraits*, Acta Szeged, T. 10 (1941) ノ方法 = ヨツテ示サユ。

$\mathcal{L}$ デハ無限個ノ元ノ $\sup$. ハ一般ニハ存在シナイガ

$$(2) \quad y_0 = \sup_{-\infty < \lambda < \infty} (2\lambda x - \lambda^2 e), \quad x \in \mathcal{L}$$

(脚註) 以下ノ証明中, 結合律 $(xy)z = x(yz)$ ノ証明が欠ケテ
アルコトヲ 吉田氏カラ注意シテイタダキマシタ。其レニ對シテ
最後ニ訂正ヲ追加サセテイタダキマシタ。

ノ形ノ時ハ $y_0 \in \mathcal{L}$ が存在スルコトが証明サレル。



先ヅ $\|x\| = \alpha$ トスレバ,

$\lambda > 2\alpha =$ 對シテハ

$$2\lambda x - \lambda^2 e \leq 2\lambda \cdot \alpha e - \lambda^2 e \\ \leq 0$$

同様ニ $\lambda < -2\alpha$ デモ

$$2\lambda x - \lambda^2 e \leq 0$$

故 $= \sup_{-2d \leq \lambda \leq 2d} (2\lambda x - \lambda^2 e)$ を考へる。

$$(2') \quad y_n = \sup_{r=0, \pm 1, \dots, \pm 2^n} \left\{ 2 \frac{r}{2^n} \cdot 2d \cdot x - \left(\frac{r \cdot 2d}{2^n} \right)^2 e \right\}$$

トオケバ、明カニ $\{y_n\}$ ハ單調ニ増加スル。先ツ $\{y_n\}$ ハ norm-topology 上 fundamental sequence ヲ作ルコトヲ証明シヨウ。

$$|\lambda| \leq 2d \text{ 7 } -\text{ツトリ}, 2d \frac{r-1}{2^n} < \lambda \leq \frac{r}{2^n} \cdot 2d \text{ ト } r \text{ ヲ}$$

取ル。

$$\begin{aligned} & y_n - (2\lambda x - \lambda^2 e) \\ &= \sup_m \left\{ \left(2 \cdot \frac{m}{2^n} \cdot 2d \cdot x - \left(\frac{2md}{2^n} \right)^2 e \right) - (2\lambda x - \lambda^2 e) \right\} \\ &\geq \left(2 \frac{2rd}{2^n} x - \left(\frac{2rd}{2^n} \right)^2 e \right) - (2\lambda x - \lambda^2 e) \\ &\geq -\frac{4d}{2^n} \cdot |x| - \frac{2d}{2^n} \cdot 4d \cdot e \\ &\geq \frac{12d^2}{2^n} e \end{aligned}$$

或ハ

$$(2\lambda x - \lambda^2 e) - y_n \leq \frac{12d^2}{2^n} e$$

故ニ

$$y_m - y_n = \sup_r \left\{ \left(2 \frac{2rd}{2^m} x - \left(\frac{2rd}{2^m} \right)^2 e \right) - y_n \right\} \leq \frac{12d^2}{2^n} e$$

$\therefore m$ と n と λ レカヘレバ

$$\|y_m - y_n\| \leq \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^n} \right) 12\alpha^2 \cdot e$$

トナル。即チ $\{y_n\}$ ハ基本列トナル。

(viii) カラ其ノ *limit* γ_0 トスレバ, γ_0 カ (2) γ 満足スルコトハ上ト同様デアル。

$$(3) \quad \gamma_0 = x^2$$

= ヨツテ x^2 ノ定義トスル。

$$(4) \quad x^2 \geq 0$$

(証) (2) ノ式デ $\lambda = 0$ ノ場合ヲ考ヘレバヨイ。

$$(5) \quad x \geq y \geq 0 \text{ トラバ, } x^2 \geq y^2$$

(証) 先ツ $x \geq 0$ トラバ, $x^2 = \sup_{\lambda \geq 0} (2\lambda x - \lambda^2 e)$ デアルコトニ注意スレバ

$$x^2 = \sup_{\lambda \geq 0} (2\lambda x - \lambda^2 e) \geq \sup_{\lambda \geq 0} (2\lambda y - \lambda^2 e) = y^2$$

$$(6) \quad (\alpha x)^2 = \alpha^2 x^2 \quad (\alpha \neq 0)$$

$$(証) \quad 2\lambda(\alpha x) - \lambda^2 = \alpha^2(2\mu x - \mu^2), \quad (\mu = \frac{\lambda}{\alpha}) \exists \parallel$$

$$(7) \quad x^2 = |x|^2$$

$$\begin{aligned} (証) \quad x^2 &= \sup_{\lambda \geq 0} (2\lambda x - \lambda^2 e) = \sup_{\lambda \geq 0} \{ \sup_{\lambda \geq 0} (2\lambda x - \lambda^2 e, -2\lambda x - \lambda^2 e) \} \\ &= \sup_{\lambda \geq 0} (2\lambda |x| - \lambda^2) = |x|^2 \end{aligned}$$

$$(8) \quad (\alpha x + \beta y)^2 + (\beta x - \alpha y)^2 = (\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2)$$

(証) (6) 式カラ $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ ノ場合ヲイヘバヨイ。其ノトキ

ハ

$$\{2\lambda(\alpha x + \beta y) - \lambda^2 e\} + \{2\mu(\beta y - \alpha x) - \mu^2 e\}$$

$$= (2\lambda'x - \lambda'^2 e) + (2\mu'y - \mu'^2 e) \quad \text{ヨリ}$$

此処に $\lambda' = \alpha\lambda + \beta\mu, \mu' = \beta\lambda - \alpha\mu,$

即ち $\lambda = \alpha\lambda' + \beta\mu', \mu = \beta\lambda' - \alpha\mu' \quad \text{トスル。}$

特ニ

$$(8') \quad (x+y)^2 + (x-y)^2 = 2x^2 + 2y^2$$

又 x, y 1 定義トシテ

$$(9) \quad xy = (x+y)^2 - x^2 - y^2$$

ト置ケ。則チ $xy = yx$ デアル。又 (8') 式ヲ用ヒレバ

$$(9') \quad xy = x^2 + y^2 - (x-y)^2$$

トシテモヨイ。

$$(10) \quad x \cdot (-y) = -(xy)$$

(証) (9') ト (9) ヲ用ヒテ

$$x(-y) = x^2 + y^2 - (x+y)^2 = -(xy)$$

$$(11) \quad \alpha > 0 \quad \text{トシバ} \quad x(\alpha y) = \alpha(xy)$$

(証) (8) = テ $\alpha = 1, y = \beta y$ トスレバ

$$(x + \beta^2 y)^2 + \beta^2 (x - y)^2 = (1 + \beta^2)(x^2 + \beta^2 y^2)$$

(9') カラ $(x - y)^2$ ヲ展開スレバ

$$(x + \beta^2 y)^2 = x^2 + 2\beta^2 xy + \beta^4 y^2$$

トナル。故ニ (9) ノ定義ヨリ

$$x(\beta^2 y) = \beta^2 xy$$

トナル。 $\alpha = \beta^2$ トカケ。

$$(12) \quad (x+y)z = xz + yz$$

(証) (8') = テ x ヲ $x + \frac{1}{2}z, y + \frac{1}{2}z$ トスレバ

$$\begin{aligned} & ((x+y)+z)^2 + (x-y)^2 \\ &= 2(x + \frac{1}{2}z)^2 + 2(y + \frac{1}{2}z)^2 \end{aligned}$$

(10) (11) を用ヒテ展開スレバ (12) を得ル。

$$(13) \quad x \cdot x = x^2$$

$$(証) \quad (x+x)^2 = 4x^2 = x^2 + 2x^2 + x^2 \quad \exists \quad 1$$

$$(14) \quad x \cdot 0 = 0 \quad 特 = 0^2 = 0$$

$$(証) \quad (x+0)^2 = x^2 + 0 \quad \exists \quad 1. -$$

$$(15) \quad x \cdot e = x \quad 特 = e \cdot e = e^2 = e$$

$$(証) \quad 2\lambda(x+e) - \lambda^2 e = (2\mu x^2 - \mu^2 e) + 2x + e \quad (\mu = \lambda - 1)$$

カラ, 両辺ノ $\sup_{\lambda}$ をトレバ, $(x+e)^2 = x^2 + 2x + e$,

即チ (9) ノ定義ヨリ (15) を得ル。

以上ニヨツテ, $\mathcal{L}$ を実数ノ operator トスル ring
ト考ヘルコトが出来タ。次ニ

$$(16) \quad x \geq 0, y \geq 0 \text{ トラバ } x y \geq 0$$

$$(証) \quad x-y \leq x+y, -x+y \leq x+y \text{ カラ } |x-y| \leq x+y$$

トナル。故ニ (5), (7) カラ

$$(x-y)^2 = |x-y|^2 \leq (x+y)^2$$

(9) (9') カラ展開スレバ $xy \geq 0$ を得ル。

$$(17) \quad \|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

$$\begin{aligned} (証) \quad xy &= (\|x\| \cdot e)(\|y\| e) - \frac{1}{2}(\|x\| e - x)(\|y\| e + y) \\ &\quad - \frac{1}{2}(\|x\| e + x)(\|y\| e - y) \end{aligned}$$

ヨリ, (16) を用ヒレバヨイ。

以上デ $\mathcal{L}$ ハ real normed ring トナツタ。

$$(18) \quad \|x^2\| = \|x\|^2$$

(証) (17) より $\|x^2\| \leq \|x\|^2$. 今 $\|x^2\| \leq \|x\|^2 - \varepsilon$,
 $\varepsilon > 0$ トスレバ

$$\begin{aligned} (\|x\|^2 - \varepsilon) e &\geq \|x^2\| e \geq x^2 = \sup (2\lambda x - \lambda^2 e) \\ &\geq 2\|x\| |x| - \|x\|^2 e, \end{aligned}$$

即ち $\left(\|x\| - \frac{\varepsilon}{2\|x\|} \right) e \geq |x|$ トナリ, $\|x\|$ の定義ニ反スル.

(19) $x \geq 0$ ナラバ, $x + e$ ハ $\mathcal{L}$ 中ニ逆元ヲモツ, 特ニ
 $e + x^2$ ハ逆元ガアル.

(証) 以下 I. Gelfand, Normierte Ringe, Rec.
 Math. T. 6 (1941) ヲ引用スル.

$$\text{先ツ } e \leq e + x \leq (1 + \|x\|) e$$

$$\therefore 0 < \frac{e}{1 + \|x\|} \leq \frac{e + x}{1 + \|x\|} \leq e$$

故ニ $\left\| e - \frac{e + x}{1 + \|x\|} \right\| < 1$ ナルカラ Gelfand, Hilfs-
 satz 1 カラ $\frac{e + x}{1 + \|x\|}$, 従ッテ $e + x$ ハ逆元ヲモツ. —

(18), (19) より Gelfand, Satz 15, Satz 16, Folg
 3 ヲ用ヒテ

(20) $\mathcal{L}$ ハ maximal ideal M / 全体 / 作ル bi-
 compact space $\mathcal{M}$ / 上 / 実連続函数全体 トシテ ring-
 isomorphic = 表現サレル. 且ツ

$$\|x\| = \max_{M \in \mathcal{M}} |x(M)|$$

(4) $x \geq y$ ナラバ, スベテ $M \in \mathcal{M}$ = 対シテ

$$x(M) \geq y(M)$$

(証) $x \geq 0$ / トキ $= x(M) \geq 0$ ヲ言ヘバ十分デアル。

$$xc = \lambda e + m, \quad m \in M, \quad \lambda < 0$$

トスレバ

$$\frac{m}{(-\lambda)} = e + \frac{x}{(-\lambda)}, \quad \frac{x}{(-\lambda)} \geq 0$$

トナル。即チ (19) ヨリ $\frac{m}{(-\lambda)}$, 従ッテ m ハ逆元ヲ持タネバ
ナラス。コレハ矛盾デアルカラ $\lambda \geq 0$

$$(22) \quad \text{スベテ } M \in \mathcal{M} \text{ デ } xc(M) \geq y(M) \text{ ナラバ,} \\ x \geq y$$

(証) 此ノトキ $x(M) \geq 0$ ($M \in \mathcal{M}$) カラ $xc \geq 0$ ヲ言
ヘバヨイ。

$$(x + \varepsilon e)(M) > 0 \quad (M \in \mathcal{M}) \quad (\varepsilon > 0)$$

カラ, Gelfand, Satz 20 ヨリ $\sqrt{x + \varepsilon e} = y \in \mathcal{L}$. 即

$$x = y^2 - \varepsilon e \geq -\varepsilon e$$

コノデ ε ハ任意デアルカラ $\|x_-\| = 0$, 故ニ $x \geq 0$ ト
ナル。

以上ヲマツテ

定理 『 $\mathcal{L}$ 上ノ方法デ Normed Ring トシ
タトキ $=$, $\mathcal{L}$ ノ Maximal ideal M 全体ノ作ル
bicomact space $\mathcal{M}$ 上ノ実連続函数全体トシ
テ ring isomorphic = 表現サレ

$$\|x\| = \max_{M \in \mathcal{M}} |x(M)|$$

ヲ満足シ, 且ツ $x \geq y$ ト $x(M) \geq y(M)$ ($M \in \mathcal{M}$) ト
ハ同値ナル。

又, $f(x) = x(M)$ ナル functional ハ

$$(23) \begin{cases} f(x+y) = f(x) + f(y) \\ f(\lambda x) = \lambda f(x) \\ f(x \vee y) = f(x) \vee f(y), \quad f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) \\ f(e) = 1 \quad (\text{従ッテ } |f(x)| \leq \|x\|) \end{cases}$$

$$(24) \quad f(xy) = f(x) \cdot f(y)$$

ヲ満足スル。』

注意1 特ニ $\mathcal{L}$ が初メカラ, アル bicompact space $\mathcal{R}$
ノ上ノ連続函数全体ヲアル場合ニハ, $\mathcal{R}$ ノ各点ト $\mathcal{L}$ ヲ
normed ring ト考ヘヌトキ, maximal ideal
ト一対一ニ対応スルカラ $\mathcal{R}$ ハ上ノ $\mathcal{M}$ トシテ再現サ
レル。

注意2. 角谷氏ノ結果ト同じモノデアアルコトヲ云フキニ
ハ, (23) カラ (24) ヲ得ルコトヲ云ヘバ, $f(x) = 0$ ナ
ル x ノ全体ハ $\mathcal{L}$ ノ maximal ideal トナルカラ,
ソレデ十分デアル。

(25) $f(x)$ ナル functional が (23) ヲ満足スルナ
ラバ, $f(x) = 0$ カラ $f(xy) = 0$ ($y \in \mathcal{L}$) トナル。

$$(証) \quad y_n \text{ ヲ (2')} \text{ デ定メレバ, } \|y_n - x^2\| \rightarrow 0 \text{ カラ}$$

$$f(x^2) = \lim f(y_n)$$

シカルニ

$$f(y_n) = \sup_i \{ 2\lambda_i; f(x) - \lambda_i^2 \} = \sup(-\lambda_i^2) = 0$$

故に $f(x) = 0$ とならば, $f(x^2) = 0$

同様にして $f(x+y) = f(y)$ であるから,

$$\begin{aligned} 2f(xy) &= f((x+y)^2 - y^2 - x^2) \\ &= f((x+y)^2) - f(y^2) \end{aligned}$$

= 於て

$$\begin{aligned} f((x+y)^2) &= \lim_n \sup_i \{ 2\lambda_i; f(x+y) - \lambda_i^2 \} \\ &= \lim_n \sup_i \{ 2\lambda_i; f(y) - \lambda_i^2 \} = f(y^2), \end{aligned}$$

即ち $f(xy) = 0$ となる。

さて (24) の之を直ちに用いる。

注意3. 若し $\mathcal{L}$ が初等環 ring であつて, (i) — (viii) の

条件, 他に

(ix) $x \geq 0, y \geq 0$ ならば, $xy \geq 0$

(x) $x^2 \geq 0$

が満足されるならば, 上の定理は其のまゝ成立する。

何とならば, (2), (3), (18) の他は一切其のまゝ成立する。

今 $y_0 \leq (x - \lambda e)^2$ (すべて $-\infty < \lambda < \infty$ に対して) であるならば, (21) から $y_0(M) \leq 0$ となり, (22) から $y_0 \leq 0$ であることがわかる。

故に $0 = \inf_{\lambda} (x - \lambda e)^2$

となる。之を展開すれば (2), (3), 従つて (18) が成立するコトとなる。

追加訂正

結合律 $(x \cdot y) z = x(yz)$, 証明ヲ上ト同ジキナ
方法デ証明スルコトガ, ドウモ出来ナイノデ, 此処デハ $\mathcal{L}$
ヲ complete vector lattice $\overline{\mathcal{L}}$ = 拡大スルコト =
ヨツテ, 兎ニ角一ツノ 証明ヲ映ヘルコト = シマス。

(i) — (viii) ヲ満足スル $\mathcal{L}$ デハ (vi) (vii) カラアルキメデ
スノ 公理ヲ満足スル。故ニ Birkhoff 及ビ中野氏ノ cut
ノ方法デ $\mathcal{L}$ ヲ complete vector lattice $\overline{\mathcal{L}}$ = 拡大
スルコトガ出来ル。

$\overline{\mathcal{L}} \ni u =$ 對シテ $x \rightarrow P_u x$ ヲ Projection トス
ル。即チ $x \geq 0 =$ 對シテ $P_u x = \sup_{n \geq 1} (x \wedge nu)$, 一般

$P_u x = P_u x_+ - P_u x_-$ ト置ク。其ノ時 =

$$(26) \quad P_u(x+y) = P_u x + P_u y, \quad P_u(\lambda x) = \lambda P_u x, \\ P_u(x \vee y) = (P_u x) \vee (P_u y).$$

ス $u_1, \dots, u_n$ ヲ e ノ 分割 (partition) トスル。即

$$(27) \quad \overline{\mathcal{L}} \ni u_i \geq 0, \quad u_i \wedge (e - u_i) = 0,$$

$$u_i \wedge u_j = 0 \ (i \neq j), \quad u_1 + \dots + u_n = e.$$

e ノ 分割 = 對シテハ

$$(28) \quad x = P_{u_1} x + \dots + P_{u_n} x, \quad |P_{u_i} x| \wedge |P_{u_j} x| = 0, \\ (i \neq j)$$

サテ $x \in \mathcal{L} =$ 對シテ $x_u = P_u' x \in \overline{\mathcal{L}}$, 全体 $\mathcal{L}_u$ ヲ考ヘルナ
ラバ, (26) カラ $\mathcal{L}_u$ ハ $\mathcal{L}$ ト homomorphic + vector
lattice with (i) — (viii) ヲ作ル。特ニ $u_1, \dots, u_n$
ヲ e ノ 分割トスレバ

$$(29) \quad \mathcal{L} \ni x \longrightarrow (x_{u_1}, \dots, x_{u_n}), x_{u_i} \in \mathcal{L}_{u_i}$$

ナル對應ヲ考ヘルヲバ

$$(30) \quad \begin{cases} x_{u_i} = y_{u_i} \quad (i=1, \dots, n) \text{ ヲバ } x=y \\ x+y \longleftrightarrow (x_{u_1}+y_{u_1}, \dots, x_{u_n}+y_{u_n}) \\ \lambda x \longleftrightarrow (\lambda x_{u_1}, \dots, \lambda x_{u_n}) \\ x \vee y \longleftrightarrow (x_{u_1} \vee y_{u_1}, \dots, x_{u_n} \vee y_{u_n}) \end{cases}$$

ヲ満足スル。特ニ $\mathcal{L}_{u_i}$ 中ニ (1) = ヲツテ norm $\| \cdot \|_i$ ヲ定義スレバ, $x \in \mathcal{L}$ = 対シテ

$$(31) \quad \|x\| = \max_{1 \leq i \leq n} (\|x\|_i)$$

サテ結合律ヲ $x, y, z \geq 0$ 1 場合 = サヘ証明スレバ, 一般 1 場合 = ハ $x = x_+ - x_-$ ナル分解ト分配律 (12) トカラ証明サレル。

今 $\overline{\mathcal{L}}$ 中ニ於ケル y ノスペクトル分解

$$y = \int_0^{\|y\|} \lambda d e_\lambda, \quad e_\lambda = P_{(\lambda e - y)_+} e$$

ヲ考ヘ, $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n = \|y\|$, $\lambda_i - \lambda_{i-1} < \varepsilon$ = 對シテ

$$(32) \quad u_i = e_{\lambda_i} - e_{\lambda_{i-1}} \quad (i=1, \dots, n)$$

ヲ考ヘレバ, $u_1, \dots, u_n$ ハ e ノ分割ヲ作リ

$$(33) \quad 0 \leq \lambda_{i-1} e_{u_i} \leq y_{u_i} \leq \lambda_i e_{u_i}, \text{ in } \mathcal{L}_{u_i}$$

トナル。ヨツテ (15), (16) ヲ $\mathcal{L}_{u_i}$ 中ニ考ヘルヲバ

$$\lambda_{i-1} \|x\| e_{u_i} \leq x_{u_i} y_{u_i} \leq \lambda_i \|x\| e_{u_i}$$

$$\lambda_{i-1} \|x\| \cdot \|z\| e_{u_i} \leq (x_{u_i} y_{u_i}) z_{u_i} \leq \lambda_i \|x\| \cdot \|z\| e_{u_i}$$

トナリ, 同様 =

$$\lambda_{i-1} \|x\| \cdot \|z\| e_{u_i} \leq x_{u_i} (y_{u_i} \cdot z_{u_i}) \leq \lambda_i \|x\| \cdot \|z\| e_{u_i}$$

トナルカラ

$$(34) \quad \|(x_{u_i} y_{u_i}) z_{u_i} - x_{u_i} (y_{u_i} z_{u_i})\| \leq \varepsilon \|x\| \|z\| e_{u_i}$$

トナル。

一方 (30), (31) カラ

$$(35) \quad \begin{cases} x^2 \longleftrightarrow (x_{u_1}^2, \dots, x_{u_n}^2) \\ xy \longleftrightarrow (x_{u_1} y_{u_1}, \dots, x_{u_n} y_{u_n}) \end{cases}$$

が成立スルカラ (31), (34), (35) を合セ考ヘレバ

$$\|(xy)z - x(yz)\| \leq \varepsilon \|x\| \|z\|$$

トナル。εハ任意ニ小さク取レルカラ, 結局 $(xy)z = x(yz)$

トナル。 (証了)

注意4. 若シモ $\mathcal{L}$ が $\overline{\mathcal{L}}$ = 拡大シテ, Projectionノイロイロナ性質ヲ用ヒルコトが避ケラレナイトラバ, (4)以下ノ証明ヲスベテ今ノ結合律ト同様ニ証明スル方がヨイカモ知レナイ。其レ等ハ全ク結合律同様ニ証明出来ルノデアルカラ。

注意5. 良ク知ラレヲキルヤウ = completenessノ条件 (viii)ハ essential ナモ, デハナイ。 $\mathcal{L}$ が normニ関シテ complete ナイ場合ニハ, $\mathcal{L}$ が completeナ $\mathcal{L}_0$ = 拡大スレバヨイ。

即チ $\mathcal{L}$ ノ元ノ作ル基本列 $\{x_n\}$, $\|x_m - x_n\| \rightarrow 0$ ($m, n \rightarrow \infty$)ノ全体ヲ equiv ナ関係 $\sim$ デ classニ分ケテ得ラル vector space $\mathcal{L}_0$ ヲ考ヘテ, 其処デ

$\{x_n\} \geq 0$ と $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, $y_n \geq 0$ ($n=1, 2, \dots$)
 かつ y_n / 選べるコト、スレバ

○ $\{x_n\} \geq 0$, $\{y_n\} \geq 0$, $\lambda \geq 0$ かつ

$$\{\lambda x_n\} \geq 0, \{x_n + y_n\} \geq 0$$

○ $\{x_n\} \geq 0$, $\{-x_n\} \sim \{y_n\} \geq 0$ かつ

$$x_n, y_n \geq 0, \|x_n + y_n\| \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

かつ $\|x_n\| \leq \|x_n + y_n\| = \epsilon$ かつ $\|x_n\| \rightarrow 0$, 即ち

$$\{x_n\} = 0$$

○ $\{x_n\} \cup \{y_n\} = \{x_n \vee y_n\}$. 何故かしらば

$$|x_n \vee y_n - x_m \vee y_m| < |x_n - x_m| + |y_n - y_m|$$

ヲ用ヒレバヨイ。

○ $|\{x_n\}| \leq \lambda e$ かつ λ / fin と $\lim_n \|x_n\|$ とハ一
 致スル。等々。

故 = $\mathcal{L}_0$ ハ (i) — (viii) ヲ満足シテ $\mathcal{L}$ ヲ everywhere
 dense = isomorphic = embed スル。

特 = $\mathcal{L}$ デ (23) ヲ満足スル functional ハ 矢張り
 (23) ヲ満足スル $\chi \in \mathcal{L}_0$ = マデ拡張スルコトが出来ルカ
 ラ, 結局 (viii) ヲ満足シナイ $\mathcal{L}$ デハ, 定理 = 於テ, 実連続函
 数全体トイフ代リ =, ソノ中ガ norm = 関シテ every-
 where dense かつ連続函数族トシテ表ハサレルトイフ結
 論 = ナル。コレハ 吉田氏ノ 簡明ナ方法デ得ラレタ結果 = 廻
 リ道ヲシテ到達シタコト = ナル。

注意 5 注意 3 デ 条件 (X) ハ 実ハ (i) — (ix) カラ 証明
 サレル。例へバ cut ヲ用ヒテ complete ring = $\mathcal{L}$ ヲ

拡大シテ、スペクトル分解ヲ用ヒレバワカル。但シ直接=
(X)ヲ (i) — (ix) カラ 簡單ニ導ケルカ否カハ 良クワカラ
ナイ。 (16, 11, 22)

(河田, 森田, 宮澤)