



Title	Symmetric group 及ビ full linear group ノ既約表現ニツイテ
Author(s)	小暮, 勝美
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 229, p. 674-691
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74924
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

994. Symmetric group 及び full linear group / 既約表現ニツイテ

小 暮 勝 美 (東大)

1. 問題 / 説明

f 次 / symmetric group π_f ノスベテ / 既約表現ヲ與ヘルベキ表現加群 / base ヲ作ルコトハ

W. Specht. Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe. (M. Z. 1935) =

カイテアル。結果ハ簡單デアツテニツ / 証明ガノセテアル。

第一 / 方法ハ character / 性質ヲ澤山使ツテキル。

第二 / 方法ハ character ヲ使ハナイデ証明スルトナ

ツテキルガ、ソコ / 証明ハ不完全 / ヤウニ思ハレル——

“Eigensystem” $\mathcal{P}^{(\mu)}$ トイフ / ガ、変数 / permutation = ツキ閉ヂタ Modul / base = ナツテキルトイフ事ガ証明サレテオナイヤウデアアル。

Young / diagram ヲ用キテ π_f / group ring

P / 既約 + left ideal ヲ求メルコトハ Weyl /

Classical Groups (以下 C. G. トシテ引用スル)

× V. d. Waerden, Moderne Algebra, 正田;

抽象代数学等ニ載ツテキルガ、ソノ方ノ立場カラ上ノ問題

ヲ見ルト、Specht / 第一 / 方法ヨリモット簡單ナ証明

ガ得ラレルヤウニ思フ。然シ character / 理論カラ離

レルワケニハエカナカツタ。

symmetric group π_f f 階, tensor space P_f ト密接 + 関係ガアル. ソノタメ π_f ノ場合ノ方法ヲ真似テ, P_f ノ既約部分ノ base ヲ求メルコトガ出来ル.

2. 準備

π_f ノ group ring P (algebraically closed + 体 K ヲ係数トスル) ノ既約 + left ideal ヲ求メル方法ハ次ノヌウデマツタ.

f ノ partition: $f = f_1 + \dots + f_r$, $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_r > 0$ (1)

= 對應シテ所謂 Young ノ diagram ヲ作ル. ソシテ文字ヲ違ツタ行ヘ移サ + イヌウ + permutation ヲ p ,

$$\left. \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & f_1 \\ f_1+1 & \dots & f_1+f_2 & \\ \dots & & & \\ f-f_r+1 & \dots & f & \end{array} \right\} (2)$$

違ツタ行ヘ移サ + イヌウ + permutation ヲ q トシテ

$$a = \sum_p p, \quad b = \sum_q \delta_q q.$$

ヲ作ル. δ_q ハ q ガ even + ルカ odd + ルカ = 從ツテ +1 or -1 トスル.

ソレテ $C = ba$ トオクト, pC ガ求メルニツキ既約 + left ideal トナル. 等シクイヘバ $CC = \mu C$, $\mu \neq 0$ ス + ハチ $\frac{C}{\mu}$ ハ idempotent, 而モソレハ primitive + idempotent = ナル. ソシテ違ツタ partition = 對スル $C, C' =$ ツイテハ $pC + pC'$. 然レニ一方 par-

tition ノ數ハ既約表現ノ同値ア + イ モ , / 總數 = 零シイ
カラ上ノ方法デスベテノ既約 *left ideal* / 代表ガ得ラ
レタコトナル。

f / partition (1) = 對應スル PC / *rank* (既
約表現ノ次數) γ $g_{f_1} \cdots f_r$ トスルト γ 次ノ漸化式ガ成立
スル。

$$g_{f_1} \cdots f_r = g_{f_1-1} f_2 \cdots f_r + g_{f_1, f_2-1} \cdots f_r + \cdots + g_{f_1} \cdots f_{r-1} \quad \text{--- (3)}$$

右辺ノ項ハ π_{f_1-1} / 既約表現ノ次數デアツテ $f_2 = f_{i+1}$ /
トキハ第 $(i+1)$ 項ハスデル。又 $f_r = 1$ / トキハ最後ノ項
ハ $g_{f_1} \cdots f_{r-1}$ γ 意味スルモノトスル。 (C.G. p. 215)

$$f, \text{ 変数 vector } \xi^{(1)} = (\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_n^{(1)}), \dots, \xi^{(j)} \\ = (\xi_1^{(j)}, \dots, \xi_n^{(j)})$$

= 關スル *multilinear form* (K / L) 全体 $\mathcal{P}_f$
トカク。之ハ n^f 次元ノ *vector space* デアル。

$$\mathcal{P}_f \ni F = \sum F(i_1, \dots, i_f) \xi_{i_1}^{(1)} \cdots \xi_{i_f}^{(f)}$$

$$\text{今 } \xi_i^{(v)} \rightarrow \sum_{j=1}^n \xi_j^{(v)} a_{ji} \quad |a_{ij}| \neq 0$$

ナル置換ヲ施シタ結果ヲ

$$AF = \sum F'(i_1, \dots, i_f) \xi_{i_1}^{(1)} \cdots \xi_{i_f}^{(f)}$$

トシヨウ。之ハ $\mathcal{P}_f$ / *linear transformation* デ
アル。斯ウイフ *operation* $\mathcal{P}_f GL(n) = (A = \|a_{ij}\|;$

$|a_{ij}| \neq 0$) の Operatorbereich と考へるに、 P_f は f 階の tensor space, F は tensor と呼ぶ。
 A 上の operation を成す。

$$F'(i_1, \dots, i_f) = \sum_{k_1, \dots, k_f} a_{i_1 k_1} \dots a_{i_f k_f} F_{k_1, \dots, k_f}$$

上の変換を受ける。 P_f は A 上の linear transformation 全体、linear closure の Ω に属する。
 Ω 。

Tensor F は又 operation を考へる。

π_f は $S = \left(\begin{smallmatrix} i \\ i' \end{smallmatrix} \right)$ とスルに

$$FS = \left(\sum F(i_1, \dots, i_f) \xi_{i_1}^{(1)} \dots \xi_{i_f}^{(f)} \right) S = \sum F(i_1, \dots, i_f) \xi_{i_1}^{(1)} \dots \xi_{i_f}^{(f)} \\ \dots \xi_{i_f}^{(f)} = \sum F(i_1', \dots, i_f') \xi_{i_1'}^{(1)} \dots \xi_{i_f'}^{(f)}$$

此、linear transformation 全体、linear closure を γ と示す。之、 ρ は homomorphic に表現せられ： $\rho \cong \gamma$ 。コノとき γ の Ω に対応する ρ の元全体を ρ^0 とスルに、 $\rho = \rho_0 + \rho^0$ として ρ の ideal ρ_0 が一意に定まり $\rho_0 \cong \gamma$ 。

扱へる γ は commutative + linear transformation の全体とレコトが証明される。(C.G.P. 130) γ は完全可約だから Ω も完全可約で、 Ω は commutative + linear transformation 全体に γ と一致スル。(C.G.P. 95)

即ち γ は P_f の Ω -automorphism, ring と

+ル。コノコトカラ γ ヲ仲介=置イテ P_0 ト P_f トノ間
 ニ次ノ~~ミ~~ミヲ構造ノ類似が成立スルコトガワカル。(前談
 話参照。尚ホ今ノ場合ハ $\hat{P}_0 = P_0$ +ルコト=注意, C.G.P.129)
 即チ P_0 ノ左 ideal σ ト P_f ノ $\mathcal{M}$ -subspace Σ ト
 ハ

$$\sigma = Pe \longleftrightarrow P_f e = \Sigma$$

デ一對一ニ對應スル (e ハ P_0 ノ中ノ idempotent) ソシテ
 $\sigma \longleftrightarrow \Sigma, \sigma_i \longleftrightarrow \Sigma_i$ トスレバ

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \longleftrightarrow \Sigma = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

$$\text{從ツテ } \sigma_1 \supseteq \sigma_2 \longleftrightarrow \Sigma_1 \supseteq \Sigma_2$$

$$\text{又 } \sigma_1 \cong \sigma_2 \longleftrightarrow \Sigma_1 \cong \Sigma_2 \quad (\text{operator isomorph})$$

トナル。

之デ P_f ノ構造が明カトナル。ソシテ P_f ノ irreducible + subspace ノスベテノ代表ハ $P_f C$ デ與ヘラレ
 ルコトモワカル。コノ C ハ先= diagram カラ作ツ
 タ C デアアル。

f ノ partition (1) = 對應スル $P_f C$ ノ rank (A
 $\times \dots \times A$ ノ一ツノ既約部分ノ次數)ヲ $h_f, \dots, f_r$ トシヨ
 ウ。スルト、次ノ漸化式が成立スル。

$$\left. \begin{aligned}
 h_{f_1} \dots f_r &= \sum h_{f'_1} \dots f'_r \\
 f_1 &\geq f'_1 \geq f_2 \geq f'_2 \geq \dots \geq f_r \geq f'_r
 \end{aligned} \right\} (4)$$

+ル關係ヲ滿スルスベテノ $f'_1, \dots, f'_r$ = ツイテノ和ト
 スル。勿論 $f'_r = 0$ ノ場合ハ $h_{f'_1} \dots f'_r$ ハ $h_{f'_1} \dots f'_{r-1}$ ヲ

意味スルモノトスル。(Weyl: 群論ト量子力学第五章)

3. π_f の既約表現ヲ求メルコト.

$$x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_f^{(i)}) \quad i = 1, \dots, f$$

ナル f 々 f 次元変数 *vector* ヲ考ヘル. ソレガ $f!$ 々
monomial

$$x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_f}^{(f)}$$

ヲ考ヘル. コノ $i_1, \dots, i_f$ ハ $1, \dots, f$ 々 *permutate*
 シタモノトスル.

ソシテ之等 *linear combination* 全体ヲ M ト
 カカウ. 之ハ $f!$ 次元 K -*modul* デアル. 之ノ *linear transformation* ヲ考ヘル.

$$\pi_f \ni S = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_f \end{pmatrix} \text{ トキ } S(x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_f}^{(f)}) = x_{j_1}^{(1)} \dots x_{j_f}^{(f)}$$

$$S = \begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_f \end{pmatrix} \text{ トキ } (x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_f}^{(f)}) S = x_{i_1}^{(1')} \dots x_{i_f}^{(f')}$$

コノ *operation* ヲ左右共 $= \pi_f$ カラ $P =$ 振ケル. スル
 ト M ハ P - P *modul* トシテ P ト *isomorphic* デ
 アル. ソレハ

$$M \ni x_{i_1}^{(1)} \dots x_{i_f}^{(f)} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} i_1 & \dots & i_f \\ 1 & \dots & f \end{pmatrix} \in P$$

ナル對應ヲ與ヘテ見レバ明カデアアル (此ノ點ヲワカリヨク
 スルタメ *suprefix*, *suffix* ノ位置ヲカヘテ, $x_{(1)}^{i_1} \dots$
 $\dots x_{(f)}^{i_f}$ トカイテモヨイ)

故 = $P \subset M \subset C$ (P 左 *modul* トリテ)

スカラ, π_f 既約表現ヲ求メルニハ $P \subset C$ / *base* / 代リ = $M \subset C$ / *base* ヲ求メルベヨイ. ソレニハ $X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_f}^{(f)} \cdot C$ / f' ケノ中カラ独立ナモノヲトリ出セバヨイ。

1) 先ヅ M とヲ考ヘヨウ。

記号ヲワカリヨクスルタメニ $X_{i_1}^{(1)} \cdots X_{i_f}^{(f)}$ ヲ

$$\begin{aligned} & x_{\alpha_1}^{(1)} x_{\alpha_2}^{(2)} \cdots x_{\alpha_{f_1}}^{(f_1)} \\ & \times x_{\beta_1}^{(f_1+1)} \cdots x_{\beta_{f_2}}^{(f_1+f_2)} \\ & \cdots \cdots \cdots \\ & \times x_{\rho_1}^{(f-f_r+1)} \cdots x_{\rho_r}^{(f)} \end{aligned} \quad (5)$$

トカカウ. サテ $b = \sum_{g_i} \delta_{g_i} g_i$ ナルガ, (2)ニ於テ, 第 i 列ノ間ノ文字ガリヲ移シ合フ *permutation* τ_{g_i} トカケバ

$$b = b_1 b_2 \cdots b_s \quad b_i = \sum_{g_i} \delta_{g_i} g_i \quad (s = f_1)$$

トナル. 故ニ (5) = b ヲ右カラ *operate* セルト

$$\begin{aligned} & (x_{\alpha_1}^{(1)} x_{\beta_1}^{(f_1+1)} \cdots x_{\rho_1}^{(f-f_r+1)}) b_1 \cdot (x_{\alpha_2}^{(2)} x_{\beta_2}^{(f_1+f_2)} \cdots) b_2 \cdots \\ & = \left| \begin{array}{ccc} x_{\alpha_1}^{(1)} & x_{\beta_1}^{(1)} & \cdots x_{\rho_1}^{(1)} \\ x_{\alpha_1}^{(f_1+1)} & \cdots & x_{\rho_1}^{(f_1+1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{\alpha_1}^{(f-f_r+1)} & \cdots & x_{\rho_1}^{(f-f_r+1)} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} x_{\alpha_2}^{(2)} & x_{\beta_2}^{(2)} & \cdots \\ x_{\alpha_2}^{(f_1+2)} & x_{\beta_2}^{(f_1+f_2+2)} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right| \cdots \quad (6) \end{aligned}$$

(5) = 於テ $\alpha_i, \beta_i, \dots$ ツノ間カケテ入レカヘテ得テ
 レル monomial カラハ符号ヲ無視スレバ同一ノ (b) が
 得テレルカラ, 独立ナモノヲエラブタメニハ重複ヲサケル
 忌メニ, (b) カノハ

$$\begin{aligned} \alpha_1 < \beta_1 < \dots < \rho_1 \\ \alpha_2 < \beta_2 < \dots \\ \dots \\ \dots \end{aligned} \quad (9)$$

ナレモノノミヲトルコトニスル。

2) $\lambda = Mba = Mc$, base 7 考ヘルタメニ (b) = 右カ
 テ a 7 operate スルト

$$\sum_{\substack{(i, i', \dots) (1, 2, \dots, f_1) \\ (j, j', \dots) (f_1+1, \dots, f_1+f_2) \\ \dots \\ (k, k', \dots) (f-f_1+1, \dots, f)}} \begin{vmatrix} x_{\alpha_1}^{(i)} & x_{\beta_1}^{(i)} & \dots & x_{\rho_1}^{(i)} \\ x_{\alpha_1}^{(j)} & x_{\beta_1}^{(j)} & \dots & x_{\rho_1}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\alpha_1}^{(k)} & \dots & \dots & x_{\rho_1}^{(k)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{\alpha_2}^{(i')} & x_{\beta_2}^{(i')} \\ x_{\alpha_2}^{(j')} & x_{\beta_2}^{(j')} \\ \dots & \dots \end{vmatrix} \dots \quad (8)$$

(8) テ $x^{(1)} = \dots = x^{(f_1)}$, $x^{(f_1+1)} = \dots = x^{(f_1+f_2)}$, $\dots$ ト
 identify シテ此等ヲ改メテ, $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(r)}$ ト
 カケバ

$$f_1! f_2! \dots f_r! \begin{vmatrix} x_{\alpha_1}^{(1)} & x_{\beta_1}^{(1)} & \dots & x_{\rho_1}^{(1)} \\ x_{\alpha_1}^{(2)} & x_{\beta_1}^{(2)} & \dots & x_{\rho_1}^{(2)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{\alpha_1}^{(r)} & \dots & \dots & x_{\rho_1}^{(r)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{\alpha_2}^{(1)} & x_{\beta_2}^{(1)} & \dots \\ x_{\alpha_2}^{(2)} & x_{\beta_2}^{(2)} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} \dots \quad (9)$$

トナル。之ニツイテハ右カラノ ρ ノ operation ハ意味ヲ失フガ、左カラノ operation ハ意味ヲ保存スル。(8) = (9) ヲ對應サセルト、スベテノ (8) カラ generate サレル K -modul 即チ M_C ハ、(9) カラ generate サレル K -modul — 之ヲ $(M_C)^*$ トカカシ — ト ρ 左 modul トシテ isomorphic デアル。(8) ハ (9) ヲ polarize シタモノデアルコト = 注意スレバ容易ニ証明サレル) 故ニ M_C ノ代リ = $(M_C)^*$ ヲ考ヘルコトニシヨウ。ソノ base ヲ考ヘルニ當ツテハ (9) ノ $f_1, \dots, f_r$ ハステテヨイ。

(9) ノ α, β, ρ ハ (7) ナル條件ガツイテキタガ、更ニソノ上ニ

$$\begin{aligned} \alpha_1 &< \alpha_2 < \dots < \alpha_f, \\ \beta_1 &< \beta_2 < \dots < \beta_{f_2} \\ \rho_1 &< \dots < \rho_{f_r} \end{aligned} \quad (10)$$

ナル條件ヲ満足スルモノヲケテ取り出サウ。スルトソレガ丁度 $(M_C)^*$ ノ base = ナルノデアル。

$$x_1^{(V_1)} x_2^{(V_2)} \dots x_n^{(V_n)} = \text{位フツケル。即チ}$$

$$x_1^{(\nu_1)} x_2^{(\nu_2)} \dots x_n^{(\nu_n)} > x_1^{(\mu_1)} x_2^{(\mu_2)} \dots x_n^{(\mu_n)} \quad (11)$$

トハ $\nu_n - \mu_n, \nu_{n-1} - \mu_{n-1}, \dots$ ノ中最初ニ 0 デナイモノガ、正ナルコトヲ意味スルコトニスル。スルト (9) with (7) & (10) ヲ展開シタ中デノ最高位ノモノハ (7) = コリ各行列式ノ diagonal term ノ積

$$x_{\alpha_1}^{(1)} x_{\alpha_2}^{(1)} \cdots x_{\alpha_f}^{(1)} x_{\beta_1}^{(2)} \cdots x_{\beta_{f_2}}^{(2)} \cdots x_{\beta_{f_r}}^{(r)} \quad (12)$$

である。ところが (10) の条件がアルカラ (12) の皆異ル。即ち (9) with (11) $\times$ (10) ハ一次独立である。然ルニ一方 (9), (10) を満足スル $1, \dots, n$ の配置, 仕方ハ

$$\begin{aligned} \alpha_1 &< \alpha_2 < \cdots < \alpha_f, \\ \hat{\beta}_1 &< \cdots < \hat{\beta}_{f_2} \\ &\wedge \cdots \wedge \\ \hat{\beta}_1 &< \cdots < \hat{\beta}_{f_r} \end{aligned} \quad (13)$$

ナル表カラ f ナル数字ヲ外シテミルコトニヨツテ明カト如ク, (13) ト同シ漸化式ヲ満足スル。 $f=1$ / トキハ明カニ (13) ハ一通リシカタク, 且 $g_i = 1$ カカラ帰納法ニヨリ (13) ナル配置ノ数ハ正ニ $g_{f_1} \cdots g_{f_r} = 1$ 等シイ。即チ $(Mc)^*$ / rank = 等シイ。故ニ (9) with (13) ハ $(Mc)^*$ / base ヲナスコトガ分ツタ。

之デ π_f / 既約表現ヲ實際計算スルコトが出来ル。即チ (9) with (13) を

$$d_i = d_i(x^{(1)}, \dots, x^{(r)}), d_2, \dots, d_g$$

トスルト

$$\pi_f \ni S \quad S(d_1, d_2, \dots, d_g) = (d_1, d_2, \dots, d_g) \quad (a_{ij})$$

デ $S \rightarrow (a_{ij})$ が求タル既約表現である。

$$S d_i = \sum_j d_j a_{ji},$$

a_{ji} がキメルコトハ (12) ノヤウ = monomial = 位ヲツケテオイテアルカラ、ソレヲ利用スレバヨイ。尚ホソノトキ (9) ($f_1! \cdots f_r!$ ノステタ) ノ最高位ノ monomial (12) ノ係数ハ / デアルカラ、得ラレル表現ハ有理整数ノミヲ element = 持ツコケデアル。

4. $A \times \cdots \times A$ ノ既約部分ヲ求メルコト。

P_f = ツイテモ P ノ場合ト全ク同様ノ方法ヲトルコトが出来ル。 α -modul $P_f C$ ノ base ヲ求メルノデアルガ、ソノタメニ先ヅ

1) $P_f \cdot b$ ヲ考ヘヨウ。

P_f ノ base $\xi_{i_1}^{(1)} \xi_{i_2}^{(2)} \cdots \xi_{i_f}^{(f)}$, $1 \leq i_k \leq n$

ヲ便宜上次ノヤウニカフ。

$$\begin{array}{ccccccc} \xi_{\alpha_1}^{(1)} & \xi_{\alpha_2}^{(2)} & \cdots & \xi_{\alpha_{f_1}}^{(f_1)} & & & \\ \xi_{\beta_1}^{(f_1+1)} & \xi_{\beta_2}^{(f_1+2)} & \cdots & \xi_{\beta_{f_2}}^{(f_1+f_2)} & & & \\ & & \cdots & & & & \\ & & \xi_{\beta_1}^{(f-f_1+1)} & \cdots & \xi_{\beta_{f_r}}^{(f)} & & \end{array} \quad (14)$$

之ニ $b = b_1 b_2 \cdots b_s$ ヲ operate スルト

$$\begin{aligned} & \left(\xi_{\alpha_1}^{(1)} \xi_{\beta_1}^{(f_1+1)} \cdots \xi_{\beta_1}^{(f-f_1+1)} \right) b_1 \cdot \left(\xi_{\alpha_2}^{(2)} \xi_{\beta_2}^{(f_1+2)} \cdots \right) b_2 \cdots \\ &= \left| \begin{array}{ccc} \xi_{\alpha_1}^{(1)} & \xi_{\beta_1}^{(1)} & \cdots \xi_{\beta_1}^{(1)} \\ \xi_{\alpha_1}^{(f_1+1)} & \xi_{\beta_1}^{(f_1+1)} & \cdots \xi_{\beta_1}^{(f_1+1)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} \xi_{\alpha_2}^{(2)} & \xi_{\beta_2}^{(2)} \\ \xi_{\alpha_2}^{(f_1+2)} & \xi_{\beta_2}^{(f_1+2)} \end{array} \right| \cdots \quad (15) \end{aligned}$$

$$\left| \begin{array}{ccc} \dots & & \dots \\ \xi_{\alpha_1}^{(f-f_r+1)} & \dots & \xi_{\beta_1}^{(f-f_r+1)} \end{array} \right|$$

(14) = 於テ $\alpha_i, \beta_i, \dots$ ノノ間ダケデ入レカヘタヌウ
+ *monomial* カラハ, 符号ヲ無視スレバ同ジ (15) ヲ
得ルカラ重複ヲサケルタメニ, (15) ヲ

$$\alpha_i \leq \beta_i \leq \dots \quad i = 1, 2, \dots, f_1$$

トシテヨイ。然シ等号が成立スルトキハ (15) ハ 0 トナツ
テシマフカラ

$$\alpha_i < \beta_i < \dots \quad i = 1, 2, \dots, f_1 \quad (16)$$

ノミトルコトニシテヨイ。

2) 次ニ $P_f b a = P_f c$ ヲ考ヘルタメニ (15) with (16) = a
ヲ operate スルト

$$\sum_{\substack{(i, i', \dots) = (1, 2, \dots, f_1) \\ (j, j', \dots) = (f_1+1, \dots, f_1+f_2) \\ \dots \\ (k, k', \dots) = (f-f_r+1, \dots, f)}} \left| \begin{array}{ccc} \xi_{\alpha_1}^{(i)} & \xi_{\beta_1}^{(i)} & \dots & \xi_{\beta_1}^{(i)} \\ \xi_{\alpha_1}^{(j)} & \xi_{\beta_1}^{(j)} & \dots & \xi_{\beta_1}^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{\alpha_1}^{(k)} & \dots & \dots & \xi_{\beta_1}^{(k)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{ccc} \xi_{\alpha_2}^{(i')} & \xi_{\beta_2}^{(i')} & \dots \\ \xi_{\alpha_2}^{(j')} & \xi_{\beta_2}^{(j')} & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array} \right| \dots (17)$$

$$\text{ユナデ } \xi^{(1)} = \xi^{(2)} = \dots = \xi^{(f_1)}, \xi^{(f_1+1)} = \dots = \xi^{(f_2)}, \dots$$

ト identify シテ之ヲ改メテ $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(r)}$ トカカウ。
スルト (17) ハ 次ノヌウニナル。 ($f_1! f_2! \dots f_r!$ デワッ
テ)

$$\left| \begin{array}{ccc} \xi_{\alpha_1}^{(1)} & \xi_{\beta_1}^{(1)} & \dots \xi_{p_1}^{(1)} \\ \xi_{\alpha_1}^{(2)} & \xi_{\beta_1}^{(2)} & \dots \xi_{p_1}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{\alpha_1}^{(r)} & \dots & \xi_{p_1}^{(r)} \end{array} \right| \left| \begin{array}{ccc} \xi_{\alpha_2}^{(1)} & \xi_{\beta_2}^{(1)} & \dots \\ \xi_{\alpha_2}^{(2)} & \xi_{\beta_2}^{(2)} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right| \dots \quad (18)$$

之ハ右カラノ ρ operation ハ意味ヲ持タナクナルガ
 α operation ハ意味ヲ保存スル. (14) ト (18) トヲ
 對應サセルト, スベテノ (14) カラ generate サレル
 K -modul 即チ $P_f C$ ト, スベテノ (18) カラ得ラレル
 K -Modul — 之ヲ $(P_f C)^*$ トカカウ — トハ α -
 isomorphic トナル. 故ニ $P_f C$ ノ代リニ $(P_f C)^*$ ヲ考
 ヘルコトニシヨウ.

扱テ (18) ハ (16) ナル條件ガアツタガ, 更ニソノ上ニ

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_f, \beta_1 \leq \dots \leq \beta_{f_2}, \dots \quad (19)$$

ナルモノミトリ出ス. ソレガ丁度 $(P_f C)^*$ ノ base =
 ナルコトヲ示サウ.

$\xi_{\lambda}^{(i)}$ = 位ヲツケル. λ が大キイ程位が高リ, 同じ λ ノ
 中デハ i が大キイ程高位トスル. ソシテ monomial
 $\xi_{\lambda_1}^{(i_1)} \xi_{\lambda_2}^{(i_2)} \dots \xi_{\lambda_f}^{(i_f)}$ ハソノ因子ノ最高位 $i \leq 1$ ニ注目

シテ位ヲ定メル. スルト (18) with (16) & (19) ヲ展開シ
 タ中デ, 最高位ハ (16) ニヨリ diagonal term 入積

$$\xi_{\alpha_1}^{(1)} \xi_{\alpha_2}^{(1)} \dots \xi_{\alpha_f}^{(1)} \xi_{\beta_1}^{(2)} \dots \xi_{\beta_{f_2}}^{(2)} \dots \xi_{p_{f_r}}^{(r)} \quad (20)$$

デアール. 然ルニ (19) = ヨリ (20), ハ皆奥ナル. 故ニ (18) with

(16) & (19) は一次独立である。一方 (16), (19) を満足する。

$$\begin{aligned} \alpha_1 &\leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_f, \\ \hat{\beta}_1 &\leq \hat{\beta}_2 \leq \dots \leq \hat{\beta}_{f_2} \\ \hat{\alpha} &\dots \hat{\alpha} \\ P_1 &\leq P_2 \leq \dots \leq P_{f_r} \end{aligned} \quad (21)$$

上の配置へ之カラ、 n なる数字 (0^k 以上 f_1^k 以下) を外シテミテワカレヌウニ (4) と同じ漸化式ヲ満足スル、ソシテ $n=1$ ノトキハ $r > 1$ ラバ $h_{f_1}, \dots, f_r = 0$, $r=1$ ラバ $h_{f_1} = 1$ (21) ノ配置ノ上方ノ数ニツイテモ同様ダカラ帰納法ニヨリ (21) ノ配置ノ仕方ノ数ハ正ニ $h_{f_1}, \dots, f_r =$ 等シイ。ソレハ $P_f C$ 係ツテ $(P_f C)^*$ rank デアルカラ、(18) with (21) ハ求メル $(P_f C)^*$ basis デアル。

故ニ (18) with (21) 7 $F_1 = F_1(\xi^{(1)}, \dots, \xi^{(r)}), F_2, \dots, F_k$ トスルト

$A(F_1, F_2, \dots, F_k) = (F_1, \dots, F_k)(b_{ij})$ デ、 (b_{ij}) ハ $A \times \dots \times A$, $P_f C$ = 對應スル既約部分トナル。—— 之ハ a_{ij} ノ f 次ノ同次式ヲ element トスル matrix デアル。

特ニ $P_f C$ が symmetric tensor カラ成ル irreducible subspace ナル場合ハ (18) ハ $\xi^{(1)} = \xi$ トカケバ $\xi_1^{\mu_1}, \xi_2^{\mu_2}, \dots, \xi_n^{\mu_n}$ ($\mu_1 + \dots + \mu_n = f$) ノ全体デアリ、又 $P_f C$ が antisymmetric tensor 全体

カラ滿ル場合ハ (18) ハ

$$\left| \begin{array}{ccc} \xi_{\alpha}^{(1)} & \xi_{\beta}^{(1)} & \cdots \xi_{\rho}^{(1)} \\ & \cdots & \\ & \cdots & \\ \xi_{\alpha}^{(j)} & \cdots & \xi_{\rho}^{(j)} \end{array} \right|, \quad \alpha < \beta < \cdots < \rho$$

ノ全体デアール。(ルニ f デタイト存在シタイ)

之等ハヨク適用サレテキル。

5. π_f ノ場合ノ別証明

§3 ノ方法ハ §4 ノト全ク同ジニエクノデアッタガ、
問題ヲ π_f ノミニ限レバ次ノヤウニヤレバモット簡單デアラウ。

$$\begin{aligned} f &\in K[X^{(1)}, \dots, X^{(r)}] \quad X^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_f^{(i)}) \\ \text{ニ對シテ } \pi_f \ni S &= \binom{i}{\alpha}, \quad Sf(x_1^{(1)}, \dots, x_f^{(1)}; x_1^{(2)}, \dots, x_f^{(2)}, \dots) \\ &= f(x_1^{(1)}, \dots, x_f^{(1)}; x_1^{(2)}, \dots, x_f^{(2)}, \dots) \end{aligned}$$

ト定義スル。此ノ operation ヲ ρ マデ拡張スル。サテ

$$\rho(x) = x_1^{(1)} \cdots x_f^{(1)}, x_{f+1}^{(2)} \cdots x_{f+f_2}^{(2)} \cdots x_f^{(r)}$$

ヲ考ヘヨウ。之ニ左カテ $C = ba$ ヲ operate スル

$$C\rho(x) = b a \rho(x) = b \rho(Cx)$$

$$= b_1(x_1^{(1)}, x_{f+1}^{(2)}, \dots) b_2(x_2^{(1)}, \dots) \cdots$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^{(1)} & x_{f_1+1}^{(1)} & \cdots & x_{f-f_1+1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{(r)} & x_{f_1+1}^{(r)} & \cdots & x_{f-f_1+1}^{(r)} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_2^{(1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} \cdots = d(x) \quad \text{ト}$$

カカヲ。

$$\therefore pc \uparrow (x) = pd(x)$$

然ルニ $pc \cong pd(x)$ ハ p -homomorphic, pc 不可約 (irreducible), $pd(x) \neq (0)$ カカラ $pc \cong pd(x)$

$$\therefore pc \cong pd(x)$$

故ニ pc / base / 代リ $= pd(x)$ / base 7 考ヘレバ
ヨイ。

$$\text{ソレハ } \begin{vmatrix} x_{\alpha_1}^{(1)} & x_{\beta_1}^{(1)} & \cdots & x_{\rho_1}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{\alpha_1}^{(r)} & x_{\beta_1}^{(r)} & \cdots & x_{\rho_1}^{(r)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_{\alpha_2}^{(1)} & \cdots \\ \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix} \cdots \begin{matrix} \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{f_1} \\ \hat{\beta}_1 < \hat{\beta}_2 < \cdots < \beta_{f_2} \\ \wedge \quad \wedge \\ \vdots \\ \rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_{f_r} \end{matrix}$$

ノ異ヘラレルコトハ §3 / 後半ト全様ニ証明サレル。

6. ワツノ恒等式

A / characteristic value 7 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ トス
ルト, pc = 對應スル $A \times \cdots \times A$ / 既約部分 / character
ハ

$$\chi(f_1, \cdots, f_n; A) = \frac{|\varepsilon_1^{f_1} \varepsilon_2^{f_2} \cdots \varepsilon_n^{f_n}|}{|\varepsilon_1^{n-1} \cdots \varepsilon_1|}$$

$$\text{デアル。 } \square \square = l_i = f_i + (n-i) \text{ デ}$$

$$|\varepsilon^{l_1} \dots \varepsilon^{l_n}| = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^{l_1} & \dots & \varepsilon_1^{l_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \varepsilon_n^{l_1} & \dots & \varepsilon_n^{l_n} \end{vmatrix}$$

トスル。

今 (18) を用キルト

$$\chi(f_1, \dots, f_n; A) = \sum \varepsilon_{\alpha_1} \dots \varepsilon_{\alpha_{f_1}} \varepsilon_{\beta_1} \dots \varepsilon_{\beta_{f_2}} \dots \varepsilon_{\beta_r}$$

$\sum$ ハ (21) 1 如キ *suffisc* = ツイテノ総和デアアル。故ニ
恒等式

$$\frac{|\varepsilon^{l_1} \dots \varepsilon^{l_n}|}{|\varepsilon^{n-1} \dots 1|} = \sum \varepsilon_{\alpha_1} \dots \varepsilon_{\alpha_{f_1}} \varepsilon_{\beta_1} \dots \varepsilon_{\beta_{f_2}} \dots \varepsilon_{\beta_r}$$

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_{f_1}$$

$$\hat{\beta}_1 \leq \hat{\beta}_2 \leq \dots \leq \beta_{f_2}$$

$$\wedge \dots \wedge$$

$$\hat{\beta}_1 \leq \dots \leq \beta_{f_r}$$

か間接ニ証明サレタコトニナル。左辺ノ分子ハ $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$
ニツイテノ交代式、分母ハ最簡交代式タカラ商ハ對称式ニ
ナルヲケデアルガ、上式ハソレヲ書き下スニ便利デアラツ。

$$\text{特ニ } f_1 = f, f_2 = \dots = f_r = 0 \text{ トスルバ}$$

$$\frac{|\varepsilon^{f+(n-1)} \varepsilon^{n-2} \dots \varepsilon_1|}{|\varepsilon^{n-1} \varepsilon^{n-2} \dots \varepsilon_1|} = \sum_{\alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_f} \varepsilon_{\alpha_1} \varepsilon_{\alpha_2} \dots \varepsilon_{\alpha_f}$$

$$= \sum_{\mu_1 + \dots + \mu_n = f} \varepsilon_1^{\mu_1} \varepsilon_2^{\mu_2} \dots \varepsilon_n^{\mu_n}$$

$$\text{又 } f_1 = f_2 = \dots = f_f = 1 \text{ ナラバ}$$

$$\frac{\left| \begin{array}{cccc} \varepsilon^n & \varepsilon^{n-1} & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & & & \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{cccc} \varepsilon^{n-1} & \varepsilon^{n-2} & \cdots & \varepsilon \\ \varepsilon & & & \end{array} \right|} = \sum_{i_1 < \cdots < i_f} \varepsilon_{i_1} \varepsilon_{i_2} \cdots \varepsilon_{i_f} = f$$

此、初等對稱式

此等ハヨク知ラレタ式デアル。

—— (終) ——