OUKA
The University of Osaka
Institutional Knowledge Archive

Title	Vector Lattice ノ表現
Author(s)	前田, 文友; 小笠原, 藤次郎
Citation	全国紙上数学談話会. 1942, 230, p. 722-742
Version Type	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74928
rights	
Note	

The University of Osaka Institutional Knowledge Archive : OUKA

https://ir.library.osaka-u.ac.jp/

The University of Osaka

998. Vector Lattice ノ表現

前田 文友
小笹原 藤次郎 (廣島文理文)

Vector lattice ノ表現ニツイラハ，スデニ我國ニ於テ多クノ人々ニヨツテ論ゼラレテ居ルノデアルガ，コゝデハ F. Wecken[1], characteristic family ヲ用ヰル比較的初等的ナ方法ヲ述ベタイト思フ。

§1. ニ於テハ unit ヲ有スル vector lattice L ヲ考ヘ，L ノ principal ideal ノ全体 P ハ distributive lattice ヲナシ，L ノ要素ニ對應スル characteristic family ハ principal ideal ノ列 $(\alpha_\lambda ; -\infty < \lambda < \infty)$ デアルカラ，P ヲ Wallman ノ方法デ集合族ニ表現スルトキハ，$\{\alpha_\lambda\}$ ハ単調ニ増加スル集合列ニ表現サレル。

コレカラ点函數ヲ作レバ，L ハ連續函數ノ族ニ linear-lattice-homomorphic ニ表現サレル。コレが isomorphic デアルタメニハ，L が Archimedean デナケレバナラヌコトヲ述ベル。

§2 ニ於テハ unit ノ存在ヲ假定シナイ Archimedean vector lattice L ヲ考ヘ，L ノ normal ideal ノ全体 N ハ complete Boolean algebra ヲナシ，L ノ要素ニ對應スル characteristic family ハ normal ideal ノ列ニナル．コノ N ヲ

§1ノ如ク表現スルコトニヨリテ，Lノ表現ヲ求メル。

§3ニ於ヲハσ-complete或ハcomplete vector lattice Lヲ考ヘル。

コノトキハ上ノ方法デ唯ノvector latticeトシテハ表現出来ルガ，ソレがσ-complete或ハcomplete vector latticeトシテlattice-isomorphicデアルトハ云ヘナイ。故ニコノ為ニハLノ要素ヲ値ニ持ツmeasureノ概念ヲ導入シテ，measure zeroノ集合ヲ無視スレバ，成立スルコトヲ示ス。

但シ§2ト§3トハソノ概略ヲ示スニ止メタ。

§1. Lヲvector latticeトスル。即チLハ実数ヲ係数トスルlinear spaceデアッテ，順序$x \geqq y$ヲ$x-y \geqq 0$デ定義スルトキ，Lハlatticeヲ作ッテ居ル。コノトキLハdistributiveデアッテ，尚

$$(x \vee y)+z=(x+z)\vee(y+z),$$

$$(x \wedge y)+z=(x+z)\wedge(y+z)$$

ガ成立スル。$x_+=x\vee 0$，$x_-=-(x\wedge 0)$，$|x|=x_++x_-$ト定義スル。コノトキ$x=x_+-x_-$デアル。

$x, y \in L$トスル。モシ$|x|\wedge|u|=0$ナルスベテノuニ対シテ$|y|\wedge|u|=0$デアルトキハ$y \perp x$ト書ク。$y \perp x$，$x \perp y$が同時ニ成立スルトキハ$x \sim y$ニテ示ス。スベテ

前頁脚註

(1) F. Wecken, Abstrakte Integrale und fast periodische Funktionen, Math. Zeit 45(1939), 382

ノ $x \in L$ ニ對シテ $x < e$ ナルガ如キ $e > 0$ ガ存在スルトキハ，e ヲ L ノ unit トイフ。$e \wedge |x| = 0$ ナルトキハ $x = 0$ デアル。

補助定理 1.1　(i) $x \sim |x|$，$x \sim \lambda x$　($\lambda \neq 0$)

(ii) $x, y \geq 0$ ナルトキハ　$x \vee y \sim x + y$

(証) (i) $x \sim |x|$ ハ定義カラ明ラカデアル。今 $|x| \wedge |u| = 0$ ナル u ヲトリ，$|\lambda x| \wedge |u| = y$ トオク。$|\lambda x| \geq y$，$|\lambda u| \geq |\lambda| y$ デアルカラ $|\lambda|(|x| \wedge |u|) \geq y \wedge |\lambda| y \geq 0$ 故ニ $y = 0$。即チ $\lambda x < x$。λ ノ代ニ $\frac{1}{\lambda}$ ヲオケバ $x < \lambda x$。故ニ $x \sim \lambda x$。

(ii) ハ $x \vee y \geq x + y = x \vee y + x \wedge y \geq 2(x \vee y)$ カラ明リデアル。

L ノ sublattice $\mathfrak{o}$ ニ於テ，$x \in \mathfrak{o}$，$y < x$ ナルトキ常ニ $y \in \mathfrak{o}$ デアルトキハ $\mathfrak{o}$ ヲ L ノ ideal デアルト云フ。ideal ハ linear デアルコトハ補助定理 1.1 ヲ用ヒテ容易ニ証明シ得ル。H ヲ L ノ部分集合トスルトキ，H' ヲ H ノスベテノ要素 y ニ對シテ $|x| \wedge |y| = 0$ ナルガ如キ x ノ集合トスル。H' が ideal デアルコトモ容易ニワカル。

$x \in L$ ガ與ヘラレタルトキ $y < x$ ヲ満足スル y ノ集合 $\mathfrak{o}(x)$ ハ ideal デアル。コレヲ principal ideal トイフ。補助定理 1.1 カラ $\mathfrak{o}(x) = \mathfrak{o}(|x|)$ デアル。故ニ今後ハ $\mathfrak{o}(x)$ トカケバ $x \geq 0$ ナルモノト約束スル。

補助定理 1.2　$\mathfrak{o}(x) \vee \mathfrak{o}(y) = \mathfrak{o}(x \vee y) = \mathfrak{o}(x + y)$,

$o(x) \wedge o(y) = o(x \wedge y)$

(証) $o(x) \ni o(x \vee y)$, $o(y) \ni o(x \vee y)$ ハ明ラカデアル. $o(x) \ni o(z)$, $o(y) \ni o(z)$ トスレバ $x, y < z$ デアル. 今 $z \wedge |u| = 0$ トスレバ $(x \vee y) \wedge |u| = (x \wedge |u|) \vee (y \wedge |u|) = 0$ 故ニ $x \vee y < z$. 即チ $o(x \vee y) \ni o(z)$ 故ニ $o(x \vee y)$ ハ $o(x)$ ト $o(y)$ トノ join デアル。

又 補助定理 1.1 ヨリ $o(x \vee y) = o(x + y)$

$o(x) \ni o(x \wedge y)$, $o(y) \ni o(x \wedge y)$ ハ明ラカデアル. $o(x) \ni o(z)$, $o(y) \ni o(z)$ トスレバ $x > z$, $y > z$ デアル. 今 $x \wedge y \wedge |u| = 0$ トスルトキハ $x > z$ ナレバ $z \wedge y \wedge |u| = 0$.

シカルニ $y > z$ ナレバ $z \wedge z \wedge |u| = 0$. 即チ $z \wedge |u| = 0$ 故ニ $x \wedge y > z$. 従ッテ $o(x \wedge y) \ni o(z)$. 故ニ $o(x \wedge y)$ カ $o(x)$ ト $o(y)$ トノ meet デアル。

定理 1.1 ; vector lattice L ノ principal ideal ノ全体 $\mathbf{P}$ ハ distributive lattice デアル。

(証) 補助定理 1.2 カラ $\mathbf{P}$ ハ lattice ヲ作リ, 尚 L ガ distributive デアルコトカラ $\mathbf{P}$ モ distributive ナルコトガワカル。

以後本節ニ於テハ L ハ unit e ヲ有スルモノト假定スル. 任意ノ $x \in L$ ニ對シテ $a_\lambda = o(x - \lambda e)^+$ トオクトキ, $(a_\lambda ; -\infty < \lambda < \infty)$ ヲ x ノ <u>characteristic family</u> トイフ.

補助定理1.3. x ノ characteristic family ヲ $\{\sigma_\lambda^{(x)}\}$ トシ，尚 $t_\lambda^{(x)} = \sigma((x-\lambda e)_+)$ トオクトキハ，次ノコトガ成立スル。

(i) $\lambda < \mu$ ナルトキハ $\sigma_\lambda^{(x)} \leqq \sigma_\mu^{(x)}$

(ii) $\lambda < \mu$ ナルトキハ $t_\lambda^{(x)} \vee \sigma_\mu^{(x)} = L$

(iii) $\sigma_\lambda^{(x)} \wedge t_\lambda^{(x)} = \sigma^{(1)}$

(iv) $\sigma_\lambda^{(x)} \vee \sigma_\mu^{(y)} \geqq \sigma_{\lambda+\mu}^{(x+y)}$

(v) $\sigma_\lambda^{(x)} \wedge \sigma_\lambda^{(y)} = \sigma_\lambda^{(x \vee y)}$

(証) (i) 定義ヨリ明ラカデアル。

(ii) $\lambda < \mu$ ナルトキハ

$$(x-\lambda e)_+ + (x-\mu e)_- = (x-\lambda e) \vee 0 + (-x+\mu e) \vee 0$$
$$= (\mu-\lambda) e \vee (x-\lambda e) \vee (-x+\mu e) \vee 0$$
$$\geqq (\mu-\lambda) e$$

故ニ補助定理1.2ヲ用フレバ

$$\sigma((x-\lambda e)_+) \vee \sigma((x-\mu e)_-) = \sigma((x-\lambda e)_+ + (x-\mu e)_-)$$
$$\geqq \sigma((\mu-\lambda) e) = L$$

(iii) $(x-\lambda e)_- \wedge (x-\lambda e)_+ = 0$

カラ明ラカデアル。

(iv) $(x-\lambda e)_- + (y-\mu e)_- = (\lambda e - x) \vee 0 + (\mu e - y) \vee 0$
$$= ((\lambda+\mu) e - (x+y)) \vee (\lambda e - x) \vee (\mu e - y) \vee 0$$
$$\geqq ((\lambda+\mu) e - (x+y)) \vee 0 = (x+y-(\lambda+\mu) e)_-$$

---

(1) σ ハ 0 ノミカラナル ideal

カラ成立スル。

(ロ) $(x \vee y - \lambda e)_- = ((x-\lambda e) \vee (y-\lambda e))_-$

$= (x-\lambda e)_- \wedge (y-\lambda e)_-$

カラ成立スル。

$\mathfrak{P}$ ハ distributive lattice デアルカラ，コレヲ Wallman ノ方法ニヨッテ表現スル。(1) 先ヅ $\mathfrak{P}$ ハ Wallman ノ所謂 disjunction property ヲ満足スル．即チ $\alpha(x)$, $\alpha(y)$ ヲ $\mathfrak{P}$ ノ相異ナル二要素トスルトキハ，$\alpha(x) \wedge \alpha(z)$, $\alpha(y) \wedge \alpha(z)$ ノ何レカガ 0 ナル如キ $\alpha(z)$ ガ存在スル．ソレハ例ヘバ $\alpha(x)$ 又 $\alpha(y)$ ナルトキハ，x 又 y デアルカラ $y \wedge z = 0$, $x \wedge z \neq 0$ ナル $z > 0$ ガ存在スル．ソノトキ $\alpha(z)$ ガ求ムルモノデアル。

$\mathfrak{P}$ ノ maximal additive ideal $\mathfrak{F}^*$ ノ全体ヲ Ω トスル．$\alpha \in \mathfrak{P}$ ニ對シテ α ヲ含ム maximal additive ideal ノ全体ヲ α^* ニテアラハストキハ，$\mathfrak{P}$ ハ α^* ノ如キ集合ノ族 $\mathfrak{P}^*$ ニヨッテ lattice-isomorphic ニ表現サレル．今 $\mathfrak{P}^*$ ヲ底トスルガ如ク Ω ヲ位相化スルトキハ，Ω ハ totally-disconnected デアッテ α^* ハ開集合ニシテ同時ニ閉集合デアル。

コノトキ characteristic family $\{\alpha_\lambda\}$ ハ Ω ニ於ケル集合族 $\{\alpha_\lambda^*\}$ ニ寫サレル．$\{\alpha_\lambda^*\}$ カラ次ノ如

(1) H. Wallman. dattices and Topological spaces, Annals of Math. 39 (1938), 112–126

クシテ点函数 $f(\xi^*)$ ヲ作ル。

$f(\xi^*)=g.l.b.(\lambda;\ \xi^*\in\alpha^*_\lambda)-l.u.b.(\lambda;\ \xi^*\notin\alpha^*_\lambda)$

コンデ $\xi^*\in\alpha^*_\lambda$ 及ビ $\xi^*\notin\alpha^*_\lambda$ ハ，前ノ表現ノ方法ニヨリ，夫々 $\alpha_\lambda\in\xi^*$ 及ビ $\alpha_\lambda\notin\xi^*$ ト同一ノコトヲ意味スル．入ノ如何ニ関ラズ $\xi^*\in\alpha^*_\lambda$ ナルトキハ $f(\xi^*)=-\infty$ デアリ，又入ノ如何ニ関ラズ $\xi^*\notin\alpha^*_\lambda$ ナルトキハ $f(\xi^*)=+\infty$ デアル。

補助定理1.4. $x\in L$ ノ characteristic family ヲ $\{\alpha^{(x)}_\lambda\}$ トシ，コレニ対応スル点函数ヲ $f_x(\xi^*)$ ニテ表ハストキハ次ノコトガ成立スル。

(i) $f_x(\xi^*)$ ハ連続函数デアル。

(ii) x ガ0ノトキハ $f_x(\xi^*)$ ハ恒等的ニ0デアル。

(iii) $f_{-x}(\xi^*)=-f_x(\xi^*)$

(iv) $f_{\mu x}(\xi^*)=\mu f_x(\xi^*)$

(v) $f_{x+y}(\xi^*)=f_x(\xi^*)+f_y(\xi^*)$

(vi) $f_{x\vee y}(\xi^*)=\max[f_x(\xi^*),\ f_y(\xi^*)]$

(vii) $f_{x\wedge y}(\xi^*)=\min[f_x(\xi^*),\ f_y(\xi^*)]$

〔証〕(i) 今 $f(\xi^*_0)=\lambda_0$（有限）ナルトキハ $\alpha^*_{\lambda_0-\varepsilon}-\alpha^*_{\lambda_0-\varepsilon}$ ハ ξ^*_0 ヲ含ム開集合デアッテ，$\xi^*\in\alpha^*_{\lambda_0+\varepsilon}-\alpha^*_{\lambda_0-\varepsilon}$ ナルトキ $|f(\xi^*)-\lambda_0|\leqq\varepsilon$ デアル。

故ニ $f(\xi^*)$ ハ ξ^*_0 デ連続デアル。又 $f(\xi^*_0)=+\infty$ ナル

トキハ，$\Omega - \alpha^*_\lambda$ ハ $\mathcal{F}^*_0$ ヲ含ム開集合ニシテ，
$\mathcal{F}^* \in \Omega - \alpha^*_\lambda$ ナルトキハ $f(\mathcal{F}^*) \geqq \lambda$．$f(\mathcal{F}^*_0) = -\infty$ ノ
トキモ同様ニ云ヘル。

(iii) $x = 0$ ノトキハ

$$\alpha^{(x)}_\lambda = \alpha((-\lambda e)_-) = \begin{cases} L & \lambda > 0 \text{ ノトキ} \\ \theta & \lambda \leqq 0 \text{ ノトキ} \end{cases}$$

ナルコトカラ明ラカデアル。

(iii) $\alpha^{(-x)}_\lambda = \alpha((-x-\lambda e)_-) = \alpha((x+\lambda e)_+) =$ シテ，
補助定理 1.3 (ii) ヨリ

$\mu < \lambda$ ナルトキハ

$$\alpha((x+\lambda e)_+) \vee \alpha((x+\mu e)_-) = L \qquad (1)$$

今 $f_{-x}(\mathcal{F}^*) = g.l.b.(\lambda;\ \alpha^{(-x)}_\lambda \in \mathcal{F}^*) = \lambda_0$ (有限)
トスル．任意ノ $\mu < \lambda_0$ ニ對シテ $\mu < \lambda < \lambda_0$ ナルλヲ
トレバ $\alpha((x+\lambda e)_+)$ 非 $\mathcal{F}^*$．故ニ (1) ヨリ
$\alpha((x+\mu e)_-) \in \mathcal{F}^*$．
從ッテ $f_x(\mathcal{F}^*) = g.l.b.(\lambda;\ \alpha((x-\lambda e)_-) \in \mathcal{F}^*) \leqq -\mu$
$\mu \to \lambda_0$ トラシメレバ

$$f_x(\mathcal{F}^*) \leqq -\lambda_0 \qquad (2)$$

次ニ任意ノ $\mu > \lambda_0$ ニ對シテ $\lambda_0 < \mu < \lambda$ ナルλヲトレ
バ $\alpha((x+\lambda e)_-) \in \mathcal{F}^*$．故ニ (1) ヨリ $\alpha((x+\mu e)_-)$ 非
從ッテ $f_x(\mathcal{F}^*) \geqq -\mu$．$\mu \to \lambda_0$ トラシメレバ

$$f_x(\mathcal{F}^*) \geqq -\lambda_0 \qquad (3)$$

故ニ $f_x(\mathcal{F}^*) = -\lambda_0 = -f_{-x}(\mathcal{F}^*)$．次ニ $f_{-x}(\mathcal{F}^*) = \infty$
トキハ (2) ヲ証明シタ様ニシテ $f_x(\mathcal{F}^*) \leqq -\infty$．即

$f_x(\mathfrak{p}^*) = -\infty$. 又 $f_{-x}(\mathfrak{p}^*) = -\infty$ ノトキハ (3) ヲ証明シタ様ニシテ $f_x(\mathfrak{p}^*) = \infty$

(iv) (ii), (iii) カラ $\mu > 0$ ノトキヲ証明スレバヨイ。コノトキハ

$$o\ell_\lambda^{(\mu x)} = o\ell\left((\mu x - \lambda e)_-\right) = o\ell\left((x - \frac{\lambda}{\mu}e)_-\right) = o\ell_{\frac{\lambda}{\mu}}^{(x)}$$

カラ成立スル。

(v) 先 $f_x(\mathfrak{p}^*) = \lambda_0$, $f_y(\mathfrak{p}^*) = \mu_0$ ガ共ニ有限トスル。$\lambda < \lambda_0$, $\mu < \mu_0$ ナル任意ノ λ, μ ヲトルトキハ $o\ell_\lambda^{(x)} \not\ni \mathfrak{p}^*$, $o\ell_\mu^{(y)} \not\ni \mathfrak{p}^*$. 故ニ $o\ell_\lambda^{(x)} \vee o\ell_\mu^{(y)} \not\ni \mathfrak{p}^*$ (1)

従ッテ補助定理 1·3 (iv) ヨリ $o\ell_{\lambda+\mu}^{(x+y)} \not\ni \mathfrak{p}^*$. 即チ $f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) \geqq \lambda + \mu$. 従ッテ

$$f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) \geqq f_x(\mathfrak{p}^*) + f_y(\mathfrak{p}^*) \qquad (4)$$

(4) ハ x, y ノ代リニ $-x$, $-y$ ヲ入レタルトキモ成立スルカラ

$$f_{-x-y}(\mathfrak{p}^*) \geqq f_{-x}(\mathfrak{p}^*) + f_{-y}(\mathfrak{p}^*)$$

故ニ (iii) カラ $f_{x+y}(\mathfrak{p}^*) = f_x(\mathfrak{p}^*) + f_y(\mathfrak{p}^*)$ (5)

次ニ $f_x(\mathfrak{p}^*) = +\infty$, $f_y(\mathfrak{p}^*) = \mu_0$ (有限) トリト

---

(1) maximal additive ideal ハ prime additive ideal デアル. (Wallman, 上掲, P. 116, 脚註)

スル。$\lambda < +\infty$, $\mu < \mu_0$ ナル任意ノ λ, μ ヲトルトキハ上ノ如クシテ $f_{x+y}(\mathfrak{F}^*) \geqq \lambda + \mu$. 故ニ $f_{x+y}(\mathfrak{F}^*) = +\infty$ ヨッテ (5) ガ成立スル。同様ニシテ $f_x(\mathfrak{F}^*)$, $f_y(\mathfrak{F}^*)$ ノ一方ガ $+\infty$, 他方ガ $-\infty$ ノ場合以外ハ (5) ガ成立スルコトガ証明出来ル。

(vi) 補助定理 1.3 (v) ヨリ $\alpha_\lambda^{(x \vee y)} = \alpha_\lambda^{(x)} \wedge \alpha_\lambda^{(y)}$ 故ニ

$$f_{x \vee y}(\mathfrak{F}^*) = g.l.b.\,(\lambda;\ \alpha_\lambda^{(x)} \wedge \alpha_\lambda^{(y)} \in \mathfrak{F}^*)$$
$$= \max\left[g.l.b.\,(\lambda;\ \alpha_\lambda^{(x)} \in \mathfrak{F}^*),\ g.l.b.\,(\lambda;\ \alpha_\lambda^{(y)} \in \mathfrak{F}^*)\right]$$
$$= \max\left[f_x(\mathfrak{F}^*),\ f_y(\mathfrak{F}^*)\right]$$

(vii) ハ (iii) 及ビ (vi) カラ成立スル。

定理 1.2 unit ヲ有スル vector lattice L ハ totally-disconnected ナル空間 Ω ニ於テ定義セラレタ連續函數ノ族 L^* ニヨッテ linear-lattice-homomorphic ニ表現サレル。

(証) $(f_x(\mathfrak{F}^*);\ x \in L)$ テ L^* ニテアラハストキハ補助定理 1.4 ヨリコノ定理ハ成立スル。

但シ $x \vee y$ ニ對應スル函數ハ $\max\left[f_x(\mathfrak{F}^*), f_y(\mathfrak{F}^*)\right]$, 即チ一点 $\mathfrak{F}^*$ ニ於ケル $f_x(\mathfrak{F}^*)$, $f_y(\mathfrak{F}^*)$ ノ大ナル方ヲ値ニトル函數デアル。故ニ要シテ云ヘバ, Ω ニ於テ定義セラレタルアラユル点函數ノ全体 F^* ヲ考ヘ, $f, g \in F^*$ ナルトキ, $f \geqq g$ ヲスベテノ点 $\mathfrak{F}^*$ ニ於テ $f(\mathfrak{F}^*) \geqq g(\mathfrak{F}^*)$ ガ成立スルコトニヨリテ定義スルトキハ, F^* ハーツノ vector lattice デアル。コノ定理ハ L^* ヲコノ F^* ノ vector

sublattice トカヘテ L ト lattice-homomorphic デアルコトヲ意味スル。

補助定理 1.5. x ノ表現 $f_x(p^*)$ ガ恒等的ニ 0 ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ハ，スベテノ $\lambda>0$ ニ對シテ $|x|<\lambda e$ ガ成立スルコトデアル。

(証) コノ表現ハ linear-homomorphic デアッテ $x=x_+-x_-$ デアルカラ，$x\geqq 0$ ノ場合ヲ考ヘレバ充分デアル。シカルニ $f_x(p^*)$ ガ恒等的ニ 0 ナルタメニハ

$$\alpha_\lambda^{(x)}=\alpha((x-\lambda e)_-)=\begin{cases}L & \lambda>0 \text{ ナルトキ}\\ 0 & \lambda\leqq 0 \text{ ナルトキ}\end{cases}$$

ナルコトガ必要且ツ充分デアル。シカルニ $\alpha((x-\lambda e)_-)$ ヘ $\alpha((x-\lambda e)_+)=0$ デアルカラ $\lambda>0$ ノトキ $\alpha((x-\lambda e)_-)=L$ ナルコトハ $\alpha((x-\lambda e)_+)=0$，即 $(x-\lambda e)_+=0$，即 $x\leqq\lambda e$ ナルコトト同等デアル。

定理 1.3 スベテノ $\lambda>0$ ニ對シテ $|x|<\lambda e$ ナルガ如キ x ノ集合ヲ N トスルトキハ，L^* ハ L/N = linear-lattice-isomorphic デアル。

(証) N ハ normal subspace ヲ作ル。Birkhoff, Lattice theory P.109 カラ，コレハ一ツノ linear-lattice-homomorphism ヲ決定スルガ，補助定理 1.5 カラ，コレハ $L\to L^*$ = 外ナラナイ。故ニ L/N ト L^* トハ linear-lattice-isomorphic デアル。

定理 1.3 ノ isomorphism $L/N\longleftrightarrow L^*$ ニ於テ，

L/N ノ中ノ二ツノ異ナル要素 x, y ノ L^* ニ於ケル表現 $f_x(f^*)$, $f_y(f^*)$ ガ何レモ恒等的ニ $+\infty$ デアルトキハ，$x \neq y$ ナル限リ，$f_x(f^*) = f_y(f^*)$ ナルコトガアリ得ル。（局部的ニ無限大ノ値ヲトル場合デモ，カヽル場合ガ起ル）コレハ $\infty - \infty$ ガ不定デアルコトカラ出テ来ル。次ニ述ベルガ如ク，L ヲ Archimedean ニスレバ，コレガ除カレルノミナラズ，$L \longrightarrow L^*$ が isomorphism ニナル．ソレヲ考ヘル前ニ若干ノ注意ヲ與ヘル．

E ヲ L ノ部分集合トスルトキハ，一般ニハ $\bigvee_{x \in E} x$ ガ存在スルトハ限ラナイガモシコレガ存在スルトキハ

$$\bigvee_{x \in E} x + y = \bigvee_{x \in E} (x + y), \quad \bigwedge_{x \in E} x + y = \bigwedge_{x \in E} (x + y),$$

$$\bigvee_{x \in E} x \wedge u = \bigvee_{x \in E} (x \wedge u), \quad \bigwedge_{x \in E} x \vee u = \bigwedge_{x \in E} (x \vee u)$$

ガ成立スルコトハ容易ニ証明シ得ル．次ニ極限ノ概念ヲ拡張スル。

$\{x_\delta\}$ ヲ L ノ要素ノ directed set トスル．モシ x 及ビ二ツノ directed set $\{u_\delta\}$, $\{w_\delta\}$ ガ存在シ

(i) スベテノ δ ニ対シテ $u_\delta \leqq x_\delta \leqq w_\delta$

(ii) $\delta < \delta'$ ナルトキハ $u_\delta \leqq u_{\delta'}$, $w_{\delta'} \leqq w_\delta$ ニシテ $\bigvee_\delta u_\delta$ 及ビ $\bigwedge_\delta w_\delta$ ガ存在シ

$$\bigvee_\delta u_\delta = x = \bigwedge_\delta w_\delta$$

ガ成立スルトキ $x_\delta \to x$ ニテアラハス．

カヽル極限ノ概念ヲ定義スルトキハ $x_\delta \to x$ ナルトキ

$x_\delta \vee y \to x \vee y$, $x_\delta \wedge y \to x \wedge y$, $\lambda x_\delta \to \lambda x$,
$x_\delta + y \longrightarrow x + y$

が成立スルコトハ容易ニ証明シ得ル.

vector lattice L ニ於テ, スベテノ $x \in L$ ニ対シテ, $\lambda \to 0$ ナルトキ $\lambda x \to 0$ デアルトキハ L ハ Archimedean デアルト云フ.

補助定理 1.6 L ガ Archimedean vector lattice ナルトキ, x ノ characteristic family ヲ $\{\sigma_\lambda\}$ トスレバ $\bigwedge_\lambda \sigma_\lambda = \theta$ デアル.(1)

(証) $\lambda < 0$ ノ如何ニ関ラズ $z \in \sigma_\lambda = \sigma((x-\lambda e)_-)$ ナル $z \geqq 0$ ガ存在スルトセバ $z < (x-\lambda e)_-$. 故ニ $z \wedge (x-\lambda e)_+ = 0$. 即チスベテノ $\lambda < 0$ ニ対シテ $z \wedge (\frac{x}{\lambda} - e)_- = 0$. $\lambda \to -\infty$ トシメレバ $z \wedge e = 0$. 故ニ $z = 0$. 従ッテ $\bigwedge_\lambda \sigma_\lambda = 0$.

定理 1.4. L ガ unit e ヲ有スル Archimedian vector lattice ナルトキハ, L ハ L^* ニヨッテ linear-lattice-isomorphic ニ表現サレル. 又任意ノ $x \in L$ ニ対シテ $f_x(\eta^*)$ ガ無限大ナル点 η^* ノ集合ハ非稠密デアル.

(註) L ガ Archimedean ナレバ $N = \theta$ デアルカラ, 定理ノ前半ハ定理 1.3 カラ明カデアル. 後半ヲ証明スルニハ, 今 $f_x(\eta^*) = -\infty$ トスル. 即チ λ ノ如何ニ関ラ

---

(1) 尚 $\bigvee_\lambda \sigma_\lambda = L$ ガ成立スル.

次に $\alpha_\lambda \in \mathfrak{o}^*$ であるが，$\alpha(y) \in \mathfrak{o}^*$ なる任意の principal ideal $\alpha(y)$ をとれば，補助定理1.6 から相当な $\lambda_0 < 0$ をとれば $\alpha(y) \ni \alpha_{\lambda_0} = \alpha((x-\lambda_0 e)_-)$ 即ち $y \notin (x-\lambda_0 e)_-$. 故に $(x-\lambda_0 e)_- \wedge z = 0$, $y \wedge z \neq 0$ なる $z > 0$ が存在する. $\alpha(y)$, $\alpha(z)$ を含む maximal additive ideal を $\mathfrak{p}^*$ とすれば $\alpha_{\lambda_0} = \alpha((x-\lambda_0 e)_-) \ni \mathfrak{p}^*$.

故に $f_x(\mathfrak{p}^*) = l.u.b.(\lambda; \alpha_\lambda \ni \mathfrak{p}^*) \geqq \lambda_0$.

即ち $\mathfrak{o}^*$ の任意の近傍 $\alpha^*(y)$ に対し $f_x(\mathfrak{p}^*) \neq -\infty$ なる如き点 $\mathfrak{p}^*$ が存在する. 従って $f_x(\mathfrak{o}^*) = -\infty$ なる如き点 $\mathfrak{o}^*$ の集合は非稠密である. x の代りに $-x$ を考えれば，$f_x(\mathfrak{o}^*) = \infty$ なる点 $\mathfrak{o}^*$ の集合についても同様に云い得る.

$f_x(\mathfrak{p}^*)$ は連続函数であるから，この定理により $f_x(\mathfrak{p}^*)$ の値は函数値が有限なる点において定まる. 故に前に述べた ∞ の場合の不明瞭が除かれる.

§2. 次に unit の存在を仮定しない vector lattice L の表現を考える. 前節からわかる様に，isomorphic な表現を得るためには，L は Archimedean でなければならない. それでこの節では始から L は Archimedean であると仮定する. そうでないときは L/N を考えればよい.

L の ideal α が $\alpha = \alpha''$ を満足するとき，α を normal ideal という. principal ideal は

normal デアル。

定理2.1. L ノ normal ideal ノ全体 $\mathbf{N}$ ハ complete Boolean algebra デアル.

アマリ最クナルカラ以下証明ハ省略スルガ，コノ定理ヲ証明スルニ必要ナ次ノ補助定理ダケヲ証明シテオカウ。

補助定理2.1 $\mathfrak{o}$ ヲ ideal トシ，$y>0$ トスル. モシ y ガ集合 $(y\wedge x;\ x\in\mathfrak{o})$ ノ l.u.b. デナイトキハ，$(y\wedge x;\ x\in\mathfrak{o})$ ノ任意ノ upper bound $y_1<y$ ヲトレバ，$y-y_1\in\mathfrak{o}'$ デアル.

(証) モシ $y-y_1$ ガ $\mathfrak{o}'$ トスレバ $(y-y_1)\wedge x\neq 0$. $x\in\mathfrak{o}$ ナル $x>0$ ガ存在スル。$u=(y-y_1)\wedge x$ トオケバ，$u\in\mathfrak{o}$ ナレバ y_1 ノ定義カラ $y_1\geqq y\wedge u=u$. 他方 $y-y_1\geqq u$ ナレバ，$y\geqq y_1+u\geqq 2u$. 又 $2u\in\mathfrak{o}$ ナレバ，y_1 ノ定義ヨリ $y_1\geqq y\wedge 2u=2u$. 故ニ $y\geqq u+2u=3u$. コレヲ繰リ返ヘセバ，スベテノ n ニ対シテ $y\geqq nu$. シカルニ L ハ Archimedean ナレバ $u=0$. コレ $u>0$ ニ矛盾スル。故ニ $y-y_1\in\mathfrak{o}'$

超限帰納法ヲ用フレバ，L ハ principal ideal $\mathfrak{o}(e^{(\alpha)})$ ノ直和ニ分解セラレル。即チ $\alpha\neq\beta$ ナルトキ $e^{(\alpha)}\wedge e^{(\beta)}=0$ ニシテ，$L=\bigvee_\alpha \mathfrak{o}(e^{(\alpha)})$ デアル。

$x\in L$ ガ與ヘラレタルトキ，$\mathfrak{o}_\lambda=\bigvee_\alpha\{\mathfrak{o}((x-\lambda e^{(\alpha)})_-)\wedge\mathfrak{o}(e^{(\alpha)})\}$ トオクトキハ，normal ideal ノ列 $(\mathfrak{o}_\lambda;\ -\infty<\lambda<\infty)$ ヲ得ル. コレヲ x ノ <u>characteristic family</u> トイフ. コノ characteristic family

ハ§1ニ定義シタ characteristic family ト全ク同一ノ性質ヲ有スルコトガ証明出来ル．従ッテ L ノ表現ヲ得ルタメニハ，Boolean algebra N = Wallman ノ表現方法ヲ適用スル。即チ N ニ於ケル maximal additive ideal $\mathfrak{p}^*$ ノ全体ヲ Ω トシ，$\alpha \in \mathbf{N}$ ニ対シテ α ヲ含ム $\mathfrak{p}^*$ ノ全体ヲ α^* ニテアラハストキハ N ハ α^* ノ如キ集合ノ族 $\mathbf{N}^*$ ニヨッテ isomorphic ニ表現セラレル．今 $\mathbf{N}^*$ ヲ取トルガ如ク Ω ヲ位相化スルトキハ，Ω ハ totally disconnected bicompact space デアッテ，α^* ハ bicompact ナ開集合デアル。（N ハ Boolean algebra デアルカラ maximal additive ideal ト prime additive ideal トハ同一ノモノデアリ，$\mathfrak{p}^*$ ノ補集合ハ N ノ prime ideal デアル．故ニ Ω ハ N ノ prime ideal ノ集合ト考ヘテヨリ，Wallman ノ表現ト Stone ノ表現トハ一致スル）故ニ $x \in L$ ニ対シテ

$$f_x(\mathfrak{p}^*) = g.l.b.(\lambda;\ \alpha_\lambda \in \mathfrak{p}^*) = l.u.b.(\lambda;\ \alpha_\lambda \notin \mathfrak{p}^*)$$

ヲ対応セシメレトキハ，§1 ニ於ケルガ如ク次ノ定理ヲ証明スルコトガ出来ル。

定理 2.2　unit ノ存在ヲ仮定シナイ Archimedean vector lattice L ハ，Ω ニ於ケル連続函数 $f_x(\mathfrak{p}^*)$ $(x \in L)$ ノ system L^* ニヨッテ linear-lattice-isomorphic ニ表現サレル．又 $f_x(\mathfrak{p}^*)$ ガ無限大トナル点 $\mathfrak{p}^*$ ノ集合ハ非稠密デア

ル。

コノ節ノ方法ハ L が unit e ヲ有スル場合ニモ勿論適用出来ルガ，§1 ノ方法ガ L ノ principal ideal デ作ッタ distributive lattice P ノ媒介トシテ居ルニ反シ，コンデハ L ノ normal ideal デ作ッタ Boolean algebra N ヲ媒介トシテ居ル点ガ異ル。

§3. 次ニ L ガ σ-complete 或ハ complete デアッテ unit e ヲ有スル場合ノ表現ヲ考ヘル。Birkhoff, Lattice theory, P. 106 カラ L ハ Archimedean デアル。コノトキハ y ノ principal ideal $a(x)$ ヘノ projection $P_{a(x)}y = \bigvee_n (y_+ \wedge nx) - \bigvee_n (y_- \wedge nx)$ ガ考ヘラレルカラコレヲ用フレバ次ノ定理ガ証明出来ル。

定理3.1 unit e ヲ有スル σ-complete（或ハ complete）vector lattice L，principal ideal ノ全体 P ハ σ-（或ハ complete）Boolean algebra デアル。(1)

定理1.4ヨリ L ハ唯ノ vector lattice トシテ，連続函数ノ system L^* ヲヨッテ linear-lattice-isomorphic ニ表現サレル。(1) シカシ σ-complete（或ハ

（脚註1ハ次頁ヘ）

(1) unit e が有在シナイトヤハ conditionally σ-complete（或ハ conditionally complete）Boolean algebra トナル。

complete) vector lattice トシテ lattice-isomorphic デアルトハ云ヘナイ．コノタメニハ $\mathfrak{L}$ = measure ヲ導入スル．$\alpha \in \mathbf{P}$ ナルトキ $e(\alpha) = f_\alpha e$ トオクトキハ $e(\alpha)$ ハ $\mathbf{P}$ ニ於テ定義セラレタ countably (或ハ completely) additive function デアル．α ノ表現ヲ α^* トシ，$e(\alpha^*) = e(\alpha)$ トオケバ，$e(\alpha^*)$ ハ $\mathbf{P}$ ノ表現 $\mathbf{P}^*$ ニ於テ定義セラレタ additive function デアル．ι^* ヲ $\mathfrak{L}$ ノ一集合トスルトキ countable (或ハ directed) set $\alpha_\delta, \beta_\delta \in \mathbf{P}$, $\omega_\delta \in L$ ガアッテ，$\omega_\delta \to 0$ ニシテ

$$\alpha_\delta^* \leqq \iota^* \leqq \beta_\delta^*, \quad e(\beta_\delta - \alpha_\delta) \leqq \omega_\delta \quad (1)$$

ガ成立スルトキ，ι^* ハ可測ナリト云ヒ，$e(\alpha_\delta)$, $e(\beta_\delta)$ ノ共通ノ極限 $e(\bigvee_\delta \alpha_\delta) = e(\bigwedge_\delta \beta_\delta)$ ヲ $e(\iota^*)$ ニテアラハス．シカルトキハ次ノコトガ成立スル．

定理3.2　可測集合ノ全体 $\overline{\mathbf{P}^*}$ ハ field ヲ作リ，measure $e(\iota^*)$ ハ $\overline{\mathbf{P}^*}$ ニ於テ finitely additive デアル．シカシ measure zero ノ集合ヲ無視スレバ，$\overline{\mathbf{P}^*}$ ハ σ-(或ハ complete) field デアッテ，$e(\iota^*)$ ハ $\overline{\mathbf{P}^*}$ ニ於テ countably (或ハ completely) additive

---

(1) $\beta_\delta - \alpha_\delta$ ハ β_δ ニ於ケル α_δ の relative complement ヲ示ス。

(1) L が σ-complete ノ場合ハ $f_\alpha(\beta^*)$ が中野秀五郎氏ノ relative spectrum ニナッテ居ル．(H. Nakano, spektraltheorie, 数物記事 23 (1941), 491 参照)

デアル．尚 $\underline{P}$ ト $\overline{P}^*$ トハ σ-（或ハ complete）Boolean algebra トシテ lattice-isomorphic デアル．（即 I^* ヲ measure zero ノ集合ガ作ル $\overline{P}^*$ ノ ideal トスレバ P ト $\overline{P}^*/I^*$ トハ σ-（或ハ complete）Boolean algebra トシテ lattice-isomorphic デアル）

コノ measure ノ概念ヲ用ヒレバ次ノ様ニ云ヘル。

定理3.3　measure zero ノ集合ヲ無視スレバ，unit e ヲ有スル σ-complete（或ハ complete）vector lattice L トソノ表現 L^* トハ σ-complete（或ハ complete）vector lattice トシテ linear-lattice-isomorphic デアル．又 $f_y(\mathfrak{P}^*)$ ヲ y ノ表現トスレバ

$$y=\int_{\delta_0} f_y(\mathfrak{P}^*)\,de(\iota^*) \tag{1}$$

デアル。

即チ $y=\bigvee_\nu y_\nu$ ノ表現ヘ measure zero ノ集合ニ属スル点ヲ除ケバ $f_y(\mathfrak{P}^*)=\max_\nu[f_{y_\nu}(\mathfrak{P}^*)]$ デアリ，meet ノ場合モ同様ノコトガ成立スル。

(1)ハ Freudenthal ノ積分式

$$y=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,de(\alpha_\lambda^{(y)}) \tag{2}$$

ニ対応スル．(2)ハ前著 F. Maeda, Partially ordered linear space（廣島文理大紀要，10巻（1940），137-150）ニ於テハ，L ガ complete デ regular デアル場合ニ，

equivalence class A_x (x ノ含ムルガ如キ z ノ集合）ヲ用ヒテ証明シタガ，$x \sim z$ ナルコトト $\alpha(x) = \alpha(z)$ ナルコトトハ同等デアルカラ，equivalence class ノ全体ト principal ideal ノ全体 P トハ lattice-isomorphic デアル。故ニ前者ト大略同様ニシテ，L が σ-complete デアル場合ニ，characteristic family $\{\alpha_\lambda^{(y)}\}$ ヲ用ヒテ，(2) ヲ証明スルコトガ出来ル。

コノ measure ヲ導入スル方法ハ，unit e ガ存在シナイトキデモ，L ガ complete デアルトキハ同様ニ云ヘル。normal ideal α ガ与ヘラレタルトキ，任意ノ $y \in L$ ニ對シテ $V(y_+ \wedge x;\ x \in \alpha) - V(y_- \wedge x;\ x \in \alpha)$ ガ存在スルカラ，コノ値ヲ y ノ α ヘノ projection トシ，$P_\alpha y$ トアラハス。

§2 ノ如ク $L = \bigvee_\alpha \alpha(e^{(\alpha)})$ ニ分割スルトキハ，$\alpha \in \mathbf{N}$ ニ對シテ $e(\alpha) = \bigvee_\alpha P_\alpha e^{(\alpha)}$ ト定義スル。但シ $\bigvee_\alpha P_\alpha e^{(\alpha)}$ ガ存在シナイトキハ $e(\alpha) = +\infty$ ト考ヘル。シカルトキハ $e(\alpha)$ ハ $\mathbf{N}$ ニ於テ completely additive デアル。前ノ P ノ代リニ $\mathbf{N}$ ニ對シテ，同様ノ方法ヲ行ヘバ，measure ガ導入出来ル。

但シコノトキハ measure ガ $+\infty$ ノトキモ出来ルガ，コレハ差支ヲ生ジナイ。

故ニ定理3.3ノ如ク，measure zero ノ集合ヲ無視スレバ，unit ヲ有シナイ場合モ，complete vector lattice L トソノ表現 L^* トハ，complete vector

lattice トシテ linear-lattice-isomorphic デアル。

尚 L が complete vector lattice デアルトキハ，N ハ Bochner and Phillips, Additive set functions and vector lattices, Annals of math. 42(1941), 316-324 = 於ケル (Complete) normal subspace ノ全体 B ト同一デアル。