



Title	一般ナル係數体ヲ有スル代數函數体 及ビ 多元環ニ就テ III
Author(s)	稲葉, 榮次
Citation	全国紙上数学談話会. 1941, 229, p. 699-none
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74927
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

The University of Osaka

997. 一般ナル係數体ヲ有スル代數函數体 及ビ多元環ニ就テ III

稻 葉 榮 次、清和

$\Lambda(\Sigma)$ ノ上ノ代數函數体 K ニ於テ常數体 Λ ノ拡大ヲ行ヒ
 Λ' トシタ場合 K ニ於ケル因子 $\mathfrak{o}$ ハ $K' = K\Lambda' =$ ニ於テ如何
ニナルカトイフニ、コノ常數体拡大ニ関シ *ganz abgesch-*
lassen ナル場合ニハ $\Lambda[\Sigma]$ ノ上ノ K ノ *Hauptidealordnung*
 I ノ *Modulbasis* ガソノマデ $\Lambda'[\Sigma]$ ノ上ノ K' ノ
Hauptidealordnung I' ノ *Modulbasis* トナリ、從ツ
テ Σ ノ分母ニ素ナル因子 $\mathfrak{o}$ ニ對應スル $I =$ ニ於ケル *Ideal*
 $\mathfrak{o}$ ノ $I' =$ ニ於ケル拡大 *Ideal* $\mathfrak{o}'$ ニ對應シテ $K' =$ ニ於
ケル因子 $\mathfrak{o}'$ ガ得ラレル。コレガ $K =$ ニ於ケル因子 $\mathfrak{o}$ ノ $K' =$ ニ於
ケル拡大デアアル。

次ニ係數体縮少ヲ行ヒ Λ ヲ $\bar{\Lambda} =$ シタ場合ハ $K =$ ニ於ケル因
子 $\mathfrak{o}$ ニ對應スルモノガ $\bar{K} =$ アルトハ限ラヌ。

併シ *geschlechtstren.*ナ係數体縮少ノ場合ハ $K =$
ニ於ケル素因子 $\mathfrak{p}$ ハ $\bar{K} =$ ニ於ケル或ル素因子 $\mathfrak{p}^*$ ノ $K =$ ニ於ケ
ル拡大ナル因子ニ含マレル素因子トナル。即チ $\mathfrak{p}$ ニ屬スル
 $\Lambda[\Sigma] =$ ニ於ケル Σ ノ最低次ノ多項式 $f(\Sigma)$ トスルトキ、
 $\bar{\Lambda}[\Sigma] =$ ニ於テ $f(\Sigma)$ デ割レル Σ ノ最低次ノ多項式 $f^*(\Sigma)$
トスル。 $(f^*(\Sigma))$ ハ $\bar{\Lambda}[\Sigma]$ ノ上ノ $\bar{K}$ ノ *Hauptideal-*
ordnung $\bar{I} =$ ニ於ケル *Ideal* トシテ *Primideal*ノ積
ニナル。コレヲ $I =$ ニ於ケル *Ideal*ニ拡大シテ考ヘレバ

$\mathcal{P}_2$ は等 / *Primideal* / 拡大 / 何レカ / *Primeiler*
 トナルカラ $\mathcal{P}_2$ ハコノ *Primideal* = 對應スル $\overline{K}$ / 素
 因子ノ拡大 = 含マレル素因子デアル。特ニ $K = \Lambda(x, n)$ ト
 スルトキ $f(x)$ / 係數ガスベテ $\overline{\Lambda} =$ 属シ, 亦係數 $\Lambda[x] =$
 属スル n / 多項式デ $\mathcal{P}_2 =$ 属スル最低次ノモノ $\varphi(x, n)$
 / 係數ガスベテ $\overline{\Lambda} =$ 属シ, 且ツ n / *Discriminant*
 ガ $f(x) =$ 素ナル場合 = ハ $\mathcal{P}_2$ ハ $\overline{K} =$ 於ケル *Primideal*
 ノ拡大デアル。 (*Primideal* / 次数ヲ考慮スレバイ)。
 従ッテカニル $K =$ 於ケル素因子 $\mathcal{P}_2$ ハ $\overline{K} =$ 於ケル素因子ノ
 拡大トナル。

次ニ *Restbildung* = 依ッテ $K =$ 於ケル因子 $\mathcal{O} =$
 對應スルモノガ $\overline{K} =$ アルカ否カラシラベル = ハ x / 分母
 ハ $\mathcal{O} =$ 素デアルトシ, $\Lambda[x]$ / 上ノ K / *Hauptord-*
nung I ヲトリ因子 $\mathcal{O} =$ 對應スル $I =$ 於ケル *Ideal*
 $\mathcal{O}_2$ ヲ考ヘ $\mathcal{O}_2 =$ 對應スル $\overline{I} =$ 於ケル *Ideal* $\mathcal{O}_2$ ヲ考ヘ
 $\overline{\mathcal{O}_2} =$ 對應シテ $\overline{K} =$ 於ケル因子 $\overline{\mathcal{O}}$ ガ定マルトイフ順序ヲ
 経ル。ユノ場合 $\overline{I}$ ハ $\overline{\Lambda[x]}$ / 上ノ $\overline{K}$ / *Hauptordnung*
 デナケレバナラヌガ, イツデモ $\mathcal{O}_2 =$ 對應スル $\overline{\mathcal{O}_2}$ ガ存在ス
 ルトハ限ラヌ。 $\mathcal{O}_2$ ノアル *Modulbasis* ヲ q_i ($i = 1,$
 $2, \dots, n$) トスルトキ

$$q_i = \sum_{j=1}^n Q_{ij} \mathcal{O}_j$$

Q_{ij} ハ $\Lambda(x) =$ 属スル元デ p -*ganz* 且ツ $|Q_{ij}|$ ナル
 行列式 / 分子ノ多項式ノ係數ガスベテ $p =$ 属スルガコト無

キトキハ $\overline{\mathcal{O}_Z}$ が存在スル。

$$\text{何トナレバ } \overline{q_i} = \sum_{j=1}^n \overline{Q_{ij}} \overline{O_j} \rightarrow \text{Basis トシテ } \overline{\Lambda}[Z]$$

- modul が出来ルガ コノ際ニ

$$q_i \cdot O_k = \sum_{j=1}^n q_j R_{ijk}, \quad R_{ijk} \in \Lambda[Z]$$

ニシテ R_{ijk} $\mathcal{P}$ - gang トナリ

$$\overline{q_i} \cdot \overline{O_k} = \sum_{j=1}^n \overline{q_j} \cdot \overline{R_{ijk}}$$

デアルカラ $\overline{I}$ = 於ケル Ideal トナル。コレガ $\overline{\mathcal{O}_Z}$ デアル。

カクノ如キ $\text{Ideal } \mathcal{O}_Z$ $\rightarrow \text{abbildbar}$ トイフ。特ニ行
 A 式 $|Q_{ij}|$ / 分子分母 = 於ケル最高乗ノ係數ガ $\mathcal{P}$ = 素ナ
 ルトキハ $\mathcal{O}_Z$ / 次數ト $\overline{\mathcal{O}_Z}$ / ソレトハ同ジデアル。カクノ如
 キ $\mathcal{O}_Z$ $\rightarrow \text{gradtren abbildbar}$ トイフ。 $\mathcal{O}_Z$ が
 abbildbar ナルトキ因子 $\mathcal{O}$ $\rightarrow \text{abbildbar}$ トイフ。
 以後 abbildbar トハ $\text{gradtren abbildbar}$ / 意
 味ニ解釋スル。 abbildbar デナイ Ideal ハ、例ヘ
 バ $a \neq 0 \in \mathcal{P}$ ナルトキ $\mathcal{O} - \frac{1}{a}$ デ生ズル Ideal / 如キモ
 ナデアル。

$\mathcal{P}_Z$ が一次ノ素 Ideal ナラバ $\overline{\mathcal{P}_Z}$ モソウデアルガ、
 $\mathcal{P}_Z$ が一次デナイ素 Ideal ナルトキハ $\overline{\mathcal{P}_Z}$ モ素
 Ideal デアルトハ限ラヌ。亦 $\mathcal{O}_Z$ が abbildbar ナルト
 キ $\overline{\mathcal{O}_Z}$ ハ $\mathcal{O}_Z$ / modulbasis / 撰ビ方ニ關係シナ
 イ。

何トナレバ $\mathcal{O}_Z$, Modulbasis $\Rightarrow q_i$ 及ビ q'_i トシ,

$$q_i = \sum_j Q_{ij} \cdot o_j, \quad q'_i = \sum_j Q'_{ij} \cdot o_j$$

テ Q_{ij} 及ビ Q'_{ij} $\mathbb{F}$ -ganz テ $|Q_{ij}|, |Q'_{ij}|$ / 分母分子ノ区、最高冪ノ係数 $\mathbb{F} = \text{素}$ デアルカラ $q'_i = \sum_j C_{ij} q_j$
 = 於テ C_{ij} ハ $\mathbb{F}$ -ganz テ $|C_{ij}| < \infty, |C_{ij}| |Q_{ij}| = |Q'_{ij}|$ デアルカラ $|C_{ij}|$ ハ $\mathbb{F} = \text{素}$ デアル。ソコテ
 $q'_i \rightarrow \bar{q}_i$ 及ビ $\bar{q}_i \rightarrow \bar{q}'_i$ ナレ Transformation.
 可能デ $\bar{q}'_i$ 及ビ $\bar{q}_i = \text{依ツテ}$ 同一、 $\bar{\Lambda}[Z] = \text{Modul } \bar{\mathcal{O}}_Z$
 が生ズル。

[定義] $\Lambda(Z)$ ノ元ガ $\mathbb{F}$ -ganz ナルトキ即チ Z ノ
 多項式ノ商トシタル場合 係数スベテ $\mathbb{F}$ -ganz デ分母ノ
 係数ノ中 $= \mathbb{F} = \text{素}$ ナルモノアル場合、分子ノ区、多項式ノ
 係数ノ $\mathbb{F}$ -Beitrag / minimum γ コノ $\Lambda(Z)$ ノ元
 ノ $\mathbb{F}$ -Beitrag トイフ。 $\mathbb{F}$ -Beitrag ガ 1 ナルトキ、
 コノ元ハ $\mathbb{F} = \text{素}$ トイフ。

[定義] $I = \text{於ケル Primideal } \mathfrak{p}_Z$ ガアル $\Lambda(Z)$
 = 属スル元 = mod $\mathbb{F}$ 素ナリトハソノ元ノ Restbild
 ガ $\mathfrak{p}_Z = \text{属スル } Z$ ノ最低次ノ多項式ノ Restbild =
 素ナルコトデアル。

[定理 15] K ガ I = 属スル 然ラ $\Lambda(Z) = \text{添加シ}$
 テ出来タ separable ナ代数函数体デアリ、 $\bar{K}$ ハ体デ
 $\bar{I}$ ハ $\bar{\Lambda}[Z]$ ノ上ノ $\bar{K}$ ノ Normordnung ナル如キ
 Restbildung ガアルトスル。

素ナル t / 最高冪 t^{v_1} / 係数ヲ $\theta_1(z)$, $a_2 \psi_2(z, t) =$
 於ケル係数 $p =$ 素ナル t / 最高冪 t^{v_2} / 係数ヲ $\theta_2(z)$
 トシ $t^{v_1+v_2}$ / 項 / 係数ヲ 考ヘレバ, $e_1 + e_2 \geq 1$ デアル
 カラ

$$\overline{\theta_1(z)} \cdot \overline{\theta_2(z)} \equiv 0 \pmod{f(z)}$$

トナリ, $\overline{\theta_1(z)}$ 及び $\overline{\theta_2(z)}$ ハ $\equiv$ 次数 $f(z)$ / ソレヨ
 リ小ナルヲ以テ $\overline{\theta_1(z)} = 0$ 或ハ $\overline{\theta_2(z)} = 0$ トナリ不
 合理. 依ツテ $\psi_1, \psi_2 =$ 於ケル t / 冪 / 係数ハスベテ p -
 $gang$ ナリ。

サテ $\Lambda[z] \pmod{f(z)}$ ナル剰餘体ヲ Λ_p トシ,
 $\Lambda_p =$ 於ケル $\psi(z, t)$ / 既約因數デ u / 満足スルモ
 1ヲ $\psi_1(z, t)$ トスル. $\psi_1(z, u)$ ハ $\mathbb{F}_p =$ 属スル u
 / 最低次 / 多項式デアール. $\psi_1, t =$ 開スル次数ヲ f トス.
 Hauptordnung I, $\mathbb{F}_p =$ ヨル剰餘体 K_p ハ
 $\Lambda_p = \psi_1(z, t) = 0$ / 根ヲ添加シタモ / 同型デアール.
 $\psi_1(z, t)$ / 係数ハ上述 = ヨリスベテ p - $gang$ デ t /
 最高冪 / 係数ハ / トシテイ. サテ I / "modulbasis"
 7 $O_1 = 1, O_2, \dots, O_n$ ヲトルトキ ($I =$ 属スルモ / ハス
 ベテ $\text{Exponent} \leq 0$ デアツテ I ハ Exp 最大デアール
 カラ $O_i = 1$ トシテイ.) コレヲ u デ表ハシ

$$O_i = a_{i0} + a_{i1}u + \dots + a_{i, n-1}u^{n-1}$$

$$a_{ij} \in \Lambda(z)$$

トナルト, a_{ij} ハ勿論 p - $gang$ デアラネバナラスが假
 定. ヨリ $a_{ij} /$ 分母ハ $\pmod{p} \cdot \mathbb{F}_p =$ 素ナル. 且ツ

$|a_{ij}| \wedge \mathbb{F}_Z = \text{mod } \mathcal{P} \text{ 素 } \mathfrak{t} + \mathfrak{v}.$

$$O_i = b_{i0} + b_{i1} u + \dots + b_{i,f-1} u^{f-1} \\ + \psi_i(z, u)(c_{if} + c_{i,f+1} u + \dots) \\ b_{ij}, c_{ij} \in \Lambda(\mathfrak{z})$$

ト表シカヘストキ

$$\begin{vmatrix} b_{1,0}, b_{1,1}, b_{1,2} \dots b_{1,f-1}, c_{1,f}, c_{1,f+1} \dots \\ b_{2,0}, b_{2,1}, \dots b_{2,f-1}, c_{2,f}, c_{2,f+1} \dots \\ \dots \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_{1,0} & a_{1,1} & \dots \\ a_{2,0} & a_{2,1} & \dots \\ \dots \end{vmatrix}$$

トナル. $\mathbb{F}_Z$ ハ b_{ij}, c_{ij} / 分母 = 盡ク $\text{mod } \mathcal{P}$ 素デ
アル. $|a_{ij}| \wedge f(\mathfrak{z})$ デ割レズ, b_{ij}, c_{ij} ハ $\mathcal{P}$ -
ganz デアルカラ $(\overline{b_{ij}})$ ナル matrix / f 次 /
行列式ノウチ = $\overline{f(\mathfrak{z})}$ デ割レスモノガアル.

コノ行列式ハ O_i ノウチノ $O^{(1)}, O^{(2)}, \dots, O^{(f)}$ / 係数
デ出来テオルトスル. シカラバ $O^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, f$)
ハ $\Lambda \mathcal{P}$ / 上デ *unabhängig* デ他ノ O_i ハ mod
 $\mathbb{F}_Z$ コレヲ / $O^{(i)} = \text{ヨツテ } \mathcal{P}\text{-ganz} + \text{係数ヲ以テ表}$
ハサレル. 即チ

$$O_i \equiv \sum_{\nu=1}^f \varphi_{i,\nu}[z] O^{(\nu)} \quad \text{mod } \mathbb{F}_Z$$

デ $\varphi_{i,\nu}[z]$ ハ $\mathcal{P}$ -ganz + $\mathfrak{z}$ / 多項式トナル.

ソコデ $\mathbb{F}_Z$ / *modulbasis* ハ $f(\mathfrak{z}) O^{(\nu)}$ ($\nu = 1,$

2, - - - - - f) 及び

$$O_j = \sum_{\nu=1}^f \varphi_{j,\nu}(z) O^{(\nu)}$$

ナルコトが容易ニワカル。(但シ O_j ハイヅレノ $O^{(i)}$ デモ
 ナイスベテ *durchlaufen* スル)。更ニコノ場
 合 $|Q_{i,j}| = f(z)^f$ デアルカテ φ_z ハ *abbildbar*
 デアル。

(証終)

一般ニ如何ナル *Ideal* が *abbildbar* デアル
 カヲハッキリ定メルコトハ困難デアル。 $f(z)$ が $\Lambda(z)$ デ
 既約デナイトキハ φ_z が *abbildbar* デナイトコトガアル。
 ソノ例ハ ϵ が標数 $\neq 3$ = シテ $1/3$ 乗根ヲ含ム任意ノ体
 トシ、ソレニ ϵ ナル不定元ヲ添加シタ $k(\epsilon) = \Lambda$ ナ常
 数体トシ $\Lambda(z) = \sqrt[3]{z^3+1}$ ナ添加シタ代数函数体 $K =$
 於テ明カニ $1, \sqrt[3]{z^3+1}$ 及び $\sqrt[3]{(z^3+1)^2}$ ハ $\Lambda[z]$ ノ
 上ノ *Hauptordnung I*ノ *modulbasis* デアル。

$k(\epsilon)$ ノ元デ分母ガ ϵ ナ割レル元ノ集合デアル
Ring = 於テ分子ガ ϵ ナ割レル元ノ集合ハ *Ideal* デ
 アツテ、コレニヨリ *Abbildungsideal* ガ定マルト
 ス。シカラベ K ハ $\Lambda(z) = \sqrt[3]{z^3+1}$ ナ添加シテ生ズル
 ガ、*discriminant* ハ *mod f* デ z ノ分子ノ因
 子ニ素デアル。

$$u^3 - (z^3 + 1) \equiv \left(u - \frac{z}{\xi}\right) \left(u^2 + \frac{z}{\xi} u + \frac{z^2}{\xi^2}\right) \pmod{.}$$

$$z^3 - \frac{\xi^3}{1 - \xi^3}$$

$$f(z) = z^3 - \frac{\xi^3}{1 - \xi^3}$$

トスレバ

$$\overline{f(z)} = \overline{z}^3$$

コトキ $z^3 - \frac{\xi^3}{1 - \xi^3}$, $\sqrt[3]{z^3 + 1} - \frac{z}{\xi}$ デハズル

Primideal ハ上記ノ Restbildung = ヨツテ abbildbar デハ+1.

[定理16] abbildbar + Ideal $\mathcal{O}_z$ が Hauptideal (A) トルトキ Restbild $\overline{\mathcal{O}_z} \in \overline{K} =$ 於テ Hauptideal ($\overline{A}$) トル. 但シ $\overline{A}$ ハ零 + ラガルモノトス.

(証) $\mathcal{O}_z$ ノ Modulbasis $\exists g_i$ トスル

$$g_i = \sum Q_{ij} o_j$$

Q_{ij} ハ $\Lambda(z)$ = 属スル元デ $\mathbb{F}$ -ganz デ $|Q_{ij}|$ ノ分子分母ノ $\mathbb{F}$ ノ最高乗ノ係数ハ $\mathbb{F}$ = 素デアルトス. 假定 = ヨリ

$$A o_i = \sum_j C_{ij}(z) g_j$$

$C_{ij}(z)$ ハ $\Lambda(z)$ = 属スル $\mathbb{F}$ ノ多項式デ $\mathbb{F}$ -ganz デ $|C_{ij}(z)|$ ハ Λ = 属スル

$$|C_{ij}[z]| |Q_{jk}| = N(A)$$

$N(A)$ の假定 = ヨリ. p -ganz デ p = 素デアルカラ

$|C_{ij}[z]|$ ハ p = 素 + p の元デアル。

$$\text{故} = \overline{A} \overline{O_i} = \sum_j \overline{C_{ij}[z]} \overline{g_j}$$

$|C_{ij}[z]| \neq 0 \subset \overline{A}$ デ $\overline{A} \overline{O_i}$ ハ $\overline{O_z}$ / Modulo basis トナリ $\overline{O_z}$ ハ Hauptideal ($\overline{A}$) トナル。

[Lemma 3] $\mathcal{P}_z$ が定理 15 = 於ケル如キ Prim-ideal トルトキ $B \equiv 1 \pmod{\mathcal{P}_z}$, $B \equiv 0 \pmod{\frac{f(z)}{\mathcal{P}_z}}$ トル如キ p -ganz + K の元 B ガアル。

(証) u の多項式デ最高係ノ係数 1 = シテ他ハ $\Lambda(z)$ = 属スル如キ $\mathcal{P}_z$ = 属スル最低次ノ ϵ ノ $\psi_1(z, u)$ トスル。 u ノ $\Lambda(z)$ = 於テ満足スル既約方方程式 $\psi(z, t) = 0$ トスルト。

$$\psi(z, t) \equiv \psi_1(z, t) \psi_2(z, t) \pmod{f(z)}$$

ψ_1, ψ_2 / 最高係ノ係数ハ 1 デ他ハ p -ganz + z / 多項式デアル。 u / discriminant ガ $\mathcal{P}_z$ = 素デアルカラ ψ_1 ト ψ_2 トハ素デ

$L(z, u) \psi_1(z, u) + M(z, u) \psi_2(z, u) = 1$ ナル関係ガアル。コノデ $M(z, t)$ / t = 関スル次数ハ ψ_1 ノソレヨリ小トシテイ。サテ L, M ハ $\Lambda(z)$ = 於ケル多項式デガ、ソノ係数ハスベテ p -ganz デアル。シカラガレバ適当ナ p デ割レル Λ ノ元 a デ乗ジ、 aL 或ハ aM ノ係数ハスベテ p -ganz デソノウチ = p = 素 +

ルモ、ガアル如クシ得ル、ソシテ

$$\overline{aL} \cdot \overline{\psi_1} + \overline{aM} \cdot \overline{\psi_2} = 0$$

トナル。 $\overline{aM} = 0$ トラバ $\overline{aL} \neq 0$ テ $\overline{aL} \cdot \overline{\psi_1} = 0$ トナ
リ不合理ガカラ $\overline{aM} \neq 0$

$\therefore \overline{\psi_2}$ ハ $\overline{\psi_1}$ ト素デナイコト = ナリ、 u ノ *discriminant* ガ $\mathcal{O}_K = \text{mod } \mathfrak{f}$ 素ナル假定 = 反ス、ソコデ
 $\psi_2(z, u) M(z, u) = B$ トスレバイ。

[定理 17] $\psi_z^{(1)}, \psi_z^{(2)}, \dots, \psi_z^{(v)}$ ガスベテ
定理 15 = 於ケル如キ *abbildbar* + 素 *Ideal* トス
ル。シカラバ $\psi_z^{(1)\lambda_1}, \psi_z^{(2)\lambda_2}, \dots, \psi_z^{(v)\lambda_v}$
(λ_i : ハ任意ノ整数) ナル *Ideal* ハ *abbildbar*
デ且ツ

$$\overline{\psi_z^{(1)\lambda_1}, \psi_z^{(2)\lambda_2}, \dots, \psi_z^{(v)\lambda_v}} = \overline{\psi_z^{(1)\lambda_1}, \psi_z^{(2)\lambda_2}, \dots, \psi_z^{(v)\lambda_v}}$$

トナル。

(証) (i) 先ヅ λ_i ガスベテ正ナルカ零ナル場合。
定理 15 = ヨリ任意ノ $\psi_z^{(i)}$ = ツキ成立ツカラ、帰納法 =
ヨツテ $\mathcal{O}_K$ ガ $\psi_z^{(i)}$ ノ積ナル *ganji* + *Ideal* ナル場
合定理ガ成立スルト假定シ、 $\psi_z^{(i)}$ ノ、ウチノ任意ノ ψ_z フ
トツタ場合 $\mathcal{O}_K \psi_z =$ ツキ定理ノ成立スルコトヲ証スレ
バイ。

$\mathcal{O}_K$: *Modulbasis* フ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ トス
ル。

$\alpha_z = \text{入ル } \mathbb{P}_z \text{ の Beitrag } \gamma \mathbb{P}_z^e \text{ トスル。亦}$
 $f(z)$ が $\mathbb{P}_z = \text{属スル最低次ノ } z \text{ノ多項式トスルト}$
 $f(z)$ ハ丁度 $\mathbb{P}_z$ デ割レル。シカラザレバ $\mathbb{P}_z$ ノ $\mathbb{U}$ ノ
 $\text{discriminant} = \text{素デナイクトナル。}$

$$\text{サテ } \frac{\alpha_i}{f(z)^e} \equiv k_i \pmod{\mathbb{P}_z}$$

デアッテ k_i ハ K_z ノ元ヲ代表スル。

k_i ハ $\mathbb{U}'$ ノ $(f-1)$ 次多項式トシテ表ハストキ、ソ
 ノ係數ハスベテ $\mathbb{F} - \text{ganz}$ ノ z ノ多項式デアルトシ
 テイ。何トナレバ Lemma 3 = ヨリ

$$\frac{\alpha_i \mathbb{B}^e}{f(z)^e} \equiv k_i \pmod{\mathbb{P}_z}$$

ヲ $\frac{\alpha_i \mathbb{B}^e}{f(z)^e}$ ハ $\mathbb{I} = \text{属シ } \mathbb{F} - \text{ganz}$ ノ係數ヲ有スルカラ。

k_i ノ $\mathbb{U}$ ノ $(f-1)$ 次多項式トシテ表ハシタトキ、ソノ係
 數デアッテ f 次行列式ノウチ $= f(z)$ デ割レズ且ツ $\mathbb{F} -$
 Beitrag ノ最小ナルモノガアル。何トナレバカドル
 f 次行列式ガスベテ $f(z)$ デ割レルトスルト α_i ノウチデ
 $\pmod{\mathbb{P}_z^{e+1}}$ $\wedge \mathbb{P}_z$ 上デ *unabhängig* ナモノガ
 f 個ヨリ小トナッテ不合理デアアル。

サテカドル f 次行列式ハ $k_1, k_2, \dots, k_f = \text{於ケル}$
 係數ニヨッテ生ズルモノトシテ, $\alpha_z \mathbb{P}_z$ ノ *Modul-*
basis ヲ次ノ如ク定メル。

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= f(z) \alpha_1, \quad \gamma_2 = f(z) \alpha_2 \dots \dots \gamma_f \\ &= f(z) \alpha_f \end{aligned}$$

$i \equiv f+1$ ナルトキハ

$$\gamma_i = \alpha_i + \sum_{j=1}^f l_{ij}(z) \alpha_j$$

トシ, $\gamma_i \in \mathbb{P}_z^{e+1}$ ナル如ク $\wedge(z) =$ 於ケル $l_{ij}(z)$

ヲ定メル. ソレニハ

$$k_i + \sum_{j=1}^f l_{ij}(z) k_j \equiv 0 \pmod{f(z)}$$

ナル如ク定ムレバイ.

コノ際 $l_{ij}(z)$ ハ $k_1, k_2, \dots, k_f$ ノ模ヒガニヨツ
テ f -ganz ナル如クシ得ル. 且ツ $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_f$ ハ
 $\pmod{\mathbb{P}_z^{e+1} \wedge \mathbb{P}_z}$ ノ上デ *unabhängig* ナカテ
 γ_i ハ $\mathcal{O}_z \mathbb{P}_z$ ノ *Modulbasis* デ且ツソノ係数 f -
ganz デアル.

シカシテ γ_i ヲ O_i デ表シタトキノ係数ノ行列式ハ
 α_i ヲ O_i デ表シタトキノ係数ノ行列式 $= f(z)^f$ ヲ乗シタ
モノニナル. ソコデ $\mathcal{O}_z \mathbb{P}_z$ ハ *abbildbar*. サテ
 $\overline{\mathcal{O}_z \mathbb{P}_z}$ ハ明ラカニ $\overline{\mathcal{O}_z} =$ 属スルカラ $\overline{\mathcal{O}_z \mathbb{P}_z} = \overline{\mathcal{O}_z} \cdot \overline{\mathbb{Q}_z}$
トナリ $\overline{\mathbb{Q}_z}$ ハ $\overline{\mathbb{P}_z}$ ト同ジ次数デ $f(z)$ ノ *Primteiler*
ヨリ成ル.

$\overline{\mathbb{Q}_z} = \overline{\mathbb{P}_z}$ ナル証明ハ次ノ如クスル. モシ $\overline{\mathbb{Q}_z} \neq \overline{\mathbb{P}_z}$
ナラバ $\overline{\mathbb{Q}_z}$ デ割レ $\overline{\mathbb{P}_z}$ デ割レヌ $\overline{u}$ ノ多項式ヲ $\overline{u}(z)$ ト
シ, ソノ次数ハ f ナルモノガアル (最高係ノ係数ハ1トス)
(n ノ *diskriminant* ハ $\pmod{f(z)}$ ニ素デア
ルカラ).

$\sigma_z = \lambda \text{ル } Q_z \text{ 1 Beitrag 7 } Q_z^e \text{ トスレバ } \bar{\alpha}_i$
 $1 \text{ ヲ } Q_z^e \text{ デ割レ } Q_z^{e+1} \text{ デ割レヌ } \bar{\alpha}_t \text{ カアル。 } \psi_z$
 $= \text{ 属スル } u \text{ ノ最低次 (f 次) 多項式 デ最高乗ノ係数 1 ナル}$
 $\text{モ } 1 \text{ ヲ } \psi_1(z, u) \text{ トスレバ}$

$$Z(u) \bar{\alpha}_t = \psi_1(z, u) \cdot \bar{\alpha}_t + (Z(u) - \psi_1(z, u)) \bar{\alpha}_t$$

$\psi_1(z, u) \bar{\alpha}_t$ ハ $\sigma_z \psi_z$ - 属スルカラ

$$Z(u) \bar{\alpha}_t = \sum_j \bar{\gamma}_j \bar{q}_j[z] + (Z(u) - \psi_1(z, u)) \bar{\alpha}_t$$

$$\bar{q}_j[z] \subset \wedge[z]$$

ソコデ $\bar{\gamma}_i$ ガスベテ Q_z^{e+1} デ割レルカラ, 次数 f ヨリ小
 ナル u ノ多項式 $Z(u) - \psi_1(z, u)$ ガ Q_z デ割レルコ
 トナリ不合理。

(ii) $\lambda_i = \text{負ナルモナアル場合}$

$$\psi_z^{(1)\lambda_1} \psi_z^{(2)\lambda_2} \cdots \psi_z^{(v)\lambda_v} = \frac{L_z}{\sigma_z} = \bar{c}_z$$

トオク。

但シ σ_z, L_z ハ ganz デアツテ $\psi_z^{(i)}$ ノミヨリ
 ナル。

$$\bar{c}_z \text{ ガ abbildbar テ } \bar{c}_z = \frac{L_z}{\sigma_z} \text{ ナルコトヲ証ス}$$

レバイ。

$$\sigma'_z = \frac{N(\sigma_z)}{\sigma_z} = \frac{(\varphi(z))}{\sigma_z}$$

トオケバ (i) = ヨリ σ'_z ハ abbildbar テ

$$\bar{c}_z = \frac{\bar{L}_z \sigma'_z}{\sigma_z \sigma'_z} = \frac{\bar{L}_z \sigma'_z}{(\varphi(z))}$$

$\bar{L}_z \sigma'_z, \sigma_z \sigma'_z \in \text{abbildbar}$ $\Rightarrow \overline{\bar{L}_z \sigma'_z} = \overline{\bar{L}_z} \cdot \overline{\sigma'_z}$, $\overline{\sigma_z \sigma'_z} = \overline{\sigma_z} \cdot \overline{\sigma'_z}$ 亦定理16 $\Rightarrow$

リ $\overline{\sigma_z \sigma'_z} = (\varphi(z)).$

ナ $\bar{L}_z \sigma'_z$, $\sigma_z \sigma'_z$ Modulbasis $\gamma C_1, C_2, \dots$
 $\dots C_n$ スレバ $\bar{c}_z$ Modulbasis $\wedge$

$$\frac{C_1}{\varphi(z)}, \frac{C_2}{\varphi(z)}, \dots, \frac{C_n}{\varphi(z)}$$

トナル。

$\bar{L}_z \sigma'_z$, Modulbasis $\wedge \bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_n$

ナリトシテイナカラ $\bar{c}_z$ $\wedge$ 明ラカ $= \text{abbildbar}$ トナリ

$\bar{c}_z$, Modulbasis $\wedge$

$$\frac{\bar{C}_1}{\varphi(z)}, \frac{\bar{C}_2}{\varphi(z)}, \dots, \frac{\bar{C}_n}{\varphi(z)}$$

トナリ

$$\bar{c}_z = \frac{\overline{\bar{L}_z \sigma'_z}}{(\varphi(z))} = \frac{\overline{\bar{L}_z \sigma'_z}}{\sigma_z \sigma'_z} = \frac{\overline{\bar{L}_z}}{\sigma_z}$$

(証終)

定理17 = 於ケル如キ abbildbar ナ K , Ideal
 σ_z $\wedge$ 群 G ナリ, Restbild $\overline{\sigma_z} \in$ 亦群 $\bar{G}$ ナ
 スコトガワカル。亦 G , 部分群デ Idanptideal , ミ
 ヨリナル群 H , Restbild $\bar{H}$ $\wedge$ Idanptideal ,
 ミヨリナル $\bar{G}$, 部分群デアル。ソコデ Ideal 類群 G/H

= Ideal 類群 $\overline{G}/\overline{H}$ が對應スルが同型トナルカ否カハ
未ダワカラヌ。亦 $\overline{I}$ = 於ケル任意ノ Primideal
 $\mathcal{P}'_Z = I$ ノアル abbildbar + Ideal $\mathcal{P}_Z$ が對
應シ $\overline{\mathcal{P}_Z} = \mathcal{P}'_Z$ = ナルトハ限ラヌガ、次ノ定理ヲ得
ル。

[定理 18] $K = \Lambda(Z, u)$ デ u ハ I = 属シ
separable ナリ且ツ $\overline{K}$ が体トナリ $\overline{I}$ が $\overline{\Lambda}[Z]$ ノ上ノ
Hauptordnung トナル如キ Restbildung
= 於テ、 $\overline{I}$ = 於ケル任意ノ Primideal $\mathcal{P}'_Z$ が u ノ
Diskriminant = mod $\mathcal{P}$ 素ナルトキ、 $\mathcal{P}'_Z$
ハアル abbildbar + I = 於ケル Primideal $\mathcal{P}_Z$
ノ Restbild $\overline{\mathcal{P}_Z}$ ノ Primteiler トナル。

(証明) $\mathcal{P}'_Z$ デ割レル $\overline{\Lambda}[Z] =$ 於ケル最低次ノ Z
ノ多項式ヲ $\overline{f(Z)}$ トシ、 $\overline{\Lambda}[Z] =$ 於ケル係數ヲ有スル
 $\overline{u}$ ノ多項式ヲ $\mathcal{P}'_Z =$ 属スル最低次ノモノヲ $\theta(Z, \overline{u})$
トス。 $K =$ 於テ u ノ満足スル既約式 $\psi(Z, u)$ ノ mod
 $f(Z) =$ 於ケル既約因數 $\varphi(Z, u)$ ノ Restbild
 $\overline{\varphi(Z, u)}$ が $\theta(Z, \overline{u})$ ノ因子ヲ有ストス。シ
カラバ

$$K_1(Z, u) f(Z) + K_2(Z, u) \varphi(Z, u)$$

(但シ K_1, K_2 ハ u ノ多項式トシテ係數ノ分母ハスベテ
 $f(Z) =$ 素) ノ形ノ元デ $I =$ 属スルモノノ集合ハ $I =$
於ケル Primideal デコレヲ $\mathcal{P}_Z$ トスル。 $\mathcal{P}_Z$ ノ
Modulbasis ハ定理 15 = 於ケル如ク定マリ abbild-

$\bar{K}$ は $\bar{K}_1(\bar{z}, \bar{u}) f(\bar{z}) + \bar{K}_2(\bar{z}, \bar{u}) \cdot \bar{g}(\bar{z}, \bar{u})$ の形に表され、 $\bar{K}_1(\bar{z}, \bar{u}), \bar{K}_2(\bar{z}, \bar{u})$ は $\bar{K}$ の係数 $\bar{K}$ - $\bar{g}$ の $\bar{K}$ の元である。定理 15 の証明より、 $\bar{K}$ は

$$\bar{K}_1(\bar{z}, \bar{u}) f(\bar{z}) + \bar{K}_2(\bar{z}, \bar{u}) \cdot \bar{g}(\bar{z}, \bar{u})$$

の形の元で $\bar{K}$ に属するものの集合であることがわかる。これは $\bar{K} = \bar{K}' = \bar{K}$ である。

〔定理 19〕 K は m 乗シテ主類である如き因子類ノ数ヲ n_m トスルトキ、 $\bar{K}$ *ganz abgeschlossen* である如き係数体拡大 $\bar{K}$ は n_m より小トナラス。換言スレバ *geschlechtstrenn* の係数体縮小ヲ行ヘバ $\bar{K}$ は n_m より大トナラス。亦 K が *einfach separable* ナル n_m が有限ナルトキ、 $\bar{n}_m = n_m$ となり且ツ任意ノ部分体 L に関シ *dimension* 有限ナル係数体 L の *Restbild* は有スル如き *geschlechtstrenn* の係数体縮小存在スル。

〔証〕 係数体縮小 $\bar{K}$ は $\bar{K}$ の *Restbild* $\bar{K}$ は m 乗シテ主類トナル如き各因子類カラ $\bar{K}$ の分母ニ素ナル因子 $\bar{p}_i$ ヲツツツ撰ビ出ス。 $\bar{K}$ は m 乗シテ *Idempotent* ナル因子ハ K は m 乗シテ *Idempotent* ナルカラ、 $\bar{K}$ は m 乗シテ *Idempotent* ナイ因子ハ K は m 乗シテ *Idempotent* ナイコトヲ証スレバイ。

次数 0 ナル $\bar{K}$ は $\bar{K}$ の分母ニ素ナル因子 $\bar{p}_i$ が K は m 乗シテ *Idempotent* ナラズレバ K は $\bar{K}$ の $\bar{p}_i$ の

1 dimension 1 ならば, $\overline{\alpha}$ 1 idempotent である.

次 $K =$ 於て m 乗シテ主類 = ナル各因子類カラ
之, 分母 = 素ナル $\text{discriminant} =$ 素 + 因子
 $\alpha^{(i)}$ フーツツ取り出ス. 因子 $\alpha^{(i)}$ = 含マレル素因子
 $\psi^{(i,j)}$ ア割レル之ノ最低次ノ多項式 $f_{i,j}(\Sigma)$, ψ ,
多項式デ最低次ノ $\psi^{(i,j)} =$ 属スルモ / $\psi_{i,j}(\Sigma,$
 $\psi)$ トス.

亦 $\alpha^{(i)m} = (A^{(i)})$ ナルトキ是レ等 $f_{i,j}(\Sigma)$,

$\psi_{i,j}(\Sigma, \psi)$, $A^{(i)} =$ 於ケルスベテ / $\wedge =$ 属スル係数ヲ
含ム如キ $L =$ 関シ dimension 有限ナル係数体ヲ
Restbild = 有スル如キ geschlechtten + 係数体
縮小ヲトレバ $\alpha^{(i)} \wedge \overline{K} =$ 於ケル因子トナリ $\alpha^{(i)m} = (A^{(i)})$
= シテ m 乗スレバ $\overline{K} =$ 於テ idempotent = ナル. 亦カコル
 $\alpha^{(i)} \wedge \overline{K} =$ 於テ互ニ同ジ因子類ニ属スルコトハナイ. ソコ
デ $\overline{\pi}_m \cong \pi_m$ トナリ, 従ツテ $\overline{\pi}_m = \pi_m$ デアル.

[定理 20] K 1 einfach separable デ常數体
 $\wedge$ / 任意ノ代数的拡大ニ関シ ganz abgeschlossen ト
スル. 且ツ $\wedge$ 1 代數數体ナルカ或ハアル部分体ニ関シ di-
mension 1 ナルモノトス. $K =$ 於テ m 乗シテ主類 = ナ
ル因子類ノ数有限ニシテ π_m トスルトキ, 常數体 $\wedge =$ アル有
限次代数的拡大ヲ行ヒ, ソノ後適當ナル geschlechtten
+ Restbildung ヲ行ヘバ $\overline{\pi}_m \cong \pi_m$ トナル. 但シ
 $\overline{\pi}_m \wedge \overline{K} =$ 於テ m 乗シテ主類 = ナル因子類ノ数トス.

(証) K / m 乗シテ主類 = ナル各因子類カラ, 之ノ分母

=素 = シテ且ツ μ / discriminant = 素ナル因子
 $\alpha^{(i)}$ ヲーツヅツ取出ス。

常數体 $\wedge$ ヲ適當 = 代数的 = 拡大 $\checkmark$ *geschlechtren*
 + *Restbildung* ヲ適當 = 撰 ヲバ $\alpha^{(i)}$ ガスベテ定理
 17 - 於ケル如キ *abbildbar* + 因子トナル。シカシテ
 $\overline{\alpha}_2^{(i)}$ モ m 乗シテ *Idempot* = ナリ, 然ツテ 0 次ナル
 $\overline{\alpha}^{(i)}$ ナル因子モ m 乗スレバ *Idempot* = ナル。

$$\text{サテ } \frac{\alpha_z^{(i)}}{\alpha_z^{(j)}} = Q_z^{(i,j)} \quad (i \neq j) \wedge K = \text{於テ}$$

Idempot デナイガ, コノ *Restbild* $\overline{Q}_z^{(i,j)}$ ガ *Idempot*
 デナイコトヲ証スレバイコ。 $Q_z^{(i,j)}$, *normalbasis*
 a_v ノ係數ガスベテ f -*ganz* ナル如ク *Restbildung*
 ヲ撰ンデオケバ, a_v ノ *Exponent* ヲ ω_v トスル
 ト

$$\sum \omega_v = \sum \omega_v - \text{grad } Q_z^{(i,j)}$$

$$\sum \bar{\omega}_v \leq \sum \bar{\omega}_v - \text{grad } \overline{Q}_z^{(i,j)}$$

デイルカラ $\sum \omega_v \geq \sum \bar{\omega}_v$ シカル = $\overline{a_i} \mathbb{Z}^{\omega_i}$ ガ $\overline{\omega}_\infty$
 = 属スルカラ $\bar{\omega}_v \geq \omega_v$ デ $\bar{\omega}_v = \omega_v$ トナリ $\overline{a_i}$ ハ又ハ
 リ $\overline{Q}_z^{(i,j)}$, *normalbasis* トナリ, $\overline{Q}^{(i,j)}$,
ganze multipla, *dimension* ハ $Q^{(i,j)}$,
 ソレニ等シ。依ツテ $\overline{Q}^{(i,j)} \in \text{Idempot}$ デナイ。

(証終)

定理 20 ハモット詳細ナル形ニ述べ得ルガ, ソレハココ
 デ述べナイ。定理 20 = 於ケル *Restbildung* 1 撰ビ方

が $m = \text{degree}$ スルコトノアルノハ注意 = 値スル。

例へバ Λ が代數數體デ K の示性數 1 の代數函數體ナルトキ, m を割ルトコロノ A bildungsideal ヲトレバ $\overline{K} = \text{於ケル } \overline{\mathcal{O}_{E_m}}$ が $\mathcal{O}_{E_m}$ ヲリ小トナルコトがアル。

(Klasse, Zur Theorie der abstrakten elliptischen Funktionenkörper I. Crelles Journ. 175 (1936) 参照)

[定理 1] 標數 0 ナル任意ノ常數體 Λ が代數的 = 閉デテオルトキ $\Lambda(\mathcal{O})$ 上ノ代數函數體 $K = \text{於ケル } m$ 乘シテ Hauptklasse = ナル因子類ノ數 $\mathcal{O}_{E_m}$ ハ $m^{2g} = \text{等シ}$ 。但シ g ハ K ノ示性數トス。

(証) $K = \text{於テ } m$ 乘シテ主類 = ナル因子類ヲ有限個トリ, ソレカラーツツツ $\mathcal{O}$ ノ分母 = 素ナ且ツ $\mathcal{O}'$ ノ discriminant = 素ナ因子 $\mathcal{O}^{(i)}$ ヲエラビ, コレヲ $\mathcal{O}^{(i)} = \text{入ル素因子 } \mathfrak{p}$ デ $\mathfrak{p} - a$, $m - b$ が割レルトスル。
($a, b \in \Lambda$)。

カナル a, b ヲスベテ含ミ且ツ $\mathcal{O}^{(i)m} = (A_i)$ ナルトキ A_i ノ Λ = 屬スル係數ヲスベテ含ミ absolute dimension 有限ナル $\overline{\Lambda}$ ヲ係數體トスル如キ係數體縮少ヲ行ヒ $\overline{K}$ が出來ル。

サテ複素數體 $\mathbb{C}$ ヲトレバ, コレハソノ Primkörper = 對スル Transzendenzgrad 無限デ alg. abg. デアルカラ $\overline{\Lambda} = \text{同型ノ部分體 } \overline{\Lambda}^*$ が $\mathbb{C}$ ノウチニ

アル。 $\bar{\Lambda}$ の代り $= \bar{\Lambda}^*$ トレバ $\bar{K} =$ 同型 $+ \bar{K}^*$ がデキル。
 サテ $\bar{\Lambda}^*$ を拡大シテ $\bar{\Lambda}$ トスレバ $\bar{K}^* / \bar{\Lambda} =$ 於ケル m 乗シテ
 主類ニナル如キ因子類ノ数ハ m^{2g^*} ナルコトが知レテキ
 ル。(但シ g^* ハ $\bar{K}^* / \bar{\Lambda}$ ノ示性数ナリ)。

ソコデ $\Omega^{(2)} =$ 對應スル $\bar{K}^* / \bar{\Lambda} =$ 於ケル $\Omega^{(1)*}$ ハ
 m 乗シテ $Idempotent =$ ナリ, 定理 18 = ヨリ 互ニ同シ因
 子類ニハ属セヌ。ソコデ $m^{2g^*} \geq n_m$ デアルカラ n_m
 ハ

1 際 $\bar{K}^* / \bar{\Lambda}$ ノ示性数 g^* ハ $\bar{K}$ /
 ソレニ等シク, 従ツテ $K / g =$ 等シ。 n_m ハ有限デアル
 カラ $K \rightarrow \bar{K}$ ナル係數体縮小ハ定理 19 = 於ケル如
 キ $n_m = \bar{n}_m$ ナル如キモノトシテイ。

サテ定理 19 = ヨリ $\bar{K}^* / \bar{\Lambda}$ ノ適當ナル係數体縮小
 ナ行ヒ $\bar{\bar{K}}$ が生ズルトキ $\bar{\bar{K}} =$ 於ケル m 乗シテ主類ニナ
 ル因子類ノ数ハ $m^{2g} =$ シテ係數体 $\bar{\bar{\Lambda}}$ ハ $\bar{\bar{\Lambda}}^*$ / 上デ
 dimension 有限ナル如クシウル。

サテ定理 20 = ヨリ $\bar{\bar{\Lambda}}$ ノ有限次代數的ニ拡大シ, ソ
 ノ後適當ナル *geschlechtstren* + $\bar{\bar{\Lambda}}^*$ / 上ノ di-
 mension 1 / *Restbildung* ナ行フコトヲ繰リ
 返セバ $\bar{\bar{\Lambda}}$ / *Restbild* が遂ニ $\bar{\bar{\Lambda}}$ ト $\bar{\bar{\Lambda}}$ / 間ノ体ニ同型
 トナリ $\bar{\bar{K}}$ / *Restbild* K_1 ハ $\bar{\bar{K}}$ ト K / 間ノ体ニ同型
 ナル如クシ, 且ツコノ際 K_1 / m 乗シテ主類ニナル因子類
 ノ数ハ m^{2g} ヨリ小ナラザル如クシ得ル。依ツテ $n_m \geq m^{2g}$
 トナリ 従ツテ $n_m = m^{2g}$ デアル。

(証終リ)

$\wedge$ 、標数 $\neq 0$ のルットキハ n_m = 関し未知決定的の
結果が得ラレヌ。

—— (未完) ——