



Title	Group ring ノ表現トソノ commutator algebra
Author(s)	小暮, 勝美
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 229, p. 666-673
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74923
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

993. Group ring / 表現トソノ commutator algebra

小 基 勝 美 (京大)

此ノ談話ハ小平(邦)サンニ教ヘテ載イタコトヲ少シ許リ
整理シタモノデス。尚文理大ノ河田サンカラモ別ニ同ジ様ナ
考ヘヲオ聞キシマシタ。

1. Weyl / Classical groups / 第三章 B デハ
full linear group ト symmetric group トノ
関係ノ問題ヲ拡張シテ、一般有限群ノ group ring トソ
ノ表現ノ commutator algebra トノ関係ヲ
論ジテキル。ソノ main theorem ハ次ノ通りデアッ
タ。

有限群 γ , group ring $\mathcal{P}(K)$ (係数トスル),
ソノ non-degenerate + 表現 $\mathcal{V}$, ソノ表現加群ヲ $\mathcal{P}$,
 $\mathcal{V}$ ノ commutator algebra —— 即チ $\mathcal{V}$ ヲ作用圏
トシタトキノトノ同型環ヲ $\mathcal{Q}$ トスルト, $\mathcal{P}$ ノアル ideal
 $\mathcal{P}_0$ = 含まレル左 ideal σ ト, $\mathcal{P}$ ノ $\mathcal{Q}$ -invariant
subspace Σ トノ間ニ次ノヤリナ一対一ノ對應が存在
スル, 即チ

$$\left. \begin{aligned} \sigma &\rightarrow \# \sigma = (f; f_i^{(\alpha)}(\cdot) \in \sigma) \\ \Sigma &\rightarrow \# \Sigma = \left(\sum_{i, \alpha} \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot); f \wedge \Sigma, \text{ basis} \right) \end{aligned} \right\} (1)$$

トスルト $\# \# \sigma = \sigma$, $\# \# \Sigma = \Sigma$ トナリ, ソノ上

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \iff \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

$$\sigma_1 \supset \sigma_2 \iff \Sigma_1 \supset \Sigma_2$$

$$\sigma_1 \cong \sigma_2 \iff \Sigma_1 \cong \Sigma_2$$

が成立スル。 $\sigma = \sigma_1 \iff \Sigma_1$, $\sigma_2 \iff \Sigma_2$ トスル。尚ホ $\rho_0 = \rho$ デアル。

Weyl ノ証明ハ難シイコトヲ使フワケデハナイガ、餘リ解リヨクナイ。ソレハ (1) ノ對應ガ面倒ナタメデアルガ、コノ對應ハ *Weyl* ノ証明ノ途中ニモ注意サレ、且ツ利用サレテキルヤウニ、モット分リヨイ形ニ直スコトが出来ル。($\hat{e}$ ガ σ ノ *generating idempotent* ナルトキ、 $\sigma = e\rho$ トナルコトニ注目スルノデアル) ソノ新シイ對應ノサセ方ニヨレバ、上ノ定理ハ簡單ニ証明サレル。ソシテ實際ニコノ定理ヲ、應用スルニ當ツテハ、ソノ形デ差支ヘナイト思ハレル。尚新シイ對應ノサセ方が (1) ト一致スルコトモ比較的容易ニ証明サレル。

2. 完全可約デ1ヲ持ツ *matrix algebra* ノ *commutator algebra* ハ矢張り完全可約デ、ソノ又 *commutator algebra* ハモトノ *algebra* ト一致スル。

此ノ定理ハ *Weyl* ノ本デハ p.95 ニ出テキルカラ、之ヲ使フ (*Weyl* ノ方法デハ之ヲ使ツテキナイコトハ注目ニ値スル)。 *Group ring* ρ ハ完全可約デカラ、ソノ *non-degenerate* ナ表現 γ ハ完全可約デアアル。勿論1ヲ持ツ。故ニ上ノ定理デソノ *commutator algebra* σ ハ完全可約デ1ヲ持ツ、ソノ又 *commu-*

tator algebra ハモト、 γ = 一致スル。即チ γ ハ $\mathcal{O}$ ヲ operator トシタトキ、 P / linear transformation / 十ス ring デアル。ソコニ注目シテ次ノ一般的一定理ヲ証明スル。

定理1. $\mathcal{O}$ - K 加群 M が完全可約 ($\mathcal{O}$ ヲ/), M , $\mathcal{O}$ -automorphism / ring ヲ γ トスルトキ、右 ideal $\mathfrak{a}$ ト M / $\mathcal{O}$ -subspace m トノ間ニハ次ノ對應デ一對一ノ關係が成立スル。

$$\mathfrak{a} \longrightarrow m = \mathfrak{a} M$$

$$\mathfrak{a} = (a; a M \subseteq m) \longleftarrow m$$

ソシテ $\mathfrak{a} \longleftrightarrow m, \mathfrak{a}_i \longleftrightarrow m_i$ トスルト

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 \longleftrightarrow m = m_1 + m_2$$

$$\mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \longleftrightarrow m_1 \supseteq m_2$$

$$\mathfrak{a}_1 \cong \mathfrak{a}_2 \longleftrightarrow m_1 \cong m_2$$

(Eitting: dissertation Satz 8 又ハ Math. Ann. 107 参照)

コノ定理ハ見掛ケ上次ノ様ニ一般ナ形ニナルガ、ソノ方ガ証明ニ便利デアル。

定理1a. ニツノ完全可約ナ γ - K 加群 (γ ヲ/) M , M ガアル。 M / γ -automorphism 全体ヲ $\mathcal{O}$, M / γ -automorphism / 全体ヲ L トスルト、 M , M ハ夫々 $\mathcal{O}$, L ヲ operator トシタ場合 parallel ナ構造ヲ持ツ。即チ M , M / invariant subspace ヲ夫々 m , n トスルトキ

$$m \rightarrow n = \alpha \mathcal{M} \quad \alpha = (a; a \mathcal{M} \subseteq m) \quad (2)$$

$$n \rightarrow m = \alpha' \mathcal{M} \quad \alpha' = (a'; a' \mathcal{M} \subseteq n) \quad (3)$$

デ m, n ハ一対一ニナリ, 且ツ直和ハ直和 = isomorphic
ナモノハ isomorphic ナモノヘト對應スル。

(証明) 先ヅ一対一ナルコト, $\mathcal{M}$ ハ完全可約デカラ
 $\mathcal{M} = m + m'$ ナル m' ガアル。コノ直分解デ $\mathcal{M}$ ニヨ m
 $= m_1 + m'$ トスルト, projection: $m \rightarrow m_1$ ハ明
カ = $\mathcal{M}$, α -automorphism デアル。之ヲ e トカケ
バ $m_1 = e m$, $e \in \mathcal{R}$ デアル。スルトコノ e ヲ使ツテ (2) ハ

$$m = e \mathcal{M} \rightarrow n = e \mathcal{N} \quad (2')$$

トカケル。(ソレ = ハ $e \mathcal{R} = \mathcal{R}$ ヲ示セバヨイ: $e \mathcal{R} \mathcal{M}$
 $= e \mathcal{M} = m$, 又 $a \mathcal{M} \subseteq m$ ナラドント $m \in \mathcal{M}$ = 對シ
テモ $a m \in m \quad \therefore e a m = a m \quad \text{i.e.} \quad e a = a,$
 $\therefore a \in e \mathcal{R}$)

ソシテ (2') = 於テ e ハ $\mathcal{N} \rightarrow e \mathcal{N}$ ナル一ツ, pro-
jection デアル ($\mathcal{N} = e \mathcal{N} + (1-e) \mathcal{N}$)。故ニ (2), (3) ガ
symmetric ナルコト = 注意スレバ, 我々ノ對應ガ一対
一ナル事ガワカル。

定理ノ後半, 假定カ symmetric デカラ, 何レカ
一方ノ方向ガケテ証明スレバヨイ, $m \rightarrow n$, $m_i \rightarrow n_i$
トシヨウ。

$\mathcal{M} = m_1 + m_2$ ナラ projection ヲ用キテ
 $e \mathcal{M} = e_1 \mathcal{M} + e_2 \mathcal{N}$, $e = e_1 + e_2$, $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$ ト
カケル, $\therefore e \mathcal{N} = e_1 \mathcal{N} + e_2 \mathcal{N} \quad \therefore n = n_1 + n_2$

完全可約だから $m_1 \supseteq m_2 \rightarrow n_1 \supseteq n_2$ ハ上カラ明カ.

最後ニ $m_1 \cong m_2$ ナラ $m_1 = eM$ トスルトキ $m \rightarrow eM = m_1$, トシ又 $m_1 \cong m_2$ ナラ $m_1 \rightarrow m_2$ トスルト, コノニツテ組合セタ $m \rightarrow m_2$ ハ明カニ m ノ $\mathcal{M}$ -automorphism デアル. 之ヲ a トシヨウ. $a \in \mathcal{Y}$. スルト $am_1 = m_2$ 即チ $a \in M = m_2$. 之レカラ對應スル $\mathcal{N}$ ノ subspace = 移レバ $a \in \mathcal{N} = n_2$. 然ルニ $e\mathcal{N} = n_1$. $\therefore an_1 = n_2$ 故ニ $n_1 \cong n_2$ q. e. d.

定理 1a デ $\mathcal{N}$ トシテ $\mathcal{Y}$ ノ考ヘルコトが出来ル. $\mathcal{Y}$ ノ左カラノ operator ト考ヘタトキ, ソレト commutative + linear transformation, 全体ハ則チ右カラノ operator ト考ヘタヤ自身ニ外ナラナイ. 故ニ $\mathcal{N}$ ノ L -subspace = 相當スルモノハ $\mathcal{Y}$ ノ右 ideal デアル. 故ニ定理 1 が重明サレタコトナル.

實ハ定理 1 ト 1a トハ殆ンド同ジコトデアル. 實際定理 1 カラ容易ニ 1a ノ出スコトが出来ルコトハ明デアル.

極テ定理 1 ノ我々ノ場合ニ應用スレバ, ρ ノ表現ナル $\mathcal{Y}$ ノ右 ideal ト P ノ $\mathcal{M}$ -subspace Σ トノ間, parallelism がワカッタコトナル. $\rho \rightarrow \gamma =$ 於テ $\rho^0 \rightarrow (0)$ トスルト ρ^0 ハ P ノ ideal, P ハ完全可約だから, $\rho = \hat{\rho}_0 + \rho^0$ ナル ideal $\hat{\rho}_0$ がキメル. ($\wedge$ ハ P ノ元 $\sum a(s)S$ ナラ $\sum a(s)S^{-1}$ ニ移ス inverse automorphism トスル. ワガワガ $\hat{\rho}_0$ トシタノハ結果ヲ奇麗ニスルヌメ——又 Weyl ノ記号ト念セルヌメデアル)

ソシテ $\hat{P}_0 \cong \mathcal{Y}$, $\mathcal{O}_1 \cong \wedge$ $\hat{P}_0 \ni a \rightarrow U(a) \in \mathcal{Y}$ デ與ヘ
ラレル. ソコデ次ノ定理ヲ得ル。

定理2. $\hat{P}_0$ ノ右 ideal $\hat{\sigma} \subset P$ ノ σ -subspace
 $\Sigma \subset$ ノ間 $= \wedge$

$$\hat{\sigma} \rightarrow \Sigma = \hat{\sigma} P$$

= ヨツテ定理1ノ型ノ1-1對應ガ成立スル。

尚、 $\hat{P}_0 \leftrightarrow P$, $(0) \leftrightarrow (0)$ ヨリ

$$\text{系1. } P = \hat{P}_0 P \quad (4)$$

$$\text{系2. } (0) = (a; \sigma P = (0)) \quad (5)$$

Proof operation テ $\hat{P}_0$ ノ右 ideal $\hat{\sigma} \subset P_0$ ノ
左 ideal $\sigma = -$ 對 $-$ = 移ルカラ

定理2a. P_0 ノ左 ideal $\sigma \subset P$ ノ σ -subspace
 $\Sigma \subset$ ノ間 $= \wedge$

$$\sigma \rightarrow \Sigma = \sigma P \quad (6)$$

デ定理1ノ型ノ1-1對應ガ成立スル。

此ノ定理2aヲ基本定理トシテ Weyl ノ本ノ第四章
ノ問題ヲ論ズルコトガ出来ルシ, $\wedge$ symmetric group
ノ character ト full linear group
ノ character ノ一カカラ他ノ一カヲ導キ出ス問題等ヲ論
ズルコトが出来ル。

3. 最後ニ定理2aノ P_0 ガ Weyl ノ方法デノ P_0 ト一致
シ, σ ト Σ トノ對應ノサレカハ両者同一ナルコトヲ証明
シヨウ。ソノキト $= \wedge$ Weyl ノ本ノ p.106, Lemma
ヲ使フガ, ソノ中デモ簡單ナ A, B ガラキヲ用キレバ十分

デアル。

証明スベキコトハ

(i) 定理 2a, ρ_0 が Weyl, ψP ト一致スルコト:

$$\rho_0 = \psi P.$$

(ii) 定理 2a, 意味デ $\sigma \rightarrow \Sigma$ トスル $\Sigma = \# \sigma$.

(iii) 定理 2a, 意味デ $\Sigma \rightarrow \sigma$ トスル $\sigma = \psi \Sigma$

ノ三ツデアル。

(ii)ヲ先ニ証明スル。コトキ σ ハ ρ ノ勝手ナ左 ideal トシテ証明スルベキデアル。 $\Sigma \subseteq \# \sigma$:

$g \in \Sigma$ トスル $g = af, a \in \hat{\sigma} \therefore g(\cdot) = f(\cdot)\hat{a}$
 $\hat{a} \in \sigma$, (Lemma B). σ ハ左 ideal ナル故 $g(\cdot) \in \sigma$
即チ $g \in \# \sigma$ デアル。

逆 = $\# \sigma \subseteq \Sigma$ ノ方: $f \in \# \sigma$ トスル $f(\cdot) \in \sigma$,
 σ idempotent ナ $\hat{e}$ ($i, e, \sigma = \rho \hat{e}$) トスル
 $f(\cdot) = f(\cdot)\hat{e}$, Lemma B ナ $f = ef, e \in \hat{\sigma}$
 $\therefore f \in \Sigma$

(i) ノ証明. (4) = ヨリ $\rho = \hat{\rho}_0 P \therefore f \in P$ ナラ
 $f = \hat{a} g, a \in \rho_0$. 故 = Lemma B ナ $f(\cdot) = g(\cdot)a \in \rho_0$.
 $\therefore \psi P \subseteq \rho_0$. ψP ハ左 ideal デアル (Lemma A)
 $\psi P = \sigma'$ トカカウ。 ρ_0 ハ完全可約ナラ $\rho_0 = \sigma' + \sigma''$
 $\therefore \hat{\rho}_0 P = (\hat{\sigma}' + \hat{\sigma}'')P = \hat{\sigma}'P + \hat{\sigma}''P$.

(ii) = ヨリ $\hat{\sigma}'P = \# \sigma' = \# \psi P \supseteq P \therefore \hat{\sigma}'P = P$
故 = 當然 $\hat{\rho}_0 P = P$ ナ終ッテ $\hat{\sigma}''P = (0)$ トナル. (5) =
ヨリ $\hat{\sigma}'' = (0), \sigma'' = 0$ 故 = $\rho_0 = \sigma' = \psi P$ ナル。

(iii) の証明. Σ の定理 2a である $\hat{\sigma}P$ となる a がある. $\hat{\sigma}P = \sigma$ を証明すればよい.

$\hat{\sigma}P \subseteq \sigma$ かつ: $a \in \hat{\sigma}P$ かつ $a = \sum_{i \in I} \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot)$,

$f^{(\alpha)}$ は $\hat{\sigma}P$ の basis. 故に $\hat{\sigma}$ は idempotent かつ e となる $f^{(\alpha)} = e f^{(\alpha)}$ となる

$$a = \sum \varphi_i^{(\alpha)} (e f^{(\alpha)})_i(\cdot) = \sum \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot) \hat{e}$$

(Lemma B)

然るに $\hat{e} \in \sigma$, idempotent となる $\hat{e} \in \sigma$

次に $\sigma \subseteq \hat{\sigma}P$ を示す. $a \in \sigma$ となる a . (i) により

$\sigma \subseteq \hat{\sigma}P$, 故に $a = \sum \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot)$ となる.

σ は idempotent かつ $\hat{e}$ となる

$$a = \sum \varphi_i^{(\alpha)} f_i^{(\alpha)}(\cdot) \hat{e} = \sum \varphi_i^{(\alpha)} (e f^{(\alpha)})_i(\cdot)$$

(Lemma B)

e は $\hat{\sigma}$ の idempotent generator となる

$e f^{(\alpha)} \in \hat{\sigma}P$, $\therefore a \in \hat{\sigma}P$.

f. e. d.

—— 終 ——