



Title	Hodographengleichung ニ就イテ I
Author(s)	渡辺, 次雄
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 228, p. 649-656
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74920
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

990. Hodographengleichung = 就イテ I.

渡辺 次 雄 (満洲國軍官學校)

§1. 砲外弾道學 = 出テフル Hodograph 方程式 = ツイテ述べサセテ戴キマス。

〔定義〕 質点ノ運動ノ経路上ノ各点ニ於ケル速度ニ等シイ Vektor フォーツノ原点 O カラ引クトキ夫等 Vektor ノ端点ガ抽ク曲線ヲ Hodograph ト云フ。

ヨク知ラレタキル様ニ Hodograph 上デノ速度ハ経路上ノ其ノ對應点ニ於ケル加速度ヲ表ハシマス。例ヘバ真空彈道ニ於テハ彈道上ノ一点ニ於ケル速度ヲ v , ソノ点ニ於ケル切線ガ水平面トナス角ヲ θ トスレバ $v \cos \theta$ = 一定トナルカラ, Hodograph ハ鉛直方向ノ半直線トナリマス。

§2. 空氣中ノ彈道ノ Hodograph 方程式 ——

圖ノ様ニ座標軸ヲトツテ, 彈道上ノ任意ノ一点ニ於ケル速度

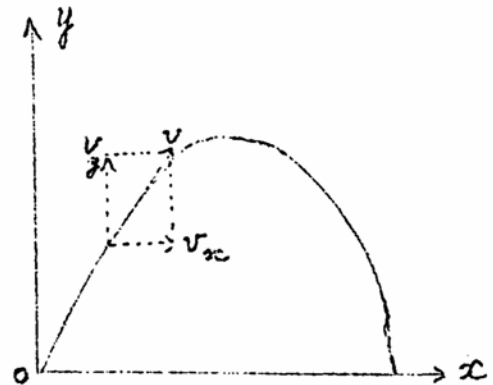
ヲ v , v ノ x, y 方向ノ分速ヲ

v_x, v_y , v ノ傾角ヲ θ トスル。

又空氣抵抗ハ速度ノミノ函数ト

スレバ Newton ノ法則カラ,

C ヲ常數トシテ



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dv_x}{dt} = -C f(v) \cos \theta \dots\dots\dots (1) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \frac{dv_y}{dt} = -cf(v) \sin \theta - g \dots\dots\dots (2) \right.$$

ヲ得ル。コレハ彈丸運動ノ方程式デアリマス。(gハ重力加速度)

而ル $v_x = v \cos \theta$, $v_y = v \sin \theta$ デアルカラ (1),

(2) ヨリ

$$\frac{dv}{dt} \cos \theta - v \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = -cf(v) \cos \theta \dots\dots\dots (1')$$

$$\frac{dv}{dt} \sin \theta + v \cos \theta \frac{d\theta}{dt} = -cf(v) \sin \theta - g \dots\dots\dots (2')$$

(2') $\times \cos \theta$ - (1') $\times \sin \theta$ ヲツケレバ

$$v \frac{d\theta}{dt} = -g \cos \theta$$

上式ト (1) ヨリ dt ヲ消去スレバ

$$\frac{dv_x}{d\theta} = \frac{c}{g} v f(v)$$

或ハ $\frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = \frac{c}{g} v f(v)$ (A)

コレハ v 及 θ 以外ニハ変數ヲ含マナイカラ, x 軸 = 平行ノ首線ヲ持ツ極座標ニツイテ v ヲ動徑, θ ヲ偏角ト考ヘレバ (A) 式ハ *Hodograph* ノ方程式ヲ表ヘス。コレハ彈道學研究上極メテ重要ト後割ヲモツモノデス。

真空彈道ノ場合ニハ $cf(v) = 0$

$$\therefore \frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = 0 \quad \therefore v \cos \theta = \text{const.}$$

即チ *Hodograph* ハ y 軸 = 平行ノ直線トナリマス。

§ 3. Charbonnier / 定理 Charbonnier

佛國砲兵監デ著名ナ彈道學者デス。コノニ述ベル定理ハ1904年 *Traite de bal. ext.* 2 Aufl. S. 221. Paris 発表サレタモデ、次ノ様ニ述ベラレル。

一次抵抗 $cf(v) = cv$ ヲモットキハ Hodograph ハ直線デアイル。

証明
$$\frac{d(v \cos \theta)}{d\theta} = \frac{c}{g} v^2$$

$$\therefore \frac{dv}{d\theta} \cos \theta - \sin \theta \cdot v = \frac{c}{g} v^2$$

$$\text{或ハ } \frac{dv}{d\theta} - \tan \theta \cdot v = \frac{c}{g} \sec \theta \cdot v^2$$

コレハ Riccati / 微分方程式デアイル。コレヲ $(v)_0 = v_0$, $(\theta)_0 = \alpha$ ナル條件ノ下ニ解クト

$$\frac{1}{v \cos \theta} - \frac{1}{v_0 \cos \alpha} = \frac{c}{g} \tan \alpha - \frac{c}{g} \tan \theta$$

$$\text{或ハ } A v \cos \theta + B v \sin \theta - 1 = 0$$

$$\text{コノ } A = \frac{c}{g} \tan \alpha + \frac{1}{v_0 \cos \alpha}, B = -\frac{c}{g}$$

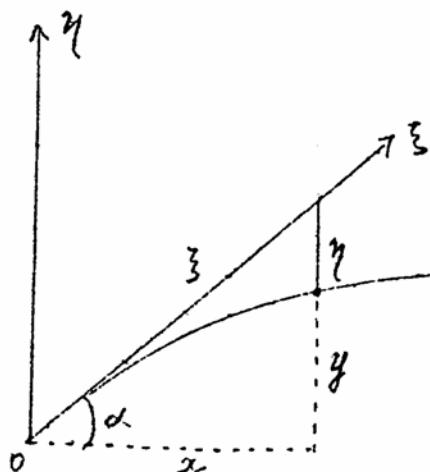
コレハ直線ヲ表ハス。 Q.E.D

別証 (Crasz: Lehrbuch der Ballistik. I. P. 115)

圖ノヤウナ斜交座標 (ξ, η) ヲトルト

$$\xi \cos \alpha = x,$$

$$\xi \sin \alpha = y + \eta$$



$$\text{今 } \frac{d\xi}{dt} = u, \quad \frac{d\eta}{dt} = w, \quad \frac{w}{u} = \frac{d\eta}{d\xi} = g$$

トオクト,

$$\frac{d\xi}{dt} \cos \alpha = \frac{dx}{dt} \quad \therefore u \cos \alpha = v \cos \theta$$

$$\frac{d\xi}{dt} \sin \alpha = \frac{dy}{dt} + \frac{d\eta}{dt} \quad \therefore u \sin \alpha = v \sin \theta + w$$

夫々 $\sin \theta, -\cos \theta$ を乗じて加へれば

$$u \sin(\theta - \alpha) = -w \cos \theta$$

$$\therefore g = -\frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos \theta}$$

$$\therefore dg = -\frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha} d\theta,$$

$$\text{而 } u = g d(v \cos \theta) = v c f(v) d\theta \quad cf(v) = cv$$

$$\therefore g du = -c u^2 dg$$

$$\therefore -\frac{g}{c} \frac{du}{u^2} = dg$$

積分シテ

$$\frac{g}{c} \frac{1}{u} = g + \text{konst.}$$

$$g = \frac{w}{u}$$

$$\therefore \frac{g}{c} \frac{1}{u} = \frac{w}{u} + \text{konst.}$$

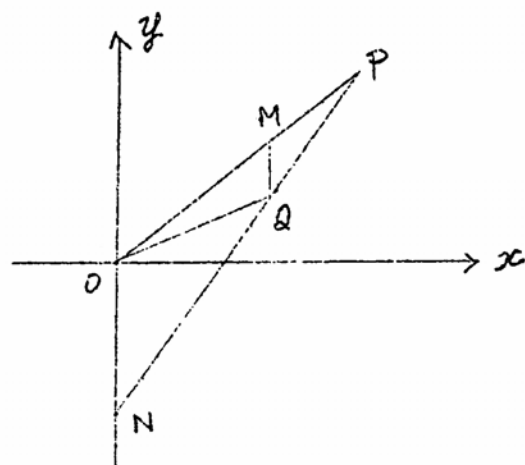
$$\text{或ハ } w + \text{konst.}, u = \frac{g}{c}$$

故ニ Hodograph ハ 直線トナル。

別証 或ハ初等幾何學的ニ次ノ様ニ証明サレル。(福

村省三: 彈道ノ數學 P. 201)

P, Q ヲ Hodograph 上
ノ隣接点トシ, $P(v, \theta)$,
 $Q(v-dv, \theta-d\theta)$ トスレ
バ $\overrightarrow{PQ}$ ハ加速度ヲ表ハス。ソ
シテコレハ重力加速度 $\overrightarrow{MQ}$ ト空
氣抵抗ニヨル加速度 $\overrightarrow{PM}$ ノ合加
速度デアール。而ルニ



$$\overrightarrow{MQ} = g dt, \quad \overrightarrow{PM} = cf(v) dt = cv dt.$$

$$\text{又 } OP = v$$

今 PQ ノ延長ガ y 軸ト交ハル点ヲ N トスレバ

$$MQ/ON = PM/PO$$

$$\therefore g dt/ON = cv dt/v \quad \text{故ニ } ON = \frac{g}{c} = \text{一定}$$

故ニ N ハ定点。即チ Hodographノ隣接点ヲトホル
直線ハ定点ヲトホルカラ, Hodographハ直線デアール。

Q. E. D.

§4 Hodograph 方程式ノ解ノ存在

Hodograph 方程式 (A)ヲ書キトホスト

$$\frac{dv}{d\theta} \cos \theta - v \sin \theta = \frac{c}{g} v f(v)$$

今便宜上 $v: y, \theta: x, \frac{c}{g} v f(v) = F(v)$ トカケバ
上式ハ

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \tan x + F(y) \cdot \sec x = f(x, y)$$

トナル。モシ $F(y)$, $F'(y)$ が有界デ $-90^\circ < k' < \infty < k < 90^\circ$
ナラバ

$$|f(x, y)| \leq M$$

ナル M が存在シ

$$\begin{aligned} \text{又 } |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &= |(y_1 - y_2) \tan x \\ &\quad + (F(y_1) - F(y_2)) \sec x| \\ &\leq |y_1 - y_2| |\tan x| + |F(y_1) - F(y_2)| |\sec x| \end{aligned}$$

而ル $F(y)$ が $[a, b]$ デ連続 (a, b) デ微分可能ナ
ラバ平均値ノ定理ヨリ

$$F(y_1) - F(y_2) = (y_1 - y_2) F'(\xi) \quad y_1 < \xi < y_2$$

$$\begin{aligned} \therefore |f(x, y_1) - f(x, y_2)| &\leq |y_1 - y_2| [|\tan x| + |F'(\xi) \sec x|] \\ &\leq K |y_1 - y_2| \end{aligned}$$

上ノ條件ハ彈道學的ニハ小ナル條件デアツテ、即チ
Lipschitz ノ條件ハ成立シ、(A) ノ解ハ存在スル。然ラ
バ如何ニシテコレヲ求メタラヨイカ。コレニツイテハ $F(v)$
ノ特殊ナ形ニツイテ昔カラ色々研究ガアリマス。

§5. Hodograph 方程式ノ求積法

1719年 Johann Bernoulli ハ $cf(v) =$
 cv^n (n ハ任意ノ正數) ナルトキノ Hodograph 方程
式ヲ解イタ。

Die Akten von Leipzig, S. 216.

1744年 D'Alembert ハ $cf(v) = av^n + C$ 及

$Cf(v) = a \log v + C$ ナルトキ及ビ係數間ニアル關係
 1 成立スルトキニ於テ $Cf(v) = av^n + R + bv^{-n}$
 $Cf(v) = a(\log v)^2 + R \log v + b$ ナルトキ積分シ
 得ルコトヲ示シタ。

*Traité de l'équilibre et du mouvement
 des fluides*, 1744. S. 356. Paris.

1782年 Legendre. A. M. dissertation
 sur la question de balistique, proposée
 par l'Académie Roy. des sciences et
 belles lettres de Prusse, Berlin, 1782.

1901年 Liacci.: *Compt. Rend.* 132, S. 1175.

1901

Compt Rend. 133, S. 381. 1901

Riv. d'art. e gen., vol. 3. S. 5. 1901

4. S. 5. 1901

1903年 Appel. M.: *Arch. d. Math. u. Phys.* (3)

b.d. 5. S. 177

1910年 Quivet: *Compt. Rend.* Bd. 150, S. 1229.

1911年 Hayashi (林鶴一): *giron. d. Mathema-
 tische di Battaglini* (3) Bd. 49, S. 231.

等, 研究ガアリ, 何レモ局所的ナモノデアツタ。コレノ
 綜合的ナ研究ハ Jules Drach = ヨツテ爲サレタ。

1920年, *L'équation différentielle de la*

Balistique Extérieure et son intégration
par quadratures.

Annales de l'Ecole Normale Supérieure,
37.

次 = Drach, 方法ヲ陳ベ, ソレカラ逆彈道問題ニ
入リタイト思ヒマス。(續)